|  |  |
| --- | --- |
| ***mainlogo_16_7_2019*** *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ **1ο ΕΠΑ.Λ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ**  | MAΘΗΜΑ 3ΟΠαράγωγος συνάρτηση. |

Το ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

### Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ** |  | **ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ** |
| 1. Αν f(x)=c τότε f '(x)=0 |  |  |
| 2. Αν f(x)=x τότε f '(x)=1 |  | 1. Αν f(x)=g(x) τότε f '(x)=g'(x) |
| 3. Αν f(x)=xν τότε f '(x)=νxν-1, νR |  | 2. Αν f(x)=g(x)ν τότε f '(x)=νg(x)ν-1g'(x) |
| 4. Αν f(x)= x τότε f '(x)= 12 x |  | 3. Αν f(x)= g(x) τότε f '(x)= 1 g'(x)2 g(x) |
| 5. Αν f(x)=ημx τότε f '(x)=συνx |  | 4. Αν f(x)=ημg(x) τότε f '(x)=συνg(x) g'(x) |
| 6. Αν f(x)=συνx τότε f '(x)= –ημx |  | 5. Αν f(x)=συνg(x) τότε f '(x)= –ημg(x) g'(x) |
| 7. Αν f(x)=ex τότε f '(x)=ex |  | 6. Αν f(x)=eg(x) τότε f '(x)=eg(x) g'(x) |
| 8. Αν f(x)=lnx τότε f '(x)= 1x |  | 7. Αν f(x)=lng(x) τότε f '(x)= 1 g'(x)g(x) |
| 9. Αν f(x)=εφx τότε f '(x)= 1 2x |  | 8. Αν f(x)=εφg(x) τότε f '(x)= 1 g'(x) 2g(x) |
| 10. Αν f(x)=σφx τότε f '(x)= – 12 x |  | 9. Αν f(x)=σφg(x) τότε f '(x)= – 1 g'(x)2g(x) |
| 11. Αν f(x)= 1 τότε f '(x)=  1x x2 |  | 10. Αν f(x)= 1 τότε f '(x)=  f '(x)f (x) f 2 (x) |

**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**

**5**. (f(g(x)))'=f '(g(x))g'(x)

g2

 

 g 

**4**.  f  '  f 'g  fg '

**3**. (f∙g)'=f 'g+fg'

**2**. (f+g)'=f '+g'

**1**. (cf(x))'=cf '(x)

**π.χ. α**) Αν f(x)=x3+2x–3 τότε f '(x)=3x2+2.

3 3x2  2

**β**) Αν f(x)=ln(x +2x–3) τότε f '(x)= x3  2x – 3 .

**γ**) Αν f(x)=ημ(x3+2x–3) τότε f '(x)=συν(x3+2x–3)(3x2+2)= (3x2+2) συν(x3+2x–3). (Μη κάνετε τον πολλαπλασιασμό!)

**δ**) Αν f(x)=

3x2  2 τότε f '(x)= .

2 x3  2x – 3

x3  2x – 3

**ε**) Αν f(x)= ex3 2x–3 τότε f '(x)= ex3 2x–3 (3x2+2)

**στ**) Αν f(x)=ln(ημx) τότε f '(x)= x =σφx.

x

**π.χ.** Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων :

 

Υπόψη:     . Ο εκθέτης του υπόριζου μπαίνει αριθμητής

**α**) Αν f(x)= x–2 +3, τότε f '(x)=–2x–2–1=–2x–3.

**β**) Αν g(x)=

4

= x 5 , τότε g'(x)=

5 x4

4 4 1

x 5 

4 1 4

x 5 

55 x

**γ**) Αν φ(x)= 8

x3

5 5

 8x3 , τότε φ'(x)= –24x–4.

**δ**) Αν ρ(x)=  2x

2

3 x2

 2

3 , τότε ρ'(x)=

4 x 3

3

5

**π.χ. α**) Αν f(x)=ex(x2–3) τότε f '(x)=ex(x2–3)+2xex.

1 x  ln x

**β**) Αν f(x)= ln x

x

τότε f '(x)= x

x2

 1 ln x .

x2

ex

**γ**) Αν f(x)= τότε f '(x)=

x

xex  ex

x2 .

**π.χ.** Να βρείτε την παράγωγο της f(x)=ημ3(ex+2x). **(Σύνθεση τριών συναρτήσεων)**

Δηλαδή f(x)=ημ3(ex+2x)=[ημ(ex+2x)]3 **Το g(x) του τυπολογίου είναι η αγκύλη.**

Αν έχετε παράγωγο δύναμης τριγωνομετρικής συνάρτησης να την γράφετε με τον εκθέτη εκτός παρένθεσης.

Άρα f '(x)=3[ημ(ex+2x)]2[ημ(ex+2x)]'= **Το g(x) είναι το ημ(ex+2x)**

=3[ημ(ex+2x)]2[συν(ex+2x)](ex+2x)'= **Το g(x) είναι το (ex+2x)**

=3[ημ(ex+2x)]2[συν(ex+2x)](ex+2).

**π.χ.** Αν f(x)=x3+2x–3, να βρείτε την f '(ημx) και την (f(ημx))' **ΔΕΝ είναι το ίδιο**!

**α**) Στην πρώτη θα βρούμε την f '(x) και μετά θα θέσουμε όπου x το ημx.

Άρα f '(x)=3x2+2 και f '(ημx)=3ημ2x+2.

**β**) Στην δεύτερη θα θέσουμε όπου x το ημx και μετά θα παραγωγίσουμε. Άρα f(ημx)=(ημx)3+2ημx–3 και (f(ημx))'=3(ημx)2συνx+2συνx

**π.χ.** Να βρείτε την παράγωγο της f(ημx).

Έχουμε (f(ημx))'=f '(ημx)συνx.

**π.χ.** Δίνεται η συνάρτηση f(x)=αx2+βx+γ. Να βρείτε τα α,β,γ αν f(x)+f '(x)+f "(x)=x2+4.

Έχουμε: f '(x)=2αx+β και f "(x)=2α.

Πρέπει (αx2+βx+γ)+(2αx+β)+2α=x2+4 ή

**α**x2+(**β+2α**)x+**2α+β+γ**=**1**x2+**0**x+**4**

Η παραπάνω ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε xR. (Δείτε τα ίσα πολυώνυμα στην σελίδα **Β Λυκείου Άλγεβρα**)

Άρα **α=1**, β+2α=0 και 2α+β+γ=4, οπότε **β= –2** και **γ=4**.

x0 x

**π.χ.** Δίνεται η συνάρτηση f(x)= x

. Να βρείτε το lim f (1 x) 

2 .

x 1

1ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι f '(1)= lim f (1 h)  2 που μοιάζει με το ζητούμενο όριο.

x0 h

2 2

f '(x)=

x 1  x 1

οπότε f '(1)= 5 .

Άρα

2 x 1

lim f (1 x) 

2 =f '(1)= **5** .

x0 x

2ος τρόπος

Επειδή το ζητούμενο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0

**2 2**

0

πολλαπλασιάζουμε και

διαιρούμε

με την συζυγή παράσταση του αριθμητή.

f 2 (1 x)  2 (1 x)2 (x 2)  2

f (1 x)  2

lim

 lim x f (1 x)  2   lim x[(x 1) x  2  2] 

x0 x

x0

 

x (x2  4 x 5)

x [(x 1) x  2  2]

**2 2**

x0

 lim

x[(x 1) x  2  2]

x(x2  4 x 5)

 lim

 **5** .

x0 x0

### ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

**Χρήσιμες έννοιες για την εφαπτομένη καμπύλης α**) Μία ευθεία έχει εξίσωση **y=λx+β**.

Το **λ** είναι ο συντελεστής διεύθυνσης και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό ημιάξονα Οx.

Το **β** είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της με τον άξονα y′y.

**β**) Μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση y=λx.

Οι ευθείες **y=x** και **y=–x** είναι οι διχοτόμοι των τεσσάρων γωνιών των αξόνων.

**γ**) Δύο ευθείες είναι **παράλληλες** αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

**π.χ.** οι ευθείες y=2x+1453 και y=2x–1821 είναι παράλληλες.

**δ**) Δύο ευθείες είναι **κάθετες** αν οι συντελεστές διεύθυνσης είναι **αντιθετοαντίστροφοι**

δηλαδή

**λ1·λ2=–1**. **π.χ.** οι ευθείες y=2x+1940 και y= – 1 x–1204 είναι κάθετες.

2

**ε**) Μία ευθεία είναι **οριζόντια** αν έχει λ=0. **π.χ.** y=0x+3 δηλαδή y=3.

Μία ευθεία **κατακόρυφη** δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης. **π.χ.** x=5.

Μια ευθεία σχηματίζει με τον x′x **γωνία** 135ο αν λ=εφ135ο=–1 **π.χ.** y=–1x+4.



# ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

### Εύρεση εφαπτομένης

**Α)** Δίνεται από τον τύπο **y=λx+β** όπου **λ=f '(xο) και M(xο**,**f(xο ))** το σημείο επαφής.

**Β)** Μία ευθεία y=λx+β είναι εφαπτομένη της συνάρτησης f στο A(x0,f(x0)). Τότε ισχύουν:

### f '(xο)=λ και f(xο)=λx+β.

**Γ)** Αν μία ευθεία y=λx+β έχει κοινό το σημείο A(xο,f(xο)) με μία συνάρτηση f θα είναι εφαπτομένη της f στο σημείο αυτό αν **λ=f '(xο).** (Διαφορετικά θα είναι σημείο τομής).

**Δ**) **Κλίση** μιας συνάρτησης f στο A(xο,f(xο)) λέγεται ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο Α, δηλαδή λ=f '(xο).

**Ε)** Εφαπτομένη της Cf **παράλληλη** στην y=λx+β σημαίνει **f '(xο)=λ**.

Εφαπτομένη της Cf **κάθετη** στην y=λx+β σημαίνει **f '(xο)**·**λ=–1**. (**αντιθετοαντίστροφοι αριθμοί!**)

Εφαπτομένη της Cf **παράλληλη στον x'x** σημαίνει **f '(xο)=0**.

Εφαπτομένη της Cf που **σχηματίζει γωνία 45ο** με τον x'x σημαίνει **f '(xο)=1**.

**π.χ.** Να βρείτε την εφαπτομένη της f(x)=x2+1 στο σημείο με τετμημένη 1.

**α**) xο=1

**β**) f(xο)=x 2+1, άρα f(1)=1+1=2. Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το Μ(1,2).

ο

**γ**) f '(x)=2x, Άρα λ=f '(1)=2.

**δ**) ε: y=λx+β και 2=2+β. Άρα β=0.

**ε**) Η εφαπτομένη είναι ε: **y=2x**.

# Εφαπτομένη απ΄την... ανάποδη.

Όταν μας ζητούν η εφαπτομένη να ικανοποιεί κάποια υπόθεση τότε ξεκινάμε από το σημείο

επαφής.

**π.χ.** Να βρείτε την εφαπτομένη της f(x)=x2 η οποία είναι παράλληλη στην y=2x+1821. (Τότε με

...τους Πέρσες!!)

Έστω Μ(xο,yο) το σημείο επαφής. Τότε

f '(x)=2x άρα λ=f '(xο)=2xο και λόγω παραλληλίας πρέπει 2xο=2 άρα xο=1. Το σημείο επαφής επομένως είναι Μ(1,1) κ.λ.π.

**π.χ.** Δίνεται η συνάρτηση f(x)=xlnx+2. Να βρείτε πότε η εφαπτομένη της γραφικής

παράστασης της f στο σημείο M(xo,f(xo)), να σχηματίζει με τον άξονα x′x οξεία γωνία.

Γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία y=λx+β σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ω τότε λ=εφω

ή

f '(xo)=λ.

Έχουμε: f '(x)=lnx+1, άρα λ=f '(xo)=lnxo+1.

Η γωνία θα είναι οξεία, αν εφω>0 ή

lnxo+1>0 ή lnxo>–1 ή lnxo>–1lne ή

lnxo>lne–1 άρα **xo>e–1**, (αφού η g(x)=lnx είναι αύξουσα)

**π.χ.** Δίνεται η συνάρτηση f(x)=αx2+βx+γ για την οποία ισχύουν:

1. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (0,3)
2. Η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1 σχηματίζει γωνία 45° και
3. Η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 2 σχηματίζει γωνία 135ο, να βρείτε:

**Α**) Τον τύπο της f.

**Β**) Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι παραπάνω εφαπτόμενες.

### Α) Θα κωδικοποιήσουμε τα δεδομένα με μαθηματικές εκφράσεις:

**α**) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (0,3) σημαίνει f(0)=3 ή

### f(0)=γ=3.

**β**) Η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1 σχηματίζει γωνία 45° σημαίνει

**f '(1)=1**(=εφ45ο) ή f '(x)=2αx+β άρα f '(1)=**2α+β=1**. (**1**)

**γ**) Η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 2 σχηματίζει γωνία 135ο σημαίνει

**f '(2)= –1**(=εφ135ο) ή **4α+β=–1** (**2**)

Η λύση του συστήματος των (**1**) και (**2**) δίνει **α= –1** και **β=3**. Επομένως ο τύπος της συνάρτησης είναι **f(x)=–x2+3x+3**.

**Β**) Για x=1 έχουμε f(1)=5, δηλαδή το σημείο Α(1,5). Η εφαπτομένη σ' αυτό εύκολα βρίσκουμε ότι είναι η είναι εΑ: **y=x+4**

Για x=2 έχουμε f(2)=5, δηλαδή το σημείο Α(2,5). Η εφαπτομένη σ' αυτό είναι εΒ: **y=–x+7.**

Οι δύο εφαπτόμενες τέμνονται στο σημείο που είναι λύση της εξίσωσης εΑ=εΒ

3

ή x+4=–x+7, οπότε x= .

2

**π.χ.** Δίνεται η συνάρτηση f(x)=αlnx–βx2 με α, βR. Να βρείτε τα α και β, ώστε η

εφαπτομένη

στο σημείο Α(1,1) της γραφικής παράστασης της f να είναι y=3x–2.

### Θα κωδικοποιήσουμε τα δεδομένα με μαθηματικές εκφράσεις:

1. Το σημείο Α ανήκει στην συνάρτηση. Άρα **f(1)=1**.
2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι το 3. Άρα **f '(1)=3**. Ζητάμε το α και το β. Χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις.

f(1)=1 σημαίνει αln1–β12 =1 ή **β= –1**.

1

f '(x)=α

x

–2βx, άρα α1–2(–1)1=3 ή **α=1**.

**π.χ.** ∆ίνεται η συνάρτηση f(x)=x2+αx+β με xR και α, βR.

**Β1**. Να βρεθεί το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που η

γραφική παράσταση τέμνει τον y'y σχηματίζει με τον x'x γωνία 45ο.

**Β2**. Αν α=1 και

lim f (x)  x =6, να βρεθεί το β. **ΠΕ**

### 2012

x1

x 1

**Β1**. Για x=0 έχουμε f(0)=β. Άρα η συνάρτηση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Α(0,β).

Η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45ο με τον άξονα x'x, αν λ=f '(0)=εφ45ο=1. f '(x)=2x+α ή

f '(x)=**α=1**. Άρα f(x)=x2+x+β.

**Β2**.

lim f (x)  x =6

x1

lim

x1

x 1

x2  x  x



x 1 6

lim

x1

x2  ( 1)x 

x 1

 6 , Ο αριθμητής έχει ρίζες 1 και β. Άρα

lim  6

( x 1)(x )

x 1

x1

Άρα –1+β=6, οπότε **β=7**.

**π.χ.** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = (ε) της

x

x2 1

1, xR. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης

γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45ο.

Έστω Μ(xo,f(xo)) το σημείο επαφής και (ε): y=λx+β η ζητούμενη εφαπτομένη. Πρέπει f '(xo)=εφ45ο=1 ή

1 x2

f '(xo)= (x2 1)2 =1 ή

x2(x2+3)=0, άρα **x=0**, οπότε το σημείο επαφής είναι το Μ(0,1).

Άρα η εφαπτομένη είναι (ε): y=1x+β και επειδή επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του Μ,

θα γίνει (ε): y=x+1

**π.χ.** Να δείξετε ότι η ε: y=–2x+1 εφάπτεται της συνάρτησης f(x)=4x2+2x+2. Ποιο είναι το σημείο επαφής;

1ος τρόπος: Για να εφάπτεται η ε στην συνάρτηση πρέπει να έχουν κοινό σημείο.

Τα κοινά σημεία δύο συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=g(x).

Άρα 4x2+2x+2= –2x+1 (**1**) 4x2+4x+1=0

(2x+1)2=0 άρα x=– 1

2

(\*)

1

To κοινό σημείο είναι το Α(–

2

,2)

1

Για να είναι σημείο επαφής πρέπει f '(–

2

Άρα η ε είναι εφαπτομένη της f.

)= –2 που ισχύει.

(\*) Επειδή η τιμή x=– 1

2

είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης (**1**) το Α είναι σημείο επαφής.

2oς τρόπος: Αν Μ(xο, f(xο)) είναι το σημείο επαφής πρέπει f '(xο)= –2.

8xο+2=–2, άρα xο=– 1

2

κ.λ.π.

**π.χ.** Για ποια τιμή του α η ευθεία (ε):y=x–4 είναι εφαπτομένη της f(x)=x2+3x+α, αR

Έστω Μ(xο,f(xο)) το σημείο επαφής. Για να είναι η (ε) εφαπτομένη της f πρέπει f '(xο)=1

όπου 1 ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Έχουμε: 2xο+3=1 άρα xο=–1.

Το σημείο επαφής θα το βρούμε από την ευθεία! Για x=–1 έχουμε y=–1–4=–5, και Μ(–1,–5)

Αντικαθιστούμε στην συνάρτηση και βρίσκουμε α=–3.

**π.χ.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=xlnx+k, x>0, όπου k ακέραιος με k>1 και την

εφαπτομένη (ε)

της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1,f(1)), η οποία σχηματίζει με τους άξονες

τρίγωνο εμβαδού E, με E<2. Να αποδείξετε ότι k=2.

**α**) Η εφαπτομένη στο Α(1,f(1)) είναι ε:y=λx+β ή ε:y=f '(1)x+β. f(1)=1ln1+k=k. Άρα Α(1,**k**), το οποίο ανήκει και στην συνάρτηση και στην

εφαπτομένη

f '(x)=lnx+x 1

x

=lnx+1. Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης είναι λ=f '(1)=ln1+1=**1**.

Επομένως η εφαπτομένη παίρνει την μορφή ε:y=**1**x+β.

Για x=1 έχουμε: **k**=1+β, άρα β=1–k και τελικά **ε:y=x+k–1**. (**2**)

**β**) Η εφαπτομένη ε τέμνει τους άξονες στα σημεία Β και Γ, τα οποία βρίσκουμε ως εξής:

Για x=0 η (**2**) δίνει y=0+k–1=k–1, άρα Β(0,k–1).

Για y=0 η (**2**) δίνει 0=x+k–1, ή x=1–k, άρα Γ(1–k,0).

To εμβαδόν του ΟΒΓ είναι (ΟΒΓ)=

OB O

2

<2 ή

k 1 1 k 2

 2 ή (k–1)2<4 ή k<3 και επειδή πρέπει k>1, άρα **k=2**.

χείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@y**

<http://blogs.sch.gr/iraidos/> **iraidos@g**

Σελίδα 9 από 17

Επιμέλεια αρ

**ahoo.gr**

### \_

**Κοινή εφαπτομένη**

Δύο συναρτήσεις f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο xο αν f(xο)=g(xο) και f '(xο)=g'(xο).

Στο σχήμα 1 βλέπετε την κοινή εφαπτομένη δύο συναρτήσεων.

Στο σχήμα 2 βλέπετε την κοινή εφαπτομένη στο **κοινό σημείο** των δύο συναρτήσεων.

**π.χ.** Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f(x)=2lnx–3x2 και g(x)=x2–6x+2 έχουν κοινή εφαπτομένη

στο σημείο με xo=1. Ποιος είναι ο τύπος της;

**α**) Θα δείξουμε ότι έχουν κοινό σημείο. f(1)=2ln1–312=**–3**

g(1)=12–61+2=**–3**. Άρα έχουν κοινό σημείο το **Α(1,–3)**

2

**β**) f '(x)=

x

–6x, άρα λ=f '(1)=2–6=**–4**.

g'(x)=2x–6, άρα λ=g'(1)=2–6=**–4**. Άρα έχουν κοινή εφαπτομένη την ε: **y=–4x+1**.

E-mails:**raidosi@yahoo.gr****iraidos@gmail.com**

**δ**) Κινείται προς τα δεξιά αν υ>0 και αριστερά αν υ<0. υ(t)=3t2–12t+9>0. Η αντίστοιχη εξίσωση 3t2–

12t+9=0

έχει ρίζες t=1 και t=3.

Οι μεταβολές της ταχύτητας φαίνονται στον πίνακα:

**ε**) Η μέση ταχύτητα στο διάστημα [1,3] είναι

**Δύο συναρτήσεις εφάπτονται** αν στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη.

**ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΙΝΗΤΟΥ (όχι...τηλεφώνου!!)**

**π.χ.** Η θέση ενός κινητού σε άξονα δίνεται από τον τύπο x(t)=t3–6t2+9t, όπου το x μετριέται σε

Όταν η συνάρτηση θέσης ενός κινητού είναι x(t) τότε:

**α**) Η στιγμιαία ταχύτητα είναι **υ(t)=x'(t). β**) Η επιτάχυνση είναι **α(t)=υ'(t)=x''(t).**

**γ**) Η μέση ταχύτητα του κινητού σε ένα διάστημα [t1,t2] είναι **υ= x(t2 ) - x(t1 ) .**

**t2 - t1**

m και το t σε sec. Να βρείτε:

**α**) Την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t=2 sec και t=4 sec.

**β**) Πότε το κινητό είναι... ακίνητο;

**γ**) Ποια είναι η επιτάχυνση, όταν είναι ακίνητο;

**δ**) Πότε κινείται προς τα δεξιά και πότε αριστερά;

**ε**) Ποια είναι η μέση ταχύτητα στο διάστημα [1,3].

Απαντήσεις

**α**) υ(t)=x'(t)=3t2–12t+9. Άρα υ(2)= **–3m/sec**. (κινείται προς τα αριστερά διότι –3<0).

**υ(4)=9m/sec**. (κινείται προς τα δεξιά διότι 9>0).

**β**) Όταν υ=0 δηλαδή 3t2–12t+9=0... t=1 ή t=3

**γ**) Η επιτάχυνση είναι α(t)=υ'(t)=x''(t)=6t–12. Άρα α(1)=–**6m/sec2** (επιβράδυνση)

α(3) = **6m/sec2** (επιτάχυνση) (Αφελής ερώτηση: Αφού είναι ακίνητο πώς έχει επιτάχυνση; Όταν το αυτοκίνητο φρενάρει εμείς δεν συνεχίζουμε να κινούμαστε προς τα εμπρός την στιγμή που σταματάει;)

~~~~  x(3)  x(1) **=–2m/sec.**

3 1

Δεξιά βλέπετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης x(t)=t3–6t2+9t με την διαφορά ότι έχουμε αλλάξει τους άξονες.

### ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

**Ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του y=f(x), όταν x=xο**, **ο αριθμός f '(xο).**

**π.χ.** Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f(x)=x3–6x2+9x όταν x=2.

Έχουμε f '(x)=3x2–12x+9. άρα f(2)=–3.

**π.χ.** Το βάρος Β(t) ενός μωρού σε kg μετά t μήνες δίνεται από τον τύπο

B(t)=10+0,2(t+3)2.

Να βρείτε τον ρυθμό ανάπτυξης ύστερα από 2 ή 8 μήνες.

Έχουμε B'(t)=0,4(t+3). Άρα Β'(2)=0,4(2+3)=2 kg ή Β'(8)=0,4(8+3)=4,4 kg.

**π.χ.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f(x)=

x lnx, x>0 ως προς x, όταν x=1.

3

Έχουμε: f '(x)=  x  'ln x  x (ln x) '  1 ln x x  1  1 ln x 1 **1**

 

. Άρα f(1)= .

  3 3 3 x 3 3 **3**

3

**π.χ.** Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις x2 και 6–x. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού

την στιγμή που είναι τετράγωνο.

Είναι τετράγωνο όταν x2=6–x, που έχει ρίζες x=2 και x= –3 (απορρίπτεται)

Μετατρέπουμε το εμβαδόν Ε=αβ σε συνάρτηση του x, δηλαδή Ε(x)=x2(6–x)=6x2–x3. Άρα Ε'(x)=12x–3x2 και Ε'(2)=24–12=12.

**π.χ.** Αν τo σημείο Δ βρίσκεται πάνω στην συνάρτηση f(x)= 1 .

x

**α**) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ συναρτήσει του x.

**β**) Να βρείτε τον ρ.μ. όταν x=2.

**α**) (ΑΒΓΔ)=(ΑΒ)(ΑΔ)=(100–x) 1 . Επειδή είναι συνάρτηση

x

του x, γράφουμε: Ε(x)=(100–x) 1

x

=100 1

x

–1.

**β**) Ο ρυθμός μεταβολής είναι Ε'(x)=100   1  και για x=2 έχουμε **Ε'(2)= –25**.

 x2 

 

**π.χ.** Σε σύστημα αξόνων Oxy δίνονται τα σημεία Α(0, 2ex) και Β(e2x+1, 0). Να βρείτε τον ρ.μ.

του εμβαδού του ΟΑΒ την στιγμή που είναι ισοσκελές.

Ζητάμε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου την στιγμή που είναι ισοσκελές, δηλαδή όταν (ΟΑ)=(ΟΒ) ή e2x+1=2ex ή

e2x–2ex +1=0 (εκθετική εξίσωση).

Θέτουμε ex=ω και λύνουμε την ω2–2ω+1=0, η οποία έχει μοναδική ρίζα το ω=1 ή ex=1, άρα **x=0**.

(OA)(OB) 2ex (e2x 1)

x 2x

(OAB)=

  e (e

2 2

1)

ή Ε(x)=e3x+ex. E'(x)=3e3x+ex, άρα Ε'(0)=3eo+eo=**4.**

 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

**α.** f(x) = 2x 3 + 3x 2 + x + 112

**β.** f(x) = x  lnx **γ.** f(x) = x 2 ∙ lnx

## **δ.** f(x) = 3  2ημx + συνx **ε.** f(x)  2 

x

3 x

**στ.** f(x) = x2 ∙ ημx + e x ∙ημx **ζ.**

## f(x) 

x2  α

ex

## , α

**η.** f(x) 

## xex x  1

* α2

, α

**θ.** f(x) 

x2

## x  1

**ι.** f(x)  2  1  3

x

x x2

**ια.**

f(x)  x  ln x

x2  1

**ιβ.** f(x) = 3∙ημx∙συνθ - 4x 2 , θ

**ιγ.**

2x)

f(x) 

x

ex  1

**ιδ.** f(x) = x∙(x 2 + 1)∙(x 3 

# ιε.

## f(x)  x2(x  1)

x2  1

**ιστ.**

f(x) 

x  ημx 1  εφx

1. Ομοίως:

**α.** f(x)  ex  1 ex  1

**β.** f(x) 

2x

## 1  2x

**γ.** f(x)  **δ.** f(x) 

ln(x2  e)

εφx

## **ε.** f(x)  x2 συν 1

x

f(x)  1 ημ3x  1 συν2x

**στ.**

## 3 2

**ζ.** f(x) = ημ( συν2x ) **η.** f(x) = ln( lnx )

 ex  1 

**θ.** f(x) = ημ2x  συν(2x + 3) **ι.** f(x)  ln





**ια.**

f(x) 

1 (ex  ex ) 2

**ιβ.**

 x 

1

## f(x)  xex

**ιγ.**

f(x) 

ημx

## 1  συνx

1. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων:

f(x) = x3 ∙ lnx και g(x) = ln( ημx )

1. Να αποδείξετε ότι:

**α.** Αν

## f(x)  ημx

x

τότε : xf ΄΄(x) + 2f ΄(x) + xf(x) = 0 .

**β.** Αν f(x) = ex ∙ ημx τότε : f΄΄(x)  2f΄(x) + 2f(x) = 0 .

**γ.** Αν

## f(x)  2xex2

τότε :

f (x)  f (x)  4ex2

2x

 0 .

1. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο και ισχύει:

1 

f(x)

1  1 g(x) ex

, x

να αποδείξετε ότι : f 2(x)∙( g΄(x)  g(x) ) = g2 (x)∙( f΄(x)  f(x) ) .

1. Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται

συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο s(t) = 3t 2  t . Να βρείτε:

**α.** τη μέση ταχύτητα του κινητού στο [2, 4] .

**β.** τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 3 .

1. Αν

f(x)  eλ2 x

## , να υπολογιστεί ο λ ώστε :

f΄΄(x)  3f΄(x) + f΄(0)f(x)  8f(x) = 0

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = e 2x . Να αποδείξετε ότι, για κάθε x

:

2f΄(x)  f΄΄(x) = 0

1. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) δευτέρου βαθμού τέτοιο, ώστε να

είναι Ρ(0) = 1 , Ρ(1) = 6 και Ρ΄(0) = 3 .

1. Ένας πληθυσμός μικροβίων Ρ μεταβάλλεται συναρτήσει του

χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο P(t) = 10 3  5∙10 2 (1 + t) 1 .

**α.** Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των μικροβίων.

**β.** Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων μετά από 9 ώρες.

**γ.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων, ως προς το χρόνο, μετά από 9 ώρες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = e αx , α . Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε να ισχύει η σχέση : f΄΄(x) + 2f΄(x) = 3f(x) , για κάθε x .
2. Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται

συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο s(t) = 3t2  t . Να βρείτε:

**α.** τη μέση ταχύτητα του κινητού στο [2, 4] .

**β.** τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού όταν t = 3 .

1. Έστω η συνάρτηση f(x) = e 2x + e 2x , x .

**α.** Να αποδείξετε ότι : f΄΄(x) = 4f(x) .

**β.** Να λύσετε την εξίσωση

f(x)  1 f (x)  2ex2 .

2

 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

1. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα x΄x όταν :

**α** f(x) = x 2  6x + 1 **β.**

## f(x)  ex

f(x) 

x ln x

**γ.**

x

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης:

**α.** f(x) 

ημx

## x  xσυνx

στο σημείο της με x0 = π .

**β.** f(x)  ln x x

στο σημείο της με τετμημένη 1 .

**γ.** f(x) = x 3  1 στο σημείο της με τεταγμένη 7 .

**δ.** f(θ) = συνθ∙σφθ στο σημείο της με θ = π/2 .

1. Αν g(x) = x 2 + αx  βln(x + 1) , x > 1 , τότε να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της g να έχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα των x, στα σημεία με τετμημένες x = 0 , x

= 1,5 .

1. Έστω η συνάρτηση

f(x)  1 x3  x2  2x  1

3

, x . Να βρείτε τις

εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλες στην ευθεία y = x + 3 .

1. Έστω η συνάρτηση f(x) = x 2 + 3x  1 , x . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της καμπύλης της f, που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 1350 .
2. Δίνεται η f(x) = x2 ∙ lnx . Να βρείτε:

**α.** τη γωνία, που σχηματίζει η εφαπτόμενη (ε) της Cf στο σημείο της Α ( 1, f(1) ) , με τον άξονα x΄x.

**β.** το σημείο, όπου η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον x΄x.

**γ.** την εξίσωση της εφαπτόμενης στο x0 = 2 .

1. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = α(x + 1) 2 , όπου x, α  . Να βρείτε:

**α.** το α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης της καμπύλης της f στο Α ( 1, f(1) ) να είναι 4 .

**β.** την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

x  1

1. Δίνεται η συνάρτηση f με Να βρείτε:

f(x)  αex β

, όπου x, α, β  .

**α.** τα α, β, ώστε η εφαπτόμενη της καμπύλης της f στο σημείο (0, 1) να είναι παράλληλη στην y = 2x  1 .

**β.** την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

1. Έστω η συνάρτηση f(x) = x 3  3x 2 + 3x  10 .

**α.** Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με το ρυθμό μεταβολής της παραγώγους f ΄ στα σημεία αυτά.

**β.** Στο σημείο του ερωτήματος (α) με τη μικρότερη τετμημένη να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = 2x 2  αx + β , όπου α, β  . Να

υπολογίσετε τα α, β, ώστε η y = 3x  1 να εφάπτεται στη γραφικής παράσταση της f, στο σημείο της με τετμημένη 2 .

1. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης Cf

της f με

f(x)  x  4

x  2

στα σημεία, που τέμνει τους άξονες, είναι

παράλληλες.

1. Έστω η συνάρτηση f(x) = αx 3 + βx 2 + 9x  12 . Να προσδιορίσετε τα α, β  , ώστε το σημείο Α ( 2, 10 ) να ανήκει στη γραφική παράσταση Cf της f και η εφαπτόμενη της Cf στο Α να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό 3 .
2. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο και είναι

f(ημx) = e x ∙ συνx , για κάθε x  [0, π) . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης της Cf στο ( 0, f(0) ) σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

1. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο και είναι

f(1) = 2f ΄(1) = e . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στη γραφική παράσταση τη g(x) = f( lnx ) στο x0 = e .

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

f: (0, +)  με f(x 2 + 4x) = x3 + lnx .

Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α ( 5, f(5) ).

1. Έστω η f(x) = ln( x 2 + 1 ) 2 + αx + β . Να βρεθούν οι τιμές των α,

β, ώστε η y = 21x + 35 να είναι εφαπτόμενη της Cf στο x0 = 0 .

1. Δίνονται τα σημεία Α ( lnx, 0 ) και Β ( 0, e x ) , x > 0 . Αν η f(x)

εκφράζει την απόσταση των σημείων Α και Β, τότε να βρείτε:

**α.** τη συνάρτηση f ΄(x) .

**β.** την εφαπτόμενη της Cf στο σημείο Μ ( 1, f(1) ) .