|  |  |
| --- | --- |
| ***mainlogo_16_7_2019*** *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ* ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ  **1ο ΕΠΑ.Λ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ**  | **ΦYΛΛA ΕΡΓΑΣΙΑΣ** **ΣΤΑ** **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** **ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ** |

|  |  |
| --- | --- |
| ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ | Νο 3 |
| Τάξη : B΄ ΛυκείουΜάθημα : Γεωμετρία Β΄ΛυκείουΚεφάλαιο : 7οΔιδακτική ενότητα : 1ηΗμερομηνία : 08-12-2020Διδάσκων καθηγητής : Ηλίας Ράιδος |

### ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

* **ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ**
*  **Βασικά θεωρήματα**
* Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

#### *(αντίστροφο Θεωρήματος Θαλή)*

Θεωρούμε δύο ευθείες δ1 και δ2 που τέμνουν

δύο παράλληλες ευθείες ε1 και ε2 στα σημεία Α,

Β και Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Γ και Η είναι σημεία των ευθειών δ1 και δ2 αντίστοιχα τέτοια ώστε

   , τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη

 

προς τις ε1 και ε2.

* Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.
* Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.
	+ *Ορισμός*:

Δύο σημεία Γ και Δ που είναι συνευθειακά με τα Α και Β και διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο λέγονται ***συζυγή αρμονικά*** των Α και Β. Δηλαδή

ισχύει:   

 



**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΘΑΛΗ**

Οι ασκήσεις που στηρίζονται στο θεώρημα του Θαλή χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

Α) Σε αυτές που μας ζητείται να υπολογίσουμε κάποιο λόγο ή να δείξουμε ότι ισχύει

κάποια αναλογία (ή κάποια σχέση της μορφής α.δ=β.γ που γίνεται αναλογία

**  ** ).

** **

Τότε ξεκινούμε από το ζητούμενο λόγο ή από τα μέλη της ζητούμενης αναλογίας και προσπαθούμε με βάση τις παραλληλίες που ισχύουν από την υπόθεση να γράψουμε αυτούς τους λόγους με άλλους ίσους χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των αναλογιών.

Β) Σε αυτές που μας ζητείται να δείξουμε κάποια παραλληλία. Τότε μα βάση το θεώρημα του Θαλή που ισχύει και αντιστρόφως προσπαθούμε να βρούμε την αναλογία που θα πρέπει να ισχύει ώστε τα τμήματα να είναι παράλληλα. Στην συνέχεια όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δείχνουμε ότι ισχύει η αναλογία.

Γ) Όταν μα ζητείται να δείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα και στην υπόθεση της άσκησης αναφέρονται μόνο παραλληλίες, τότε προσπαθούμε να φτιάξουμε δύο λόγους οι οποίοι να έχουν στους αριθμητές τα ζητούμενα ενώ σαν παρανομαστή να έχουν το ίδιο τμήμα. Αν δείξουμε με βάση τα προηγούμενα ότι οι λόγοι είναι ίσοι τότε και τα ζητούμενα ευθύγραμμα τμήματα θα είναι ίσα.

Όταν στις ασκήσεις δεν αναφέρονται παράλληλες αλλά ζητείται η απόδειξη κάποιας αναλογίας τότε θα πρέπει από κάποιο σημείο να φέρουμε μια παράλληλη η οποία μας βοηθάει να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Θαλή και για τους δύο λόγους της αναλογίας.

**Α ΟΜΑΔΑ**

#  *ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

1. Από τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΒ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε την ΕΖ//ΒΔ (ΖΑΔ) και ΕΗ//ΒΓ (ΗΑΓ). Δείξτε ότι ΖΗ//ΓΔ.
2. Αν μια παράλληλη προς τη διάμεσο ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:     
3. Μια ευθεία διέρχεται από την κορυφή Α ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και τέμνει τις ευθείες ΒΔ, ΓΔ και ΒΓ στα σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ είναι η μέση ανάλογος των τμημάτων ΕΖ και ΕΗ.
4. Μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν η παράλληλη από το Γ προς τη ΒΕ τέμνει την ΑΒ σε σημείο Ζ, να δειχθεί ότι το ΑΒ είναι μέσο ανάλογο των ΑΔ και ΑΖ
5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του φέρνουμε παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΔ που τέμνουν τις ΓΒ και ΓΔ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι ΜΝ//ΔΒ.
6. Στη διαγώνιο ΒΔ παρ/μου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Ρ, ώστε να είναι

  1 . Αν

η ΓΡ τέμνει την ΑΔ στο Ε, να δειχθεί ότι

  1  .

5

 4

1. Δύο ευθείες ε1 και ε2 τέμνονται από τις παράλληλες ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ έτσι ώστε οι διαγώνιοι ΒΓ, ΔΕ και ΖΗ να είναι παράλληλες. Δείξτε ότι ΔΖ2=ΒΔ.ΖΘ
2. Δίνεται γωνία

*xO*ˆ*y* και δύο τυχαία σημεία Α και Β στην Οx. Φέρνουμε από τα Α

και Β παράλληλες ευθείες που τέμνουν την Οψ στα σημεία Γ και Δ. Φέρνουμε την ΒΓ και από το Δ την ΔΕ//ΒΓ. Να δειχθεί ότι ΟΒ2=ΟΑ.ΟΕ

**Β ΟΜΑΔΑ**

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από το σημείο Δ φέρνουμε κάθετα τμήματα ΔΜ και ΔΝ προς τις ΓΖ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΜΝ//ΖΕ.
2. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Από τυχαίο σημείο Κ της πλευράς ΑΒ φέρνουμε την ΚΛ//ΑΔ (ΛΒΔ), ΛΜ//ΒΓ (ΜΓΔ) και την ΜΝ//ΑΔ (ΝΑΓ). Δείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι παρ/μμο.
3. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι τα κέντρα βάρους των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ ορίζουν ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ.
4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με βάσεις ΑΒ=5 και ΓΔ=15 και ευθεία ε που τέμνει τις μη παράλληλες πλευρές των ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν Ο είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΔ και ΒΓ και ΑΕ=2. ΕΔ=4, ΒΖ=4, ΖΓ=8.
5. Να δείξετε ότι ΕΖ//ΑΒ // ΓΔ
6. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ
7. Να υπολογίσετε το ΕΖ
8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=12, διάμεσο ΑΜ και βαρύκεντρο Θ. Από το Θ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ.
	1. Να υπολογίσετε τα ΔΑ και ΔΒ
	2. Αν ΘΔ=6 να υπολογίσετε τη ΒΓ
9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε τυχαία ευθεία που

τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Να δειχθεί ότι

   .

 

1. Δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Από το Α φέρνουμε δυο ευθείες που

τέμνουν τους κύκλους στα σημεία Β΄,Β και Γ΄,Γ. Να δείξετε ότι



*΄*

  .

*΄*

1. Από το σημείο τομής Ρ των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε παράλληλες προς τις ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΑΔ που τέμνουν τις ΒΓ,ΑΒ,ΑΔ,ΔΓ στα σημεία Λ,Κ,Ν,Μ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι το ΚΛΜΝ είναι τραπέζιο.
2. Από την κορυφή Α παρ/μου ΑΒΓΔ φέρνουμε ευθεία ε που τέμνει τις ΒΔ, ΒΓ και

1

ΓΔ στα Ε, Ζ και Θ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

1 1

 



  .

1. Από την κορυφή Γ παρ/μου ΑΒΓΔ φέρνουμε ευθεία εκτός αυτού που τέμνει την

ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι

  

 1 .

 

**Γ ΟΜΑΔΑ**

1. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ και από τις κορυφές του Α και Γ φέρνουμε δύο παράλληλες ευθείες που τέμνουν τις ευθείες των μη παράλληλων πλευρών ΓΔ και ΑΒ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι ΔΖ//ΒΕ.
2. Δίνεται γωνία

*xO*ˆ*y*  1200

και στις πλευρές της Οx, Oy παίρνουμε τα τμήματα

ΟΑ=α και ΟΒ=β. Αν η διχοτόμος ΟΖ της γωνία

*xO*ˆ*y*  1200

τέμνει την ΑΒ στο Γ

και θέσουμε ΟΓ=γ να δειχθεί ότι:

1  1  1 .

** ** **

1. Από το κέντρο βάρους Κ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τυχαία ευθεία ε που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι: ΑΒ.ΑΜ+ΑΓ.ΑΛ=3ΑΛ.ΑΜ.
2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά μήκος ΓΕ=ΒΔ.Η ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο Μ. Να δείξετε ότι    .

 

##  ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ

#### *(Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου)*

Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή αν ΑΔ διχοτόμος του

τριγώνου ΑΒΓ τότε   

 

#### *(Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου)*

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή αν ΑΕ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ

τότε   

 

 ***ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ***

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ΑΓ=2ΑΒ. Τότε ισχύει ότι:

Α. ΒΔ= 1 

2

Δ. ΒΔ= 1 **

2

Β. ΒΔ= 1 

3

Ε. ΒΔ> 1 

2

Γ. ΒΔ> 1 

2

1. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τη διχοτόμο ΑΔ και τη διχοτόμο ΒΕ του τριγώνου ΑΒΔ.

Ο λόγος

 είναι ίσος



Α. *a* Β.

**  **

Δ. *a* Ε.

*a*  **  **

**  **

*a*

*a* **

*a*  **  **

Γ. *a*  **

**  **

1. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε είναι

         

Σωστό Λάθος

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχω β=8 και γ=4. Φέρνουμε τη διχοτόμο της τμήμα ΒΔ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές του διαστήματος

Α. (2,4) Β. [2,4] Γ.  4 ,4 

ˆ . Τότε το

 

3

 

Δ. (1,2) Ε.  3 , 8 

 

 

4

3

**Α ΟΜΑΔΑ**

#  *ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

* 1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=10, ΒΓ=11 και ΑΓ=12. Αν η εξωτερική και

εσωτερική διχοτόμος της γωνίας

ˆ τέμνουν τον φορέα της πλευράς ΒΓ στα

σημεία Ε και Δ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΕ**.**

*(απ. ΔΕ=60)*

* 1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΒΔ. Η διχοτόμος της γωνίας

ˆ

τέμνει την ΑΒ στο Ε. Από το Ε φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι η ΔΖ είναι η διχοτόμος της γωνίας

ˆ .

* 1. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΕ είναι οι εσωτερικές διχοτόμοι του και ΑΔ΄, ΒΕ΄, ΓΕ΄ είναι οι εξωτερικές διχοτόμοι του, να αποδείξετε ότι:

α) ΔΒ.ΕΓ.ΖΑ = ΔΓ.ΕΑ.ΖΒ

β) Δ΄Β.Ε΄Γ.Ζ΄Α = Δ΄Γ.Ε΄Α.Ζ΄Β

* 1. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει την ΑΔ διχοτόμο και το Ι έκκεντρο. Να υπολογιστεί ο

λόγος ΙΔ

ΙΑ

συναρτήσει των α, β, γ.

* 1. Οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνουν τη διαγώνιο στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι ΕΖ // ΑΒ.

**Β ΟΜΑΔΑ**

* 1. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας

ˆ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι    .

 

* 1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με

ˆ  135*o* . Κατασκευάζουμε στο

εσωτερικό του τριγώνου τις γωνίες

ˆ *x*  ˆ *y*  45*o* των οποίων οι πλευρές Αx

και Αy τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

1. Να δείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ
2. Να δείξετε ότι ΒΔ2=ΒΓ·ΔΕ
	1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα Δ, Ε μέσα των πλευρών του ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΖ=ΑΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας

ˆ τέμνει τη διάμεσο ΑΔ στο σημείο Κ, να δείξετε ότι ΒΚ//ΖΔ.

* 1. Έστω ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ και Κ, Θ και Λ τα σημεία όπου οι ΑΔ, ΒΕ και ΖΓ τέμνουν τις ΖΕ, ΔΖ και ΕΔ αντίστοιχα.

α) Να βρεθεί ο λόγος

 από τις πλευρές α, β γ του τριγώνου ΑΒΓ



β) Να αποδειχθεί ότι           .

* 1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι του. Αν η ΖΕ τέμνει

την ΑΔ στο Ρ να δείξετε ότι

    

 

  

* 1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ο κύκλος (Ο) που εφάπτεται στις ίσες πλευρές στα σημεία Β και Γ. Η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Ε και την ΒΓ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι Δ και Ε είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα Α και Ζ.
	2. Από ένα σημείο Α κύκλου (Ο, R) φέρνουμε τις χορδές ΑΓ, ΑΒ και τη διάμετρο ΚΛ  ΒΓ. Αν Μ, Ν είναι αντιστοίχως οι τομές των ΑΓ και ΑΒ με την ΚΛ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ και Ν είναι συζυγή αρμονικά των Κ και Λ.
	3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Ι και είναι ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕI IΓ

= ΔI IΒ

β) Οι αποστάσεις των Ε και Δ από τη ΒΓ είναι ίσες γ) ΑΒ = ΑΓ

* 1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ γράφουμε την εσωτερική διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α και την εξωτερική διχοτόμο ΑΕ της γωνίας Α. Να βρεθεί το μήκος ΔΖ συναρτήσει των α, β και γ.
	2. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα μέσα Μ και Ν των βάσεων ΑΒ και ΓΔ. Αν οι διαγώνιοι τέμνονται στο Ε και οι μη παράλληλες πλευρές στο Ζ, να δείξετε ότι τα Μ και Ν είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα Ε και Ζ.
	3. Αν Ι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ να

δείξετε ότι           

**Γ ΟΜΑΔΑ**

* 1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας  . Αν ΔΕ

παράλληλη με την ΑΒ να δείξετε ότι

1 1  1

*AB A* *A*



* 1. Θεωρούμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Ι.

α) Να αποδείξετε ότι: IA

IΔ

+ IB IE

+ IΓ IΖ

= β + γ α

+ γ + α

β

+ α + β .

γ

β) Χρησιμοποιώντας την πρόταση: “το άθροισμα δύο αντιστρόφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2” και το ερώτημα (α), να αποδείξετε ότι:

IA + IB

IΔ IE

+ IΓ IΖ

 6.

γ) Να αποδείξετε ότι: ΙΑ + ΙΒ + ΙΓ  6ρ, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

* 1. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ρ και την ΑΓ στο Ν.

Να αποδειχθεί ότι ΓΝ=ΒΡ= -1   

 2

* 1. Σε ευθεία θεωρούμε τα σημεία Ρ, Α και Β έτσι ώστε ΡΑ=ΡΒ, και κύκλο (Ο,R) που διέρχεται απ΄ τα Α και Β. Αν ΡΓ η εφαπτόμενη του (Ο,R) και η διχοτόμος της γωνίας ΑΡΓ τέμνει ΓΑ και ΓΒ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΒ=2ΔΑ
	2. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

** 2  ** 2  **

τότε θα ισχύει

Bˆ  2Γˆ .

* 1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=10 και ΑΓ=14 φέρνουμε τη διχοτόμο της ΑΔ της γωνίας Α. Να δειχθεί

 α)   2    

  

 β) ΑΔ<12