|  |  |
| --- | --- |
|  ***mainlogo_16_7_2019*** *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ* ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ  **1ο ΕΠΑ.Λ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ**  | **6.5-6.6****Εγγεγραμμένο τετράπλευρο****Εγγράψιμο τετράπλευρο** |

Το

25Ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

* ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
* ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
* ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ §§ 6.5-6.6**

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Μάθημα: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τίτλος μαθήματος( ενότητας): ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ- ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

 ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ-ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Ημερομηνία: 20-10-2020

Τάξη: Β΄ Λυκείου Σχολείο: 1ο ΕΠΑ.Λ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

Ώρα: 1η

Τμήμα: A ( 23 μαθητές)

***ΓΕΝΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ***

Να μπορούν οι μαθητές στο τέλος του μαθήματος να

* Γνωρίζουν τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων.
* Γνωρίζουν τις ιδιότητες των περιγεγραμμένων τετραπλεύρων

Να είναι ικανοί να αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο ή περιγράψιμο χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες.

***ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ***

Να είναι σε θέση στο τέλος του μαθήματος οι μαθητές να

1. Υπολογίζουν τις γωνίες τετραπλεύρου
2. Υπολογίζουν τις πλευρές τετραπλεύρου

ΜΕΣΑ: Πίνακας, κιμωλίες ή μαρκαδόροι, Η/Υ , φωτοτυπίες.

ΥΛΙΚΑ: CD, σλάιντς, σχολικό βιβλίο .

 ΥΛΗ: Σχολικό βιβλίο – σελίδες 83- 88.

Κριτήρια Υπουργείου.

ΜΕΘΟΔΟΣ: Διερευνητική καθοδηγούμενη ανακάλυψη.

Α. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ - ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΠΟΡΕΙΑ

Με κατάλληλες ερωτήσεις ερευνούμε αν οι μαθητές κατέχουν την ύλη του προηγούμενου φύλλου εργασίας.

Ζητείται από τους μαθητές η θεωρία με ερωτήσεις από τον διδάσκοντα, ελέγχεται αν έγινε η εργασία για το σπίτι στα τετράδια τους ( ανάπτυξη των θεμάτων του προηγούμενου φύλλου εργασίας ) και ελέγχεται αξιολογούνται ανάλογα.

Β. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΥΛΙΚΟΥ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ-ΑΝΑΛΥΣΗ

 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ ( Παράδοση)

ΤΟ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Ζητείται από τους μαθητές

* Γνωρίζετε τον ορισμό του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου;
* Γνωρίζετε τον ορισμό του περιγεγραμμένου κύκλου;
* Σχεδιάστε ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο.

**Α . . Β**

 **. Γ**

**Δ .**

Βρείτε τις ισότητες ,  και μέτρο του τόξου  και  με το μέτρο του τόξου .

Ποιο είναι το άθροισμα των παραπάνω γωνιών;

 Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών  + ;

**Συμπέρασμα - Ι1:**

* Σχεδιάστε ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο.
* Φέρτε τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ.

 **Α . . Β**

 **. Γ**

 **Δ .**

**Στην πλευρά ΓΔ ποιές εγγεγραμμένες γωνίες βαίνουν ;**

**Συμπέρασμα – Ι2:**

Συγκρίνετε την εξωτερική γωνία  του τετραπλεύρου με την γωνία του τετραπλεύρου. Τι συμπεραίνετε;

**Συμπέρασμα – Ι3:**

Ζητείται από τους μαθητές

* Γνωρίζετε τον ορισμό του εγγράψιμου τετραπλεύρου;

**Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο Εγγράψιμο ή 4 σημεία ομοκυκλικά.**

Κ1:

Κ2:

Κ3:

Ζητείται από τους μαθητές

* Γνωρίζετε τον ορισμό του περιγεγραμμένου τετραπλεύρου;
* Γνωρίζετε τον ορισμό του εγγεγραμμένου κύκλου;
* Σχεδιάστε ένα περιγεγραμμένο τετράπλευρο .



Τι συμπεραίνετε για τις διχοτόμους των γωνιών του τετραπλεύρου;

**Συμπέρασμα – Ι4:**

Τι συμπεραίνετε για τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του;

**Συμπέρασμα – Ι2:**

**Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο Περιγράψιμο .**

Κ1:

Κ2:

AΚΟΛΟΥΘΟΥΝ:

ΟΙ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

Εγγράψιμα και περιγράψιμα τετράπλευρα

**Ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»**

**Σωστό Λάθος**

1. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι
παραλληλόγραμμο. o o
2. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι
ορθογώνιο. o o
3. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν είναι
ορθογώνιο. o o
4. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι
ρόμβος. o o
5. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν είναι

τραπέζιο. o o

1. Αν η διάμεσος ενός τραπεζίου το χωρίζει σε δύο
εγγράψιμα τραπέζια τότε το αρχικό τραπέζιο είναι
εγγράψιμο. o o
2. Υπάρχουν τετράπλευρα που είναι συγχρόνως εγγράψιμα
και περιγράψιμα σε κύκλο. o o
3. Κάθε παραλληλόγραμμο που είναι εγγράψιμο σε κύκλο
είναι τετράγωνο. o o
4. Κάθε παραλληλόγραμμο που είναι περιγράψιμο σε κύκλο
είναι τετράγωνο. o o
5. Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε οι
μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται απ’ το ίδιο
σημείο. o o
6. Αν ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο τότε οι διαγώνιές
του τέμνονται κάθετα. o o
7. Αν ένα τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε η
διάμεσός του τριχοτομείται από τις διαγώνιές του. o o
8. Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο τότε οι
διαγώνιές του διέρχονται από το κέντρο του κύκλου. o o

**Ερώτηση συμπλήρωσης**

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, θέτοντας κατάλληλα σε κάθε τετραγωνάκι των στηλών (Β) και (Γ) μια απ’ τις λέξεις: *πάντα, όχι πάντα, ποτέ.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **στήλη (Α)****τετράπλευρο** | **στήλη (Β)****το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο** | **στήλη (Γ)****το τετράπλευρο είναι περιγράψιμο** |
| παραλληλόγραμμο |  |  |
| ορθογώνιο |  |  |
| τετράγωνο |  |  |
| ρόμβος |  |  |
| ισοσκελές τραπέζιο |  |  |

**Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

1. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο σε κύκλο και έχει διάμεσο ίση με α. Η περίμετρός του ισούται με:

**Α.** 3α **Β.** 4α **Γ.** 5α **Δ.** 6α **Ε.** 7α

**2.** Κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι σε κύκλο:

**Α.** εγγράψιμο και όχι περιγράψιμο

**Β.** περιγράψιμο και όχι εγγράψιμο

**Γ.** ούτε εγγράψιμο, ούτε περιγράψιμο

**Δ.** εγγράψιμο και συγχρόνως περιγράψιμο

**Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

|  |  |
| --- | --- |
| **3.** Στο διπλανό σχήμα είναι τόξο ΑΔ = 80° και τόξο ΓΔ = 50°. Η γωνία ΑΔx ισούται με: **Α.** 80° **Β.** 90° **Γ.** 105° **Δ.** 115° **Ε.** 130° |  |

1. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και η Α γωνία του είναι τετραπλάσια της Γ. Η γωνία Α ισούται με:

**Α.** 36° **Β.** 45° **Γ.** 72° **Δ.** 90° **Ε.** 144°

|  |  |
| --- | --- |
| **5.** Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι 25 cm και ΑΔ = 8 cm. Το μήκος της ΒΓ σε cm είναι: **Α.**  **Β.** 6 **Γ.** 5,5  **Δ.** 5 **Ε.** 4,5 |  |

1. Ένα οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία Β και Γ κόβονται στο Δ. Είναι ΑΒΓ = ΒΓΑ = 2Δ και x το μέτρο της Α σε ακτίνια. Η x ισούται με:

**Α.**  π **Β.**  π **Γ.**  π **Δ.**  π **Ε.**  π

*(Δόθηκε σε διαγωνισμό ΕΜΕ - Θαλής 1992)*

**Θέματα συνδυασμού ερωτήσεων ανάπτυξης και πολλαπλής επιλογής**

1. Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία Α, Β. Μια ευθεία παράλληλη της ΚΛ που διέρχεται από το Α τέμνει τους κύκλους στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

α) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή:

**Α.** ΚΛ = R + ρ **Β.** ΚΛ = R - ρ **Γ.** ΚΛ < R - ρ

**Δ.** ΚΛ < R + ρ **Ε.** ΚΛ > R + ρ

β) Αποδείξτε ότι: ΓΔ = 2ΚΛ.

1. Θεωρούμε κύκλο (Ο, R), διάμετρο ΑΒ και την ακτίνα ΟΓ  ΑΒ. Έστω Μ το μέσο της ακτίνας ΟΒ και Δ το σημείο που η ΓΜ τέμνει τον κύκλο. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει την ευθεία ΟΒ στο σημείο Ε,

α) Η γωνία ΓΔΕ είναι ίση με την:

**Α.** ΓΟΔ **Β.** ΓΜΒ **Γ.**  **Δ.**  **Ε.** ΓΟΜ

β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΕΜΔ είναι ισοσκελές.

1. Δύο κύκλοι (Κ, 3ρ), (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά. Αν Α Α΄ είναι κοινό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων:

α) Αποδείξτε ότι οι κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες σχηματίζουν γωνία 60°.

β) Η γωνία που σχηματίζουν η ΚΛ και η ακτίνα ΚΑ, όπου Α σημείο του κύκλου (Κ, 3ρ) είναι:

**Α.** 30° **Β.** 45° **Γ.** 60° **Δ.** 90° **Ε.** 100°

γ) Να υπολογίσετε το ΑΑ΄ συναρτήσει του ρ.

**Ερωτήσεις ανάπτυξης**

1. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζεται με κορυφές τα σημεία τομής των διχοτόμων ενός τετραπλεύρου είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

**2.** Να αποδείξετε ότι:

α) Τέσσερις εφαπτόμενες ευθείες ενός κύκλου, παράλληλες ανά δύο, σχηματίζουν ένα ρόμβο περιγεγραμμένο στον κύκλο.

β) Το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο είναι ορθογώνιο.

1. Από το μέσο Γ ενός τόξου ΑΒ κύκλου με κέντρο Ο γράφουμε δύο χορδές ΓΔ και ΓΕ που τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα σημεία Ζ και Η. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΖΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
2. Από σημείο Ρ του ύψους ΑΔ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΡΕΑΒ και ΡΖΑΓ.

α) Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία της στήλης (Α) με την ίση γωνία της στήλης (Β).

|  |  |
| --- | --- |
| **Στήλη (Α)** | **στήλη (Β)** |
| ΑΖΕΑΡΖΡΕΖ | ΑΓΔΑΡΕΕΑΡΑΕΖΡΑΖ |

β) Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο.

γ) Τα εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος σε αριθμό είναι:

**Α.** 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 5 **Ε.** 6

1. Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ . ΑΓ = ΑΔ . ΑΕ

β) ΕΒ2 = ΕΑ . ΕΔ

1. Στα άκρα της χορδής ΑΒ ενός κύκλου φέρνουμε τις κάθετες χορδές του κύκλου. Να αποδείξετε ότι οι χορδές αυτές είναι απέναντι πλευρές ενός ορθογωνίου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) περιγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Αν Ε, Δ, Θ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ με τον κύκλο και η διακεντρική ευθεία από το Α κόβει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Δ, να δείξετε ότι η γωνία ΑΒΓ ισούται με τη γωνία ΑΟΘ.
3. Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ που έχει ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ και Β = Γ = Δ. Να αποδείξετε ότι το πεντάγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
4. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι:

α) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ και ΓΕΔ είναι ίσοι.

β) Οι τρεις παραπάνω κύκλοι του ερωτήματος (α) διέρχονται από το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

1. Δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Ο΄ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α γράφουμε τυχαία ευθεία που κόβει τον κύκλο Ο στο Γ και τον Ο΄ στο Δ. Από το Β γράφουμε άλλη τυχαία ευθεία που κόβει τον κύκλο Ο στο Ε και τον Ο΄ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΕΓ // ΖΔ.
2. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει Α = 90° και Β = 30°, το ΑΗ ύψος και την ΑΜ διάμεσο. Από το σημείο Β φέρνουμε τη ΒΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) ΒΕ = ΕΗ = ΑΗ

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΚΛΕΙΣΙΜΑΤΟΣ**

Σε χρόνο 2-3 λεπτών λέμε έναν αστείο συνειρμό ή σχολιάζουμε μια επίκαιρη ευχάριστη είδηση.

**ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ**

Όσες ασκήσεις από το φυλλάδιο δεν έγιναν στην τάξη.

* ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

**16**. Δίνεται κύκλος (Ο,R) με διάμετρο ΑΒ και δυο ευθείες ε1, ε2 εφαπτόμενες του κύκλου στα

 άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σε ένα σημείο

 του Ε και τέμνει τις ε1 και ε2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

 **α**) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

 **i**. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

 **ii**. ΓΔ=ΑΔ+ΒΓ.

 **β**) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο

 ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του

 ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

**17**. Έστω ότι ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα Α, Δ και Β.

 **α**) Να αποδείξετε ότι:

 **i**. ΡΓ=ΓΔ+ΑΡ.

 **ii**. ΡΓ−ΓΔ=ΡΕ−ΔΕ.

 **β**) Αν ΑΓ=ΒΕ, να αποδείξετε ότι

 **i**. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

 **ii**. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά.

**18**. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε τα

 εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ.

 Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

 Να αποδείξετε ότι:

 **α**) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές.

 **β**) ΓΑ= ΔΒ.

 **γ**) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ+ΡΒ.

**19**. Από σημείο Μ εξωτερικό κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ του

 κύκλου. Αν Γ είναι το συμμετρικό σημείο του κέντρου Ο ως προς την ΜΒ, να αποδείξετε

 ότι:

 **α**) ΜΑ=ΜΒ=ΜΓ

 **β**) .

 **γ**) το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και

 να προσδιορίσετε το κέντρο του κύκλου.

**20**. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια επίκεντρη γωνία του =120ο. Οι εφαπτόμενες του

 κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο σημείο Ρ. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ

 και φέρουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ, οι οποίες

 προεκτεινόμενες τέμνουν τις ΡΒ και ΡΑ και στα

 σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο.

  **β**) =60ο.

 **γ**) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΡΕB είναι ίσα.

**21**. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο

**** σημείο Ε. Φέρουμε. EZ⊥AB. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) Οι γωνίες ΔΑΓ και ΔΒΓ είναι ίσες.

 **β**) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι

 εγγράψιμα.

 **γ**) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας .

**22**. Δύο κύκλοι (Ο,ρ1), (Κ,ρ2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους

 δυο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει

**** την (ε) στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

 **β**) =90ο.

 **γ**) =90ο.

**23**. Έστω κύκλος (Ο, ρ) και Ε το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο

 στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα .

**** Να αποδείξετε ότι :

 **α**) ΒΓ//ΖΗ

 **β**) ΟΖ=ΟΗ

 **γ**) Αν Β είναι το μέσον της ΟΖ:

 **i**. να αποδείξετε ότι .

 **ii**. να υπολογίσετε τις γωνίες του

 τριγώνου ΖΟΗ.

**24**. Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία με ΑΒ=2ΒΓ. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το

 ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:

**** **α**) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο (ΑΔ//ΒΕ).

 **β**) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα.

 **γ**) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο.

**25**. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα

 τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΓΕ.

 Να αποδείξετε ότι:

 **α**) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να

 γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών

 **β**) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι

 εγγράψιμα.

 **γ**) Η γωνία ΒΖΓ είναι 120ο.

**26**. Δίνεται ορθή γωνία =90ο και Α, Β σημεία των ημιευθειών Οy, Ox, με ΟΑ=ΟΒ. Η (ε)

 είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Ο και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο

 ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το

 σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε.

 Να αποδείξετε ότι:

 **α**) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα.

 **β**) ΑΔ+ΒΕ=ΔΕ.

 **γ**) ΜΝ=, όπου ΜΝ είναι το ευθύγραμμο

 τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ.

 **δ**) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

**27**. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ

 αντίστοιχα, ώστε να είναι ΑΔ=ΓΕ. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.

 **α**) Να αποδείξτε ότι:

 **i**. .

 **ii**. =120ο.

 **β**) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι

 εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντηση

 σας.

**28**. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) ΒΓ=2ΕΔ.

 **β**) .

 **γ**) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο.

 **δ**) .

**29**. Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με ==90ο και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και

 ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) ΑΜ=ΜΔ.

 **β**) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ.

 **γ**) .

**30**. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα

 εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει BAΓ=60ο. Έστω ότι η εφαπτομένη του

 κύκλου στο Δ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με

 ΟΑ=2ΟΒ.

 **β**) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο.

 **γ**) 2ΖΒ=ΑΖ.

 **δ**) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**31**. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές ΑΔ=ΒΓ. Έστω Κ

 και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.

 **β**) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

 **γ**) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

 **δ**) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

**32**. Στις πλευρές Αx' και Ax γωνίας x'Ax θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ=ΑΓ. Οι κάθετες

 στις Αx' και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ. Αν οι ημιευθείες Ay και

**** Az χωρίζουν τη γωνία x'Ax σε τρεις ίσες γωνίες και

 τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ

 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

 **α**) Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.

 **β**) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας x'Ax.

 **γ**) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες.

**33**. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (Ο,ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ

 να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές ΑΒ

 και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ

 στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

 **α**) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

 **β**) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ.

 **γ**) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος.

 **δ**) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι

 εγγράψιμο σε κύκλο.

**34**. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ (=90o) και ΔΒΓ (=90ο) (όπου Α και Δ

 εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

 **β**) .

 **γ**) .

**35**. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (=90ο) φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. ‘Έστω ΔΚ και ΔΡ οι

 προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την

 πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.

 **α**) Να αποδείξετε ότι:

 **i**. .

 **ii**. ΔΕ=ΔΒ

 **β**) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ.

**36**. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (=90ο) έχουμε ότι =30ο. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη

 διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η

 οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

 **α**) ΒΕ=.

 **β**) ΑΗ=ΒΕ.

 **γ**) το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο

 **δ**) ΕΗ//ΑΒ.

**37**. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Έστω σημείο Δ του τόξου

 ΑΒ τέτοιο ώστε ΔΒ⊥ΒΓ.

 **α**) Να αποδείξετε ότι ΑΔ⊥ΑΓ.

 **β**) Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ

 είναι παραλληλόγραμμο.

 **γ**) Αν Μ το μέσον της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΟΜ=.

**38**. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τα ύψη ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε το μέσο της πλευράς ΑΓ τότε:

 **α**) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.

 **β**) Αν η γωνία Β είναι 80ο, να αποδείξετε ότι η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

**39**. Έστω κύκλος κέντρου Ο και διαμέτρου ΒΓ. Θεωρούμε τα

 σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε

 το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ.

 Να υπολογίσετε:

 **α**) το μέτρο x του τόξου ΓΔ,

 **β**) τη γωνία ΒΟΔ,

 **γ**) τη γωνία ΒΑΔ.