|  |  |
| --- | --- |
| ***mainlogo_16_7_2019*** *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ **1ο ΕΠΑ.Λ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ**  | MAΘΗΜΑ 2ΟΜη Γραμμικά συστήματα  |

Το

 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

* ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
* ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
* ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ §1 .1**

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τίτλος μαθήματος( ενότητας): ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ημερομηνία: 25-09-2020

Τάξη: Β΄ Λυκείου Σχολείο: 1o ΕΠΑ.Λ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

Ώρα: 1η

Τμήμα: 1 ( 23 μαθητές)

***ΓΕΝΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ***

Να μπορούν οι μαθητές στο τέλος του μαθήματος να

* Γνωρίζουν τον ορισμό του μη γραμμικού συστήματος
* Γνωρίζουν τουλάχιστον μια από τις μεθόδους επίλυσης μη γραμμικού συστήματος.

Να είναι ικανοί να επιλύουν ένα οποιοδήποτε μη γραμμικό σύστημα.

***ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ***

Να είναι σε θέση στο τέλος του μαθήματος οι μαθητές να

1. Υπολογίζουν τις τιμές των αγνώστων ενός μη γραμμικού συστήματος.
2. Να μετατρέπουν την εκφώνηση ενός προβλήματος σε μη γραμμικό σύστημα.
3. Να σχεδιάζουν τις γραμμές που αποτελούν ένα μη γραμμικό σύστημα ( γραφική επίλυση).

ΜΕΣΑ: Πίνακας, κιμωλίες ή μαρκαδόροι, Η/Υ , φωτοτυπίες.

ΥΛΙΚΑ: CD, σλάιντς, σχολικό βιβλίο .

 ΥΛΗ: Σχολικό βιβλίο .

Κριτήρια Υπουργείου.

ΜΕΘΟΔΟΣ: Διερευνητική καθοδηγούμενη ανακάλυψη.

Α. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ - ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΠΟΡΕΙΑ

Με κατάλληλες ερωτήσεις ερευνούμε αν οι μαθητές κατέχουν την ύλη του προηγούμενου φύλλου εργασίας.

Ζητείται από τους μαθητές η θεωρία με ερωτήσεις από τον διδάσκοντα, ελέγχεται αν έγινε η εργασία για το σπίτι στα τετράδια τους ( ανάπτυξη των θεμάτων του προηγούμενου φύλλου εργασίας ) και ελέγχεται αξιολογούνται ανάλογα.

Β. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΥΛΙΚΟΥ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ-ΑΝΑΛΥΣΗ

 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ ( Παράδοση)

Ενότητα : Μη γραμμικά συστήματα

Η επίλυση πολλών προβλημάτων οδηγεί συχνά σ’ ένα σύστημα εξισώσεων οι οποίες δεν είναι όλες γραμμικές. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται **μη-γραμμικό**.



**Μεθοδολογία**

Σ’ ένα μη-γραμμικό σύστημα εργαζόμαστε συνήθως με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε δηλαδή την πιο «βολική» εξίσωση ως προς ένα άγνωστο κι αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση.

* Συστήματα που ανάγονται σε γραμμικά

Πολλές φορές σ’ ένα μη γραμμικό σύστημα χρειάζεται να κάνουμε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό, ώστε να μετατρέψουμε το σύστημα σε γραμμικό.

**1. Μη Γραμμικά Συστήματα**

Ένα μη γραμμικό σύστημα είναι αυτό ακριβώς που λέει τ' όνομά του: μία ή και οι δύο από τις εξισώσεις που το συνθέτουν **δεν είναι** γραμμική. Στην περίπτωση αυτή, οπλιζόμαστε με τις ιδιότητες των ισοτήτων, φαντασία και πολλή-πολλή ελπίδα! Ωστόσο, το καλό με την ύλη μας είναι ότι μία από τις δύο εξισώσεις θα είναι συνήθως **1ου βαθμού**, ως προς κάποιον άγνωστο! Προχωράμε, λοιπόν, λύνοντας ως προς αυτόν ακριβώς τον άγνωστο και συνεχίζουμε κάνοντας αντικατάσταση, με το συνηθισμένο τρόπο. Έτσι, καταφέρνουμε να σχηματίσουμε μία εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο, ωστόσο 2ου, 3ου ή μεγαλύτερου βαθμού.

**Παράδειγμα**

Να επιλυθεί το σύστημα 



Λύνουμε τη (2) κανονικά, όπως κάθε εξίσωση 2ου βαθμού:

**y2 + 6y + 9 − 2y2 = 14 ⇔ − y2 + 6y − 5 = 0**

**Δ = 62 − 4(−1)( −5) = 36 − 20 = 16**

**y1, 2 =  ⇔ y1 = 1 ή y2 = 5**

Άρα, για y1 = 1 :

**(1) ⇔ x = 1 + 3 ⇔ x = 4** δηλαδή μια λύση είναι η **(x, y) = (4, 1)** .

Αντίστοιχα, για y2 = 5 :

**(1) ⇔ x = 5 + 3 ⇔ x = 8** δηλαδή μια δεύτερη λύση είναι η **(x, y) = (8, 5)** .

**Παρατήρηση**

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε, σε αυτό το σημείο, ότι τα μη γραμμικά συστήματα δεν έχουν απαραίτητα μία μοναδική λύση, αλλά πιθανότατα 2 ή περισσότερες. Για παράδειγμα, στο σύστημα που μόλις λύσαμε, έχουμε βρει **δύο λύσεις**, που το ικανοποιούν: **(4, 1) και (8, 5) !**

**Β. Μεθοδολογία**

 **και**

**εφαρμογές-παραδείγματά της**

### Μέθοδοι επίλυσης

α) Ένας περίπου γενικός τρόπος λύσης είναι να λύνουμε την πιο εύκολη ( την πρωτοβάθμια ή εκείνη που παραγοντοποιείται ) ως προς ένα άγνωστο και έπειτα να αντικαθιστούμε στην άλλη .

β) Η χρήση των τύπων Vieta . Από τις δοσμένες εξισώσεις υπολογίζουμε τα x+y=S , xy=P και

σχηματίζουμε το τριώνυμο ω2 – Sω + P =0 . Οι λύσεις του είναι οι τιμές των x, y ( 2 ζεύγη λύσεων )

 γ) Σχηματισμός ταυτοτήτων

δ) Προσθέτουμε ή αφαιρούμε κατά μέλη , ώστε να σχηματισθεί μια απλούστερη εξίσωση .

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Να επιλυθεί το σύστημα

### Συστήματα και προβλήματα

Αν τα ζητούμενα του προβλήματος μπορούν να εκφραστούν μέσω δυο αγνώστων , τότε από τα δεδομένα σχηματίζουμε δυο εξισώσεις , δηλαδή ένα σύστημα 2x2 το οποίο μετά λύνουμε .

 Ανάλογα εργαζόμαστε αν έχουμε τρεις αγνώστους κ.τ.λ

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Σ’ ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα . Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες , πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ ;

### Συστήματα και γραμμές του επιπέδου

Είδαμε ότι η εξίσωση αx+ βy =γ, με α ≠ 0 ή β ≠ 0 παριστάνει στο επίπεδο μια ευθεία γραμμή .

Γενικά κάθε εξίσωση με δυο αγνώστους x και y είναι δυνατόν να παριστάνει μια γραμμή (ευθεία ή καμπύλη ή τμήματα ή συνδυασμούς αυτών ) στο επίπεδο .

Αν έχουμε δυο τέτοιες γραμμές τότε η επίλυση του συστήματός τους , μας δίνει τα κοινά τους σημεία .

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Να επιλυθεί ΓΡΑΦΙΚΑ και ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ το σύστημα 

 ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

**Μη Γραμμικά Συστήματα**

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

 **α.**  **β.** 

 **γ.**  **δ.** 

 **ε.**  **στ.** 

 **ζ.** 

1. Να λυθεί τo σύστημα : 
2. Να λυθούν τα συστήματα:

 **α.**  **β.** 

 **γ.**  **δ.** 

 **ε.** 

1. α) Nα βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(-1,4) και Β(2,-7).

 β) Να επιλύσετε την εξίσωση (2x-3y+1)2 + (4x+y-5)2 =0

γ) Να επιλύσετε την εξίσωση |2x-3y+1| + |4x+y-5| = 0

**Προβλήματα**

1. Σ’ ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 60 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα . Αν όλα τα οχήματα έχουν 184 ρόδες , πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ ;
2. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 42 και εμβαδόν 110 . Ποιες είναι οι διαστάσεις του ;
3. Βρείτε δυο αριθμούς με γινόμενο 45 και άθροισμα τετραγώνων 106 .
4. Έστω ο διψήφιος ακέραιος α με α > 60. Αντιστρέφουμε τα ψηφία του και σχηματίζουμε τον αριθμό β .

Αν α+β = 110 , να βρείτε τους α, β .

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

**§1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

**ΘΕΜΑ 2ο**

**20) ΑΣΚΗΣΗ 2-17650** §1.2

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm, πλάτος y cm, περίμετρο ίση με 38 cmκαι με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cmκαι μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα

προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

**α)** Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

 (Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x, y του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

**21) ΑΣΚΗΣΗ 2-17659** §1.2

**α)** Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα (Μονάδες 15)

**β)** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 4ο**

**22) ΑΣΚΗΣΗ 4-17850** §1.2

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14

2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24

3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

**α)** Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας. (Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα. (Μονάδες 15)

**23) ΑΣΚΗΣΗ 4-20335** §1.2

Η Άλκηστη και η Ελένη αγαπούν την πεζοπορία και βρίσκονται το καλοκαίρι στην Αμοργό. Αποφασίζουν να περπατήσουν ένα μονοπάτι περίπου 16 χιλιομέτρων που συνδέει τη Χώρα με τον όρμο της Αιγιάλης. Η Άλκηστη ανηφορίζει το μονοπάτι από την Αιγιάλη για να συναντήσει την Ελένη που μένει στη Χώρα. Υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 2,4 χιλιόμετρα την ώρα. Την ίδια στιγμή, όμως, ξεκινά η Ελένη να κατηφορίζει το ίδιο μονοπάτι και υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 4 χιλιόμετρα την ώρα. Μια δεδομένη χρονική στιγμή σε κάποιο σημείο της διαδρομής συναντά την Άλκηστη.

**α)** Αν t είναι ο χρόνος που περπάτησαν μέχρι να συναντηθούν και s η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Αιγιάλη, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους το t και το s, το οποίο να περιγράφει την παραπάνω κατάσταση. (Μονάδες 10)

1. **β)** Σε πόση απόσταση από τη Χώρα και ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν οι δυο κοπέλες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

**24) ΑΣΚΗΣΗ 4-20337** §1.2

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24 cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3 cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

**α)** Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους. (Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

**25) ΑΣΚΗΣΗ 4-20920** §1.2

**α)** Να λύσετε το σύστημα  (Μονάδες 10)

**β)** Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος , λύσεις και του  ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

**γ)** Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος , λύσεις και του ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)