



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Υπουργείο Παιδείας,

Έρευνας και Θρησκευμάτων



ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ

ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

A.1.5

Ανισώσεις

α΄

βαθμού

Το 5^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

από τα



περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

• ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1. Τι ονομάζουμε ανίσωση;

Ανίσωση ονομάζουμε μια ανισότητα που περιέχει γνωστούς αριθμούς και μεταβλητές.

2. Τι προσέχουμε όταν λύνουμε μία ανίσωση;

Στο τελευταίο βήμα, όταν διαιρούμε και τα 2 μέλη με το συντελεστή του αγνώστου, αν ο συντελεστής είναι αρνητικός αριθμός τότε προσέχουμε να **αλλάζουμε τη φορά** της ανίσωσης. Αν ο συντελεστής είναι θετικός αριθμός τότε δεν αλλάζουμε τίποτα.

Επίσης, δεν ξεχνάμε στο τέλος να «ζωγραφίζουμε» τη λύση της ανίσωσης πάνω σε έναν άξονα.

3. Τι ονομάζουμε ανίσωση και τι λύσεις της ανίσωσης;

Ονομάζουμε **ανίσωση** μια ανισότητα που περιέχει μια μεταβλητή και επαληθεύετε για ένα σύνολο τιμών της μεταβλητής αυτής.

Ονομάζουμε λύσεις της ανίσωσης τις τιμές της μεταβλητής που επαληθεύουν την ανίσωση.

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ανισοτήτων;

Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό προκύπτει ανισότητα ίδιας φοράς με την αρχική.

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιάσουμε ή τα διαιρέσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό προκύπτει ανισότητα ίδιας φοράς με την αρχική.

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα πολλαπλασιάσουμε ή τα διαιρέσουμε με τον ίδιο αρνητικό αριθμό προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς με την αρχική.

5. Ανισώσεις 1ου βαθμού

Ποιες ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στις ανισότητες;

Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την ίδια φορά, δηλαδή

-
- Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.
 - Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.
 - Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.
 - Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

• ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Ανισώσεις α΄ βαθμού

1. Τι σημαίνει:

- α) το διπλανό σήμα της Τροχαίας:
- β) ψηφίζουν όσοι είναι πάνω από 18 ετών.
- γ) η διπλανή πινακίδα του βαρκάρη.



2. Τι σημαίνουν τα σύμβολα: $<$, $>$, $\geq$, $\leq$;

3. $\theta > 0$ σημαίνει ότι ο θ είναι θετικός αριθμός, ενώ $\alpha < 0$ σημαίνει ότι ο α είναι αρνητικός αριθμός.

4. Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ έχουν την **ίδια φορά**, ενώ οι $\alpha < \beta$ και $\gamma > \delta$ έχουν **αντίθετη φορά**.

5. Αν στα μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό η ανισότητα **δεν** αλλάζει φορά.

6. Αν τα μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό η ανισότητα **δεν** αλλάζει φορά.

7. Αν τα μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με τον ίδιο αρνητικό αριθμό η ανισότητα **αλλάζει** φορά.

8. Με την χρήση μίας μεταβλητής να γράψετε μία ανίσωση για κάθε εικόνα.

α)  	β)  	γ) 
--	--	---

9. Με την χρήση μίας μεταβλητής να γράψετε μία ανίσωση για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.

α) Άτομα κάτω των 17 δεν επιτρέπονται.

β) Η ορατότητα είναι μικρότερη από 3,2 km.

10. Να περιγράψετε μία άλλη περίπτωση που μπορεί να παρουσιαστεί με τη χρήση ανίσωσης. Να γράψετε την αντίστοιχη ανίσωση.

.....

11. Δίνονται οι παρακάτω αριθμοί.

i) 1

ii) $-7,3$

iii) 9,004

iv) 0

v) 3

vi) $\frac{2895}{3247}$

α) Ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς αποτελούν λύση της ανίσωσης $x < 3$.

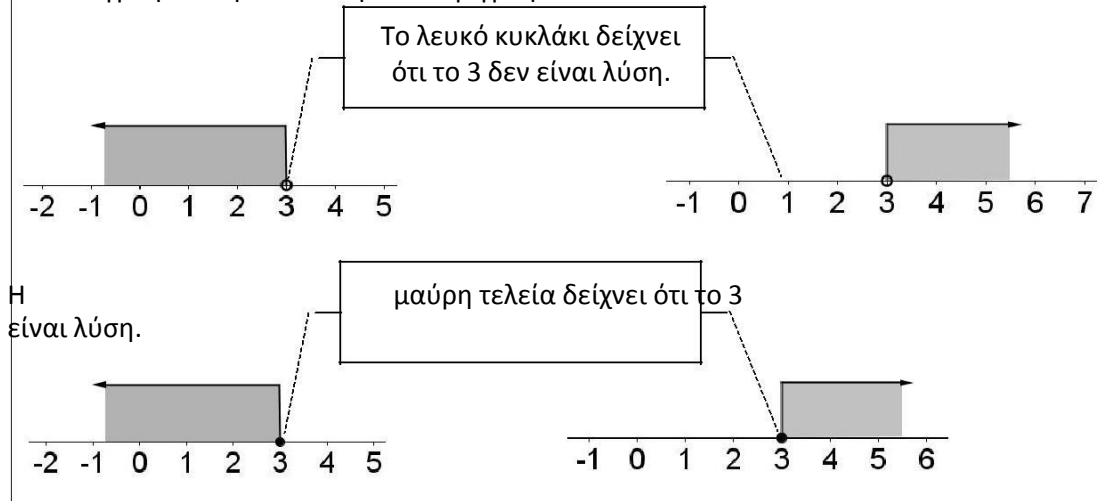
Καταγράψτε τους αριθμούς

β) Δώστε μερικές ακόμα λύσεις της $x < 3$.

.....

γ) Πόσες λύσεις έχει η ανίσωση $x < 3$;

12. Στην ευθεία των αριθμών παρουσιάζονται οι λύσεις της ανίσωσης $x < 3$, μαζί με τις λύσεις τριών άλλων ανισώσεων οι οποίες συγκρίνουν το x με το 3. Για κάθε περίπτωση να γράψετε την ανίσωση που περιγράφουν.



13. Στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα δίνονται κάποιες προτάσεις στην φυσική τους γλώσσα. Να συμπληρώσετε την δεύτερη στήλη του πίνακα ώστε οι προτάσεις της πρώτης στήλης να εκφράζονται με ανισώσεις

Προτάσεις στην φυσική τους γλώσσα	Μαθηματικές παραστάσεις των προτάσεων
Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3 είναι μικρότερο του 2	
Το άθροισμα δύο διαδοχικών άρτιων ακεραίων αριθμών δεν ξεπερνά το μισό του μεγαλύτερου.	
Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x cm και 3 cm ξεπερνάει την περίμετρο ενός τετραγώνου με πλευρά x cm	
Το διπλάσιο της διαφοράς ενός αριθμού από το 5 είναι μικρότερο από αυτόν τον αριθμό.	

14. Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

α) Η ανίσωση $2x > 2$

Α. έχει λύση τον αριθμό 1 Β. έχει λύση τον αριθμό 0 Γ. έχει λύση μόνο τον αριθμό 2 Δ. έχει λύσεις όλους τους αριθμούς που είναι πάνω από 1.

β) Η ανίσωση $-2x < 0$

Α. έχει λύσεις όλους τους αριθμούς που είναι πάνω από -2
 Β. έχει λύσεις όλους τους θετικούς αριθμούς
 Γ. έχει λύσεις όλους τους αρνητικούς αριθμούς
 Δ. δεν έχει λύση

γ) Η ανίσωση $-2x \geq 4$

Α. έχει λύσεις όλους τους αριθμούς που είναι πάνω από -2
 Β. έχει λύσεις όλους τους θετικούς αριθμούς
 Γ. έχει λύσεις όλους τους αρνητικούς αριθμούς
 Δ. έχει λύση το -2

δ) Η ανίσωση $x + 1 \geq x$

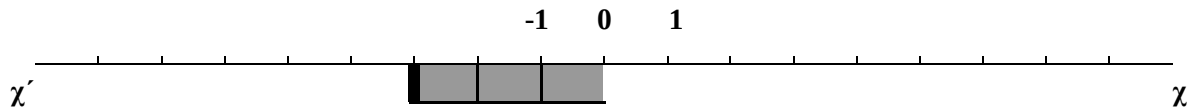
Α. έχει λύσεις όλους τους αριθμούς
 Β. έχει λύσεις όλους τους θετικούς αριθμούς
 Γ. έχει λύσεις όλους τους αρνητικούς αριθμούς
 Δ. είναι αδύνατη

15. Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι **σωστή**, μπορεί όμως να είναι **λάθος**.

Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το **Σ** αν αυτή είναι σωστή και το **Λ** αν αυτή είναι λάθος.

- Η ανίσωση $0x > 0$ είναι αδύνατη.
- Η ανίσωση $0x \leq 0$ είναι αδύνατη.
- Η ανίσωση $3x - 3 > 0$ δεν έχει λύση τον αριθμό 1
- Ο μοναδικός αριθμός που επαληθεύει την ανίσωση $1 < x < 3$ είναι το 2.
- Οι ακέραιοι αριθμοί που επαληθεύουν την ανίσωση $1 \leq x \leq 3$ είναι το 1, το 2 και το 3.
- Ο μοναδικός θετικός ακέραιος που επαληθεύει την ανίσωση $2002x \leq 2002$ είναι το 1.

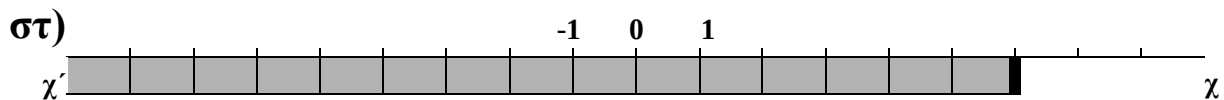
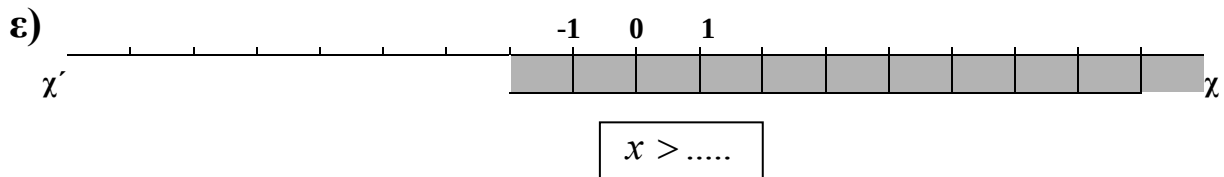
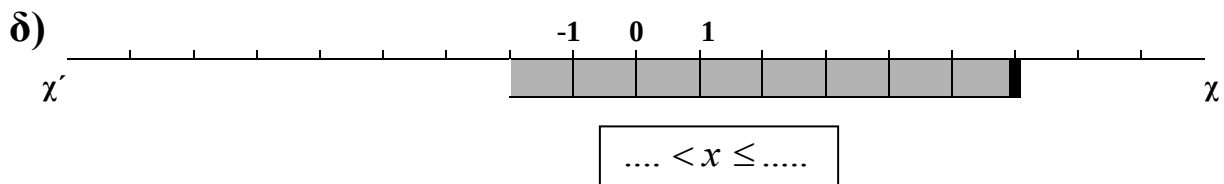
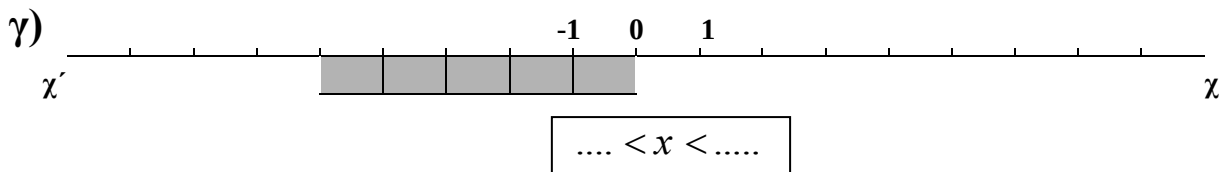
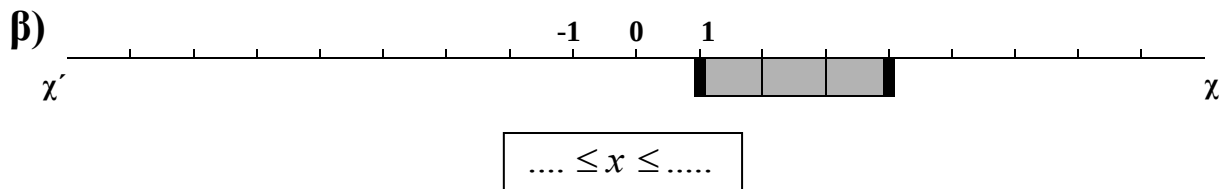
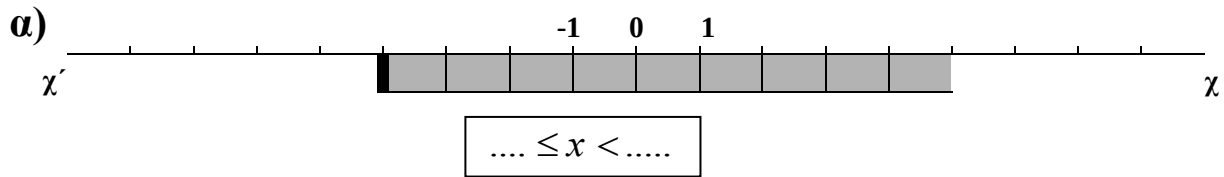
16.



Στον παραπάνω άξονα έχουμε σημειώσει τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

$$-3 \leq x < 0$$

Να βρείτε ποιους αριθμούς έχουμε σημειώσει στους επόμενους άξονες.



$$x \leq \dots\dots$$

17. α) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$1,5 \leq x \leq 3$$

β) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$-5 < x \leq \frac{1}{3}$$

γ) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$0 \leq x < \frac{11}{2}$$

ε) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$-\frac{22}{8} < x < 1$$

στ) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x \leq 3$$

ζ) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x > -\frac{1}{5}$$

η) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x > 1 \quad \text{ή} \quad x < -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να σημειώσετε τις λύσεις τους πάνω σε άξονα.

α) $2x - 8 < 7x + 2$

β) $-3x + 4 > 5x + 6$

γ) $x - (2x + 3) \leq 8$

δ) $9 - 5x \geq 4 - 8x$

2. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να σημειώσετε τις λύσεις τους πάνω σε άξονα.

α) $10 - 3(4 - x) < 5(2x - 1) + 7 - 2x$

β) $0 > 1 - 2(3 - x) + 3x$

γ) $0,5(4 - 3x) - 1,5(5x - 2) \geq 0$

δ) $-2 - 2[2 - 2(2 - 2x) - 2x] \leq -2x$

3. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να σημειώσετε τις λύσεις τους πάνω σε άξονα.

α) $-x + \frac{3x - 2}{2} - \frac{2}{7} \leq 1 - \frac{5 - 2x}{14}$

β) $x - 3 + \frac{x - 3}{5} \geq -\frac{1 - (-x + 4)}{3} + \frac{10 - 8x}{15}$

γ) $8 \geq \frac{x}{2} - 1 + 2x - \frac{3 - 5x}{4}$

δ) $-3 + 2\left(-\frac{3x}{2} + 1\right) - 5\left(1 - \frac{-2 + 2x}{5}\right) + 2x > 0$

4. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να τις σημειώσετε πάνω σε άξονα.:

α) $-5x + 7(x - 2) < 3(x - 5) + 1$ και $\frac{1}{2}(x - 4) - x \geq 2(x - 1)$

β) $x - 4(1,25 - 0,5x) \leq 0$ και $2 - \frac{x}{2} + \frac{3 - x}{3} > -2$

γ) $\frac{3 - 2x}{7} < \frac{x - 1}{-4}$ και $\frac{\frac{4x}{3} - 1}{2} + 1 \geq \frac{\frac{2x - 1}{2} + 3}{3} - 2$

δ) $0 < \frac{x}{2} - 1 + x - \frac{7 - x}{6}$ και $1 < \frac{x}{-2} + \frac{1 - x}{3} - 5$

5. α) Αν α, β ρητοί αριθμοί με $\alpha < \beta$ και $\alpha\beta < 0$ τότε ισχύει:

A.: α, β θετικοί αριθμοί. **B.:** α, β αρνητικοί αριθμοί. **Γ.:** α θετικός αριθμός και β αρνητικός αριθμός. **Δ.:** α αρνητικός αριθμός και β θετικός αριθμός

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του χ για τις οποίες ισχύει: $(\chi+5)(\chi-1) < 0$.

6. α) Αν α, β ρητοί αριθμοί με $\alpha\beta > 0$ τότε ισχύει:

A.: α, β θετικοί αριθμοί. **B.:** α, β αρνητικοί αριθμοί. **Γ.:** α, β αρνητικοί αριθμοί ή αρνητικοί αριθμοί. **Δ.:** α αρνητικός αριθμός και β θετικός αριθμός

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

β) Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο χ και τον μεγαλύτερο αρνητικό ακέραιο χ για τους οποίους ισχύει $(2\chi+1)(3\chi-5) > 0$.

7. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(\chi-2)(\chi+2) < 0$

β) $\chi^2 - 4\chi > 0$

γ) $\chi^3 + \chi \leq 0$

8. Δύο αριθμοί έχουν πηλίκο 7.

Το πενταπλάσιο του μικρότερου αριθμού είναι κατά 4 μονάδες μικρότερο από τον μεγαλύτερο αριθμό.

α) Αν χ ο μικρότερος αριθμός τότε ο άλλος θα είναι:

A.: 7χ **B.:** $\frac{7}{\chi}$ **Γ.:** $\frac{\chi}{7}$ **Δ.:** $7 + \chi$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

β) Να βρείτε τους δύο αριθμούς

9. Να βρείτε τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό για τον οποίο γνωρίζουμε ότι το άθροισμά του με το μισό του δεν ξεπερνά το άθροισμα του $\frac{1}{3}$ αυτού του αριθμού με το 3,5.

10. α) Υπάρχουν άπειροι θετικοί αριθμοί που το τετράγωνό τους είναι μικρότερο από τον εαυτό τους. Μπορείτε να βρείτε κάποιον.

β) Βρείτε όλους τους αριθμούς που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του α) και σημειώστε τους πάνω σε έναν άξονα.

11. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή κ ώστε ο περιττός αριθμός $2\kappa + 1$ να βρίσκεται μεταξύ του -4 και του 8.

12. Η απόλυτη τιμή του αριθμού $2\chi - 1$ δεν ξεπερνάει το 1.

α) Σημειώστε πάνω σε έναν άξονα την περιοχή που μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός $2\chi - 1$.

β) Βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή χ .

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $x - 5(x + 2) < 2x - 3(x + 1)$

β. $18 - 3(x - 1) \leq 5(x + 1) - 2$

γ. $5x + 2(x + 3) > 7(x + 3) - 4$

δ. $\frac{x-2}{6} - \frac{1-3x}{2} < \frac{3-2x}{3} - 2$

ε. $\frac{x-1}{6} - \frac{3-2x}{8} > 2(x-2)$

στ. $2x - \frac{3x-1}{2} > \frac{1}{3} - \frac{x+1}{6} + 4$

η. $\frac{x+2}{4} - \frac{2x+3}{2} \leq \frac{1}{8} - \frac{x-1}{2}$
 $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} \leq x-2 + \frac{3 \cdot (x-2)+1}{6}$

θ.

ι. $\frac{x+1}{5} + \frac{x}{2} \leq x+3 - \frac{3(x+1)-11}{10}$

2. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων, σε κάθε περίπτωση:

α. $2(x-1) > 3(x-3)$ και $5x-2 > 2(x+5)$

β. $-2(x-19) > 7x+2$ και $13-5x \leq 7(x-1)-4$

γ. $\frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{2} < \frac{x}{6}$ και $x - \frac{x-1}{2} < \frac{x-2}{3}$

δ. $\frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} < \frac{7x-3}{6}$ και $\frac{x-3}{2} - \frac{3(x+1)}{4} > \frac{5}{2} - \frac{x+10}{2}$

ε. $2(x+4) - (x+6) \leq 12-x$ και $2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1+x)$

στ. $x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1$ και $x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1$

ζ. $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6}$ και $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$

η. $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$ και $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

3. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια πλατεία με εμβαδό, μεταξύ 110 m² και 125 m². Το μήκος της πλατείας είναι 15 m. Μεταξύ ποιων ορίων θα περιέχεται το πλάτος της;
4. Ένας φυσικός αριθμός είναι μεταξύ 59 και 68 και όταν διαιρεθεί με 12 αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρείτε τον αριθμό αυτό.
5. Ένας παραγωγός ροδάκινων υπολογίζει ότι την εποχή της συγκομιδής τους, θα χρειαστεί κάθε εβδομάδα να συσκευάζει 3 με 4 t (= τόνους) ροδάκινα σε τελάρα των 6 και 12 kg. Χρειάζεται 2άσιο αριθμό τελάρων των 6 απ' όσα των 12 kg. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο αριθμός των τελάρων, που πρέπει να προμηθευτεί, έτσι ώστε να μην του λείψουν τελάρα, αλλά και να μη δεσμεύσει χρήματα για τελάρα, που δε θα χρησιμοποιηθούν.
6. Μια τάξη ετοιμάζει μια εκδρομή στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Δυο γραφεία ταξιδίων Α και Β προσφέρουν τις υπηρεσίες τους, νοικιάζοντας εκδρομικά λεωφορεία, όπως φαίνεται παρακάτω:
- Γραφείο Α : 200 € και 0,5 € ανά χιλιόμετρο.
 - Γραφείο Β : 250 € και 0,2 € ανά χιλιόμετρο.
- Ποια είναι η πιο συμφέρουσα προσφορά για τα x χιλιόμετρα, που θα διανυθούν;
7. Το πάγιο ποσό στο λογαριασμό κατανάλωσης νερού είναι 2 € , ενώ κάθε κυβικό μέτρο νερού (m³) κοστίζει 0,3 €. Πόσα το πολύ κυβικά μέτρα μπορούμε να καταναλώσουμε, για να πληρώσουμε το πολύ 50 € ;

8. Το πλήθος των μαθητών ενός σχολείου, σε μια παρέλαση, είναι μεγαλύτερο από 452 και μικρότερο από 456. Στη δοκιμή, παρατάχτηκαν σε εξάδες και περίσσεψαν 4, οι οποίοι τελικά δεν παρέλασαν. Να βρείς τον αριθμό των μαθητών του σχολείου.
9. Να βρείτε ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που, αν προστεθεί στον αριθμητή του κλάσματος $\frac{-2}{7}$, δίνει έναν αριθμό μεγαλύτερο του -10 .
10. Να βρεις ποιος είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, που επαληθεύει την ανίσωση:

$$\frac{2(x-1)}{3} - \frac{x-2}{4} < 1$$