

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Κάθε παράσταση της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ ονομάζεται τριώνυμο.

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο, δουλεύουμε ως εξής:

Πρώτα προσδιορίζουμε τις ρίζες (λύσεις) της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (1), \alpha \neq 0$:

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και :

- Αν $\Delta > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

Παράδειγμα: Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο

$$3x^2 - 8x + 5$$

Λύση:

Για την εξίσωση $3x^2 - 8x + 5 = 0$

έχουμε $\alpha = 3, \beta = -8, \gamma = 5$ και

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 = 4 > 0$$

Άρα η εξίσωσή μας έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \begin{cases} \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ \frac{8-2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

Άρα το τριώνυμο γίνεται:

$$3x^2 - 8x + 5 = 3 \left(x - \frac{5}{3} \right) (x - 1) = (3x - 5)(x - 1)$$

Πολλαπλασιάζουμε εκείνη την παρένθεση που "το έχει ανάγκη" έτσι ώστε να απλοποιείται ο παρονομαστής

- Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα, την $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_0)^2$$

❗ Η παραγοντοποιημένη μορφή του τριωνύμου στην περίπτωση αυτή θα είναι ένα τέλειο τετράγωνο.

Παράδειγμα: Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο

$$9x^2 - 12x + 4$$

Λύση:

Για την εξίσωση $9x^2 - 12x + 4 = 0$

έχουμε $\alpha = 9$, $\beta = -12$, $\gamma = 4$ και

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

και η εξίσωσή μας έχει μία διπλή ρίζα, την

$$x_0 = -\frac{-12}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Άρα το τριώνυμο γίνεται:

$$9x^2 - 12x + 4 = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left[3\left(x - \frac{2}{3}\right)\right]^2 = (3x - 2)^2$$

- Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες και το τριώνυμο **δεν παραγοντοποιείται**.

Παράδειγμα: Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο

$$3x^2 - 2x + 8$$

Για την εξίσωση $3x^2 - 2x + 8 = 0$

έχουμε $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 8$ και

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 4 - 96 = -92 < 0$$

και η εξίσωσή μας δεν έχει πραγματικές ρίζες οπότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

