



Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

Αριθμητική παράσταση λέγεται μία μαθηματική έκφραση που περιέχει μόνο αριθμούς.

Π.χ. $A = 3 \cdot (-2 + 5)^2 - 2 \cdot [(-3)^2 - 5]$

Αλγεβρική παράσταση λέγεται μία μαθηματική έκφραση η οποία εκτός από αριθμούς, περιέχει και μεταβλητές (γράμματα).

Π.χ. $A = 2(x - 3)^2 - 5x + 6$ $B = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ $\Gamma = \frac{x^2}{y}$

Ακέραια αλγεβρική παράσταση λέγεται μια αλγεβρική παράσταση, όταν μεταξύ των μεταβλητών σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

Π.χ. Η παράσταση $-\frac{3}{4}x^2y^5$ είναι ακέραια αλγεβρική παράσταση, ενώ οι παραστάσεις $-2x^{-3}y$ και $\frac{5x^2}{y}$ δεν είναι ακέραιες.

Αριθμητική τιμή (ή απλά τιμή) μιας αλγεβρικής παράστασης, για κάποιες τιμές των μεταβλητών της, ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στη θέση των μεταβλητών θέσουμε τις τιμές αυτές και κάνουμε τις πράξεις.

Π.χ. Η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $A = 2x^2 - 5xy$ για $x = 2$ και $y = -1$ είναι: $A = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \cdot (-1) = 2 \cdot 4 + 10 = 8 + 10 = 18$

Μονώνυμα

- Μία ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγεται μονώνυμο.

- Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται κύριο μέρος.



- Βαθμός μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή του λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής.
- Βαθμός ενός μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

Το μονώνυμο $2x^3y$ είναι:
 $3^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς x
 $1^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς y
 $4^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς x και y

- Όμοια λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

Π.χ. Τα μονώνυμα $-\frac{2}{3}x^3yz^2$, $-3x^3yz^2$, $\sqrt{3}x^3yz^2$



ενώ το $4x^3y^2z$ δεν είναι όμοιο με αυτά.

- Δύο όμοια μονώνυμα λέγονται ίσα αν έχουν ίσους συντελεστές.

Για παράδειγμα αν τα όμοια μονώνυμα $(2\kappa + 1)x^3yz^2$ και $-3x^3yz^2$ είναι ίσα, τότε είναι

$$2\kappa + 1 = -3 \Leftrightarrow 2\kappa = -3 - 1 \Leftrightarrow 2\kappa = -4 \Leftrightarrow \kappa = -2$$

Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμα:

- Πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές και
- ως κύριο μέρος θέτουμε το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

$$\text{Π.χ. } (-2x^3y\omega^2)(5x^2y\omega) = -10x^5y^2\omega^3$$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των δυνάμεων $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

❗ Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμα δεν χρειάζεται να είναι όμοια.

❗ Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

Διαίρεση μονωνύμων

Η διαίρεση μονωνύμων γίνεται αν πολλαπλασιάσουμε το διαιρέτη με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των δυνάμεων $a^m : a^n = a^{m-n}$

$$\text{Π.χ. } (-6x^3y^2\omega) : (2xy\omega) = (-6x^3y^2\omega) \cdot \frac{1}{2xy\omega} = \frac{-6x^3y^2\omega}{2xy\omega} = -3x^2y$$

❗ Για να διαιρέσουμε μονώνυμα δεν χρειάζεται να είναι όμοια.

❗ Στην διαίρεση μονωνύμων το πηλίκο μπορεί να **μην** είναι μονώνυμο.

$$\text{Για παράδειγμα στη διαίρεση } (-6x^3y^2\omega) : (2xy^3\omega^2) = -3x^2y^{-1}\omega^{-1}$$

προκύπτει πηλίκο που δεν είναι μονώνυμο.



Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

- Το **άθροισμα** **ανόμοιων μονωνύμων** είναι μία αλγεβρική παράσταση που λέγεται πολυώνυμο.
- Τα μονώνυμα που περιέχονται σε ένα πολυώνυμο, λέγονται όροι του πολυωνύμου.

Το πολυώνυμο $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$ έχει τρεις όρους που είναι τα μονώνυμα $3x^2y$, $2xy^4$, $-5x^3y^3$.

- Αν ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους
 - έχει **δύο** όρους, λέγεται **διώνυμο** π.χ. $2x^2 + 5y$
 - έχει **τρεις** όρους, λέγεται **τριώνυμο** π.χ. $x^2 - 5x + 6$
- Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο **μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του**.

Το πολυώνυμο $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$ είναι 3ου βαθμού ως προς x , 4ου βαθμού ως προς y , 6ου βαθμού ως προς x και y .

- Κάθε **αριθμός** μπορεί να θεωρηθεί ως πολυώνυμο, λέγεται **σταθερό** πολυώνυμο και έχει **μηδενικό βαθμό**.
 - Ο αριθμός **0** λέγεται **μηδενικό** πολυώνυμο και **δεν έχει βαθμό**.
- ❗ Το πολυώνυμο που έχει μία μεταβλητή, π.χ. την x , το συμβολίζουμε για συντομία $P(x)$, $Q(x)$, $A(x)$,...

❗ Θα λέμε ότι ένα πολυώνυμο είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις μιας μεταβλητής όταν οι όροι του είναι γραμμένοι από το μονώνυμο με τον μεγαλύτερο βαθμό ως προς τη μεταβλητή μέχρι το μονώνυμο με τον μικρότερο βαθμό.

- Για παράδειγμα το πολυώνυμο $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x .
- Αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή ενός πολυωνύμου με έναν αριθμό, τότε το πολυώνυμο μετατρέπεται σε αριθμό, ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί αν ακολουθήσουμε τους κανόνες προτεραιότητας των πράξεων. Η τιμή που προκύπτει μετά τις πράξεις λέγεται αριθμητική τιμή του πολυωνύμου.
- Για παράδειγμα, η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

$$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \quad \text{για } x = 2 \text{ είναι:}$$

$$P(2) = 5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 5 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1 =$$

$$= 40 - 8 + 6 - 1 = 37$$
- Δύο πολυώνυμα λέγονται ίσα αν οι όροι τους είναι ίσα μονώνυμα.

Τα πολυώνυμα $3x^2 - 5x + 1$ και $ax^2 + \beta x + 1$ είναι ίσα, αν $a = 3$ και $\beta = -5$.

- Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν δύο ή περισσότερα όμοια μονώνυμα, τότε τα αντικαθιστούμε με το αλγεβρικό άθροισμά τους. Η διαδικασία αυτή λέγεται αναγωγή ομοίων όρων.

$$2a^2 - 3\beta + 4a^2 - 5\beta =$$

$$\underbrace{2a^2 + 4a^2} - \underbrace{3\beta - 5\beta} = 6a^2 - 8\beta$$

Η αρχική αλγεβρική παράσταση, που είχε τέσσερις όρους, συμπύχθηκε σε μία άλλη με δύο όρους.

Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τα πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$

- Κάνουμε απαλοιφή των παρενθέσεων
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και
- Γράφουμε το πολυώνυμο που προκύπτει κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x

Παράδειγμα: Αν $A(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ και $B(x) = -3x^3 + 5x - 2$ είναι:

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= (2x^3 - x^2 + x - 4) + (-3x^3 + 5x - 2) = \\ &= 2x^3 - x^2 + x - 4 - 3x^3 + 5x - 2 = \\ &= -x^3 - x^2 + 6x - 6 \end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= (2x^3 - x^2 + x - 4) - (-3x^3 + 5x - 2) = \\ &= 2x^3 - x^2 + x - 4 + 3x^3 - 5x + 2 = \\ &= 5x^3 - x^2 - 4x - 2 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

■ Πολλαπλασιασμός μονωνύμου επί πολυώνυμο

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο επί πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου.

$$2x^2 \cdot (-x^2 + 3x - 5) = -2x^4 + 6x^3 - 10x^2$$

Ο βαθμός του γινομένου πολυωνύμων ισούται με το άθροισμα των βαθμών των αρχικών πολυωνύμων.

■ Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου επί πολυώνυμο

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

$$(2x^2 + x) \cdot (-x^2 + 3x - 5) = -2x^4 + 6x^3 - 10x^2 - x^3 + 3x^2 - 5x = -2x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 5x$$