



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Υπουργείο Παιδείας,

Έρευνας και Θρησκευμάτων



ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ

ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

10^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Το

17^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εξισώσεις – Ανισώσεις

§ 2.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού

(1) Τι ονομάζουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού;

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ένα άγνωστο ονομάζουμε κάθε εξίσωση που γράφεται ή μπορεί να γραφεί στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

π.χ.

$$2x^2 + 3x - \sqrt{7} = 0, \quad 2x^2 - 5x = 0, \quad 4x^2 - 36 = 0$$

(2) Τι ονομάζουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού ελλιπής μορφής;

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού ελλιπής μορφής ονομάζεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ και $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$

π.χ.

$$2x^2 - 5x = 0 \quad (\gamma = 0)$$

$$4x^2 - 36 = 0 \quad (\beta = 0)$$

Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων 2^{ου} βαθμού

A) Εξισώσεις ελλιπής μορφής

➤ Αν $\beta = 0$ τότε: $ax^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -\gamma \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{a}$ και αυτή λύνεται κατά τα γνωστά.

π.χ.

$$4x^2 - 36 = 0$$

$$4x^2 = 36$$

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{36}{4}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

$$x = -3 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

➤ Αν $\gamma = 0$ τότε: $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $ax + \beta = 0$ και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά.

π.χ.

$$2x^2 - 5x = 0$$

$$x(2x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad 2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Παραδείγματα

1) Να επιλυθεί η εξίσωση: $3x^2 - 12 = 0$

Λύση:

$$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm 2$$

2) Να επιλυθεί η εξίσωση: $4x^2 + 20 = 0$

Λύση:

$$4x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 = -20 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = -5$$

Αδύνατη

3) Να επιλυθεί η εξίσωση: $3x^2 - 12x = 0$

Λύση:

$$3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 4$$

4) Να επιλυθεί η εξίσωση: $2x^2 + x = 0$

Λύση:

$$2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad 2x + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$

ii. $3(x - 1)x^2 = 0$

iii. $(1 - 2\psi)\psi = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^2 - 5x = 0$

ii. $3x^2 = 6x$

iii. $12x^2 + 15x = 0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^2 - 25 = 0$

ii. $3x^2 - 12 = 0$

iii. $x^2 - 8 = 0$

iv. $8x^2 = 18$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^2 + 15 = 0$

ii. $3x^2 + 12 = 0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(x^2 - x) \cdot (x^2 - 4) = 0$

ii. $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2) = 0$

iii. $x^3 - x = 0$

iv. $x^3 = 4x$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις

A) $2x^2 + x = 0$ B) $2x^2 - 4 = 0$ Γ) $2x(x - 3) = x^2$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις

A) $2x^2 + 1 = 0$ B) $-2x^2 + 6x = 0$ Γ) $2(x - 3) = x^2 - 6$

Β) Εξισώσεις κανονικής μορφής

Για την επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ υπολογίζουμε πρώτα την ποσότητα $\Delta = b^2 - 4ac$ η οποία ονομάζεται **διακρίνουσα**. Μετά την επιλύουμε σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

$\Delta = b^2 - 4ac$	Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

π.χ.

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$a = 6, \quad b = -5, \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} x = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ x = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Παραδείγματα

1) Να επιλυθεί η εξίσωση: $6x^2 - 5x + 1 = 0$

Λύση:

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:

$$\alpha = 6 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 1$$

Έτσι η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Συνεπώς:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \rho_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2) Να επιλυθεί η εξίσωση: $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

Λύση:

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:

$$\alpha = 1 \quad \beta = \sqrt{3} - 1 \quad \gamma = -\sqrt{3}$$

Έτσι η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} =$$

$$= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 =$$

$$= (\sqrt{3} + 1)^2 > 0.$$

Δεν κάνουμε χρήση της ιδιότητας $(\sqrt{a})^2 = a$

Συνεπώς:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(\sqrt{3} - 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{3} + 1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2} =$$

$$\rho_1 = \frac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

ή

$$\rho_2 = \frac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

3) Να εξετάσετε αν έχουν ή όχι πραγματικές ρίζες οι εξισώσεις:

A. $x^2 - 6x + 9 = 0$ B. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ Γ. $3x^2 + 4x + 2 = 0$

Λύση:

A. Βρίσκουμε την διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Συνεπώς η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

B. Βρίσκουμε την διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Συνεπώς η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

A) $2x^2 + x + 1 = 0$ B) $-2x^2 + 6x - 4 = 0$ Γ) $2x(x - 3) = x^2 - 6$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

A) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$ B) $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x^2 - 3x + 2 = 0$ ii. $x^2 + x - 2 = 0$
 iii. $2x^2 - x - 3 = 0$ iv. $10x^2 + x - 2 = 0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x^2 + 3x - 2 = 0$ ii. $3x^2 + 5x + 1 = 0$
 iii. $2x^2 + 6x + 3 = 0$ iv. $7x^2 - 4x + 1 = 0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $7x^2 - 5x + 9 = 3(2x^2 + 1)$ ii. $(2x + 1)^2 + 5(x + 2) = 6$
 iii. $(x + 1)^2 - 3x(x + 2) = (x - 1)^2$ iv. $3x^2 - 3(x - 1)(2x - 1) = 2x + 1$
 v. $7x^2 - (3x - 1)^2 = x + 2$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x - \frac{x^2 - 2}{2} = -3$ ii. $x^2 - \frac{2x - 1}{6} = x - \frac{x^2}{3}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$ ii. $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$
 iii. $x^3 - x^2 = x - 1$ iv. $x^5 + x^4 = x + 1$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(x - 1) \cdot (x^2 - 9) = (x + 3) \cdot (x^2 - 1)$
 ii. $(5x - 10) \cdot (x - 1)^2 = (3x - 6) \cdot (x^2 - 1)$

Γ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου

(1) Τι ονομάζουμε τριώνυμο;

Η παράσταση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$, λέγεται **τριώνυμο**.

(2) Τι ονομάζουμε διακρίνουσα τριωνύμου;

Διακρίνουσα του τριωνύμου ονομάζεται η διακρίνουσα της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

(3) Τι ονομάζουμε ρίζες τριωνύμου;

Ρίζες του τριωνύμου ονομάζονται οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και είναι ρίζες και της πολυωνυμικής συνάρτησης 2ου βαθμού.

(4) Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο;

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου γίνεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

✧ Αν $\Delta > 0$ και ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου τότε:	$ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
✧ Αν $\Delta = 0$ και ρ η μία διπλή ρίζα του τριωνύμου τότε:	$ax^2 + bx + c = a(x - \rho)^2$
✧ Αν $\Delta < 0$ τότε:	δεν παραγοντοποιείται

Παραδείγματα

(1) Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

(α) $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

(β) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

(γ) $h(x) = 2x^2 - 3x + 7$

Λύση:

(α) Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$, οπότε το τριώνυμο έχει

δυο ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 1$ ή $x_2 = -\frac{1}{2}$. Επομένως

$$f(x) = 2x^2 - x - 1 =$$

$$= 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1).$$

(β) Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 16 - 16 = 0$, οπότε το τριώνυμο έχει

διπλή ρίζα την $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-4)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$.

$$\text{Επομένως } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = \frac{1}{2}(x - 4)^2.$$

(γ) Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47 < 0$, οπότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες και έτσι το τριώνυμο δεν μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

(2) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 5x - 3}.$$

Λύση:

Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$ έχει ρίζες $x_1 = 3$ και $x_2 = 4$, ενώ το τριώνυμο $2x^2 - 5x - 3$ έχει ρίζες $x_1 = 3$ και $x_2 = -\frac{1}{2}$. Επομένως:

$$A = \frac{(x-3)(x-4)}{2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{x-4}{2x+1}.$$

Προσοχή πρέπει να τονίσουμε ότι η παράσταση A ορίζεται αν $x \neq 3$ και $x \neq -\frac{1}{2}$.

Ασκήσεις

(1) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

i. $x^2 + x - 6$

ii. $x^2 - 7x + 12$

iii. $2x^2 - x - 1$

iv. $5x^2 + x - 4$

(2) Απλοποιήστε τις παρακάτω κλασματικές παραστάσεις:

α) $\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x - 12}$

β) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$

(3) Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

a. $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$.

b. $g(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

c. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

(4) Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

a. $f(x) = 5x^2 - 9x - 2$.

b. $g(x) = \frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

c. $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

(5) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{x^2 - 5x + 4}{3x^2 - 11x - 4}.$$

(6) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}.$$

§ 2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Παραδείγματα

(1) Να βρείτε τις δύο πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68 cm και διαγώνιο 26 cm.

Λύση

Έστω x, y οι πλευρές του ορθογωνίου.

$$2x + 2y = 68 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = 26^2$$

$$x + y = 34 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = 676$$

$$y = 34 - x \quad \text{και} \quad x^2 + (34 - x)^2 = 676$$

$$x^2 + 34^2 - 2 \cdot 34 x + x^2 - 676 = 0$$

$$2x^2 - 68x + 1156 - 676 = 0$$

$$2x^2 - 68x + 480 = 0$$

$$x^2 - 34x + 240 = 0$$

$$\Delta = 34^2 - 4 \cdot 240 = 1156 - 960 = 196$$

$$x = \frac{34 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{34 \pm 14}{2} = \frac{34+14}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{34-14}{2} = 24 \quad \text{ή} \quad 10$$

Από την εξίσωση $y = 34 - x$ θα έχουμε $y = 10$ ή 24 .

Άρα οι πλευρές του ορθογωνίου είναι 24 και 10

(2) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

Λύση

Έστω $x - 1, x, x + 1$ διαδοχικοί ακέραιοι, μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

$$\text{Πυθαγόρειο: } (x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$-x^2 + 4x = 0$$

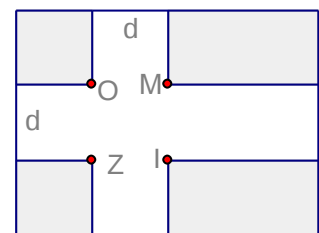
$$-x(x - 4) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{αφού} \quad x \neq 0$$

$$x = 4$$

Επομένως υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι, μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, και είναι οι $4 - 1, 4, 4 + 1$, δηλαδή οι 3, 4, 5

(3) Η σημαία του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις 4m και 3m αντιστοίχως. Να βρείτε το πλάτος d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.



Λύση

Περιορισμός : $0 < d < 3$

$$\begin{aligned}
 \text{εμβαδόν του σταυρού} &= \text{εμβαδόν οριζόντιας λωρίδας} + \\
 &\quad \text{εμβαδόν κατακόρυφης λωρίδας} - \\
 &\quad \text{εμβαδόν του τετραγώνου ΖΙΜΟ πλευράς } d \\
 &= 4d + 3d - d^2 \\
 &= 7d - d^2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Αλλά, εμβαδόν του σταυρού = εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.
 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \text{εμβαδόν του σταυρού} &= \frac{1}{2} \text{ εμβαδού της όλης σημαίας} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Από τις (1), (2)} \quad \Rightarrow \quad 7d - 3d^2 &= 6 \\
 d^2 - 7d + 6 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Delta = 49 - 24 = 25, \quad d = \frac{7 \pm 5}{2} = 1 \quad \text{ή} \quad 6 \text{ απορρίπτεται, } \text{άρα } d = 1$$

(4) Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δύο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι χρειάζεται το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δύο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

Λύση

Αν t είναι ο χρόνος που χρειάζεται το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο, ο αντίστοιχος χρόνος για το Β είναι $t + 12$.

Σε 1 ώρα, το Α θα εκτελέσει το $\frac{1}{t}$ του έργου και

το Β θα εκτελέσει το $\frac{1}{t+12}$ του έργου

Σε 8 ώρες, που τα δυο μαζί τελειώσουν το έργο,

το Α θα εκτελέσει το $8 \cdot \frac{1}{t}$ του έργου και

το Β θα εκτελέσει το $8 \cdot \frac{1}{t+12}$ του έργου

$$\text{Άρα θα έχουμε} \quad 8 \cdot \frac{1}{t} + 8 \cdot \frac{1}{t+12} = 1$$

$$8(t + 12) + 8t = t(t + 12)$$

$$8t + 96 + 8t = t^2 + 12t$$

$$t^2 - 4t - 96 = 0$$

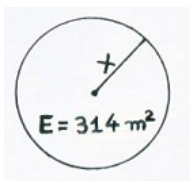
$$\Delta = 16 + 4 \cdot 96 = 16 + 384 = 400$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{4 \pm 20}{2} = 12 \quad \text{ή} \quad -8 \quad \text{απορρίπτεται αφού } t \geq 0$$

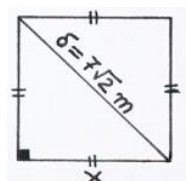
Ασκήσεις

- (1) Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.
- (2) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 25 cm^2 . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποια είναι αυτή;
- (3) Σε τραπέζιο το άθροισμα των βάσεων του και του ύψους του είναι 10.
 α) Για ποια τιμή του ύψους του το εμβαδόν του τραpezίου γίνεται μέγιστο;
 β) Πόσο είναι το εμβαδόν αυτό;
- (4) Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι 88 cm^2 .
- (5) Το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με n πλευρές δίνεται από τον τύπο: $\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Αν το πολύγωνο έχει 104 διαγωνίους, πόσες είναι οι πλευρές του;
- (6) Το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών δίνεται από τον τύπο:
 $\Sigma n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 Βρείτε το n , αν ξέρουμε ότι $\Sigma_n = 300$.
- (7) Το εμβαδόν μιας σελίδας ενός βιβλίου είναι 300 cm^2 . Αν το μήκος της είναι 5 cm μεγαλύτερο από το πλάτος της, βρείτε τις διαστάσεις της σελίδας.
- (8) Να υπολογίσετε το x σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

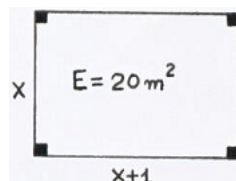
(α)



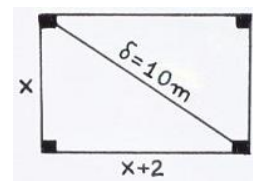
(β)



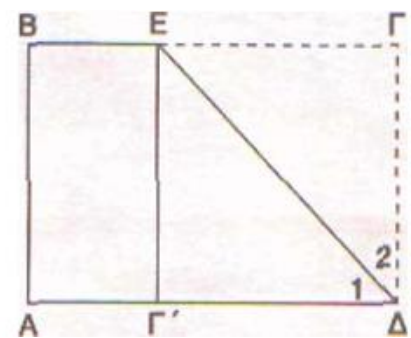
(γ)



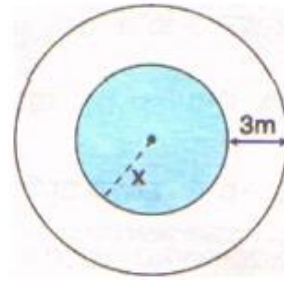
(δ)



- (9) Να βρείτε ένα θετικό αριθμό, τέτοιο ώστε :
- Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιό του.
 - Το γινόμενο του μ' έναν αριθμό, που είναι κατά 2 μικρότερος, να είναι 24.
 - Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιό του.
- (10) Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 25 cm και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς της βάσης του.
- (11) Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m. Αν το μήκος του είναι 5m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περιφράξη του.
- (12) Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.
- (13) Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των δύο αντικριστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;
- (14) Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;
- (15) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4 cm, 6 cm και 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x .
- (16) Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσο ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μια ακόμη φορά, αφού τους είπε: «Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια, με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου, αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή προσθέσετε τις ηλικίες τους βρίσκετε τον ίδιο αριθμό». Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του;
- (17) Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm. Αν διπλώσουμε ένα φύλλο ΑΒΓΔ, έτσι ώστε η πλευρά ΓΔ να πέσει πάνω στην ΑΔ, τότε το εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά τα $\frac{3}{8}$ του αρχικού εμβαδού του. Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου του βιβλίου.

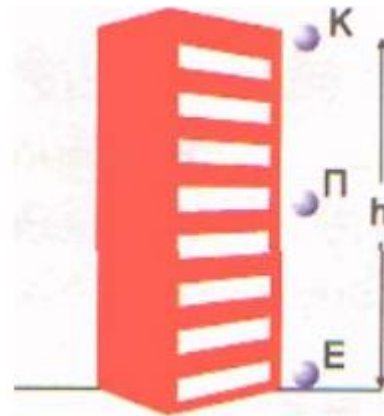


- (18) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε με πλακάκια ένα διάδρομο πλάτους 3 m. Αν ο διάδρομος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το που καλύπτει το σιντριβάνι, να βρείτε την ακτίνα του σιντριβανιού.



εμβαδόν

- (19) Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6 m, χρειάστηκαν $251,2 \text{ m}^2$ λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της δεξαμενής.



το

- (20) Παρατηρώντας την πτώση ενός σώματος, που αφέθηκε να πέσει από την κορυφή K ενός ουρανοξύστη, διαπιστώνουμε ότι στα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της κίνησής του διάνυσε μια απόσταση ΠΕ ίση με τα $5/9$ του του ουρανοξύστη. Να βρείτε πόσο χρόνο διήρκεσε η πτώση του σώματος και ποιο ήταν ύψος του ουρανοξύστη ($g = 10 \text{ m/sec}^2$).

§ 2.4 Κλασματικές Εξισώσεις

(1) Τι ονομάζεται κλασματική ή ρητή εξίσωση;

Κλασματική ή ρητή εξίσωση ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

Μέθοδος επίλυσης κλασματικών εξισώσεων

Για να επιλύσουμε μια κλασματική εξίσωση:

- Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.
- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.
- Από τις λύσεις που βρήκαμε απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Παραδείγματα

(1) Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x}$

Λύση

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x}$$

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x(x-3)}$$

$$x(x-3)\frac{x+3}{x-3} - x(x-3)\frac{1}{x} = x(x-3)\frac{3}{x(x-3)}$$

$$x(x+3) - (x-3) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x + 3 = 3$$

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 & (\text{απορρίπτεται λόγω περιορισμών}) \\ \text{ή} \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

(2) Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{3x-2x^2} = \frac{5}{x}$.

Λύση:

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{3x-2x^2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{x(3-2x)} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

Περιορισμοί :
ΕΚΠ: $x(x-3) \neq 0$
 $x \neq 0, 3$

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow \quad (\text{Πρέπει } x(2x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq \frac{3}{2})$$

$$x(2x-3) \frac{1}{2x-3} - x(2x-3) \frac{3}{x(2x-3)} = x(2x-3) \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

$$x-3 = 5(2x-3) \Leftrightarrow$$

$$x-3 = 10x-15 \Leftrightarrow$$

$$x-10x = 3-15 \Leftrightarrow$$

$$-9x = -12 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{12}{9} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{4}{3}.$$

(3) Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{3}{4-2x} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x}.$

Λύση:

$$\frac{3}{4-2x} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2(2-x)} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2(1-x)} \Leftrightarrow (\text{Πρέπει } 8(1-x)(2-x) \neq 0)$$

$$8(2-x)(1-x) \frac{3}{2(2-x)} + 8(2-x)(1-x) \frac{30}{8(1-x)} =$$

$$= 8(2-x)(1-x) \frac{3}{2-x} + 8(2-x)(1-x) \frac{5}{2(1-x)} \Leftrightarrow$$

$$12(1-x) + 30(2-x) = 24(1-x) + 20(2-x) \Leftrightarrow$$

$$12-12x+60-30x = 24-24x+40-20x \Leftrightarrow$$

$$-12x-30x+24x+20x = -12-60+24+40 \Leftrightarrow$$

$$2x = -8 \Leftrightarrow$$

$$x = -4$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\frac{3}{x-1} = -\frac{1}{2}$

ii. $\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{x-3}$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$

ii. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 2$

iii. $\frac{x+1}{x} + \frac{2x}{1-x} = -\frac{2}{x(x-1)}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 1 & \text{ii. } \frac{\psi+3}{\psi-3} - \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi^2-3\psi} \\ \text{iii. } \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{2(x-3)}{x-1} = \frac{1}{x-3} & \text{iv. } \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+5}{x^2-3x+2} \\ \text{v. } \frac{4x}{x^2-x} + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \end{array}$$

4. Να λυθούν και να διερευνηθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3 & \\ \text{ii. } \frac{2x+1}{3x-3} = \frac{7x-1}{6x+6} - \frac{2x^2-3x-45}{4x^2-4} & \\ \text{iii. } \frac{3+x}{x-4} + \frac{2-x}{2x-8} + \frac{2x-1}{3x-12} = \frac{5}{6} & \\ \text{iv. } \frac{7x+8}{21} - \frac{x+4}{8x-11} = \frac{x}{3} & \\ \text{v. } \frac{2x-3}{2x-4} - 6 = \frac{x-5}{3(x-2)} - \frac{11}{2} & \\ \text{vi. } \frac{7x+16}{21} - \frac{x+8}{4x+10} = \frac{23}{70} + \frac{x}{3} & \\ \text{vii. } \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-4} & \\ \text{viii. } \frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2(x-6)}{x-8} = \frac{7}{8} + \frac{10x-78}{3x-24} & \\ \text{ix. } \frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-8}{x-6} - \frac{x-9}{x-7} & \\ \text{x. } \frac{x+5}{x+4} - \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-15}{x-16} & \\ \text{xi. } \frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2+5x+6} & \\ \text{xii. } \frac{2+2x}{9x^2-4} - \frac{x-2}{9x^2+12x+4} = \frac{x+4}{9x^2-4} & \\ \text{xiii. } \frac{3}{x-2} - \frac{4}{5x-15} = \frac{x-1}{x^2-5x+6} & \\ \text{xiv. } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0 & \\ \text{xv. } \frac{1}{3x-1} + \frac{2(x+1)}{x-1} - \frac{3x^2+1}{3x^2-4x+1} = 1 & \\ \text{xvi. } \frac{1}{x + \frac{1}{1 - \frac{x+1}{x-3}}} = 1 & \end{array}$$

$$xvii. \quad \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}$$

$$xviii. \quad \frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{3}{14-x}$$

$$xix. \quad \frac{2x}{3} + \frac{\frac{3x-5}{4} - \frac{5x-3}{6}}{\frac{9}{4x-3} - \frac{2x-5}{4}} = \frac{2x-4}{3}$$

$$xx. \quad \frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} + \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{x}{1-x}} + \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{x}{1+x}} + \frac{3}{2x} = 0$$

§ 2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις μ' ένα άγνωστο**A) Διάταξη πραγματικών αριθμών**

Σύγκριση πραγματικών αριθμών που παριστάνονται με σημεία ενός άξονα.

Άξονας πραγματικών αριθμών, ονομάζεται η ευθεία στην οποία ορίζουμε ένα σημείο στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 0 και δεξιά αυτού άλλο ένα σημείο στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 1. Τότε σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός και το αντίστροφο σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα σημείο του άξονα.

Διάταξη πραγματικών αριθμών ονομάζουμε την τοποθέτηση τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Ανισότητα ονομάζουμε μια σχέση διάταξης μεταξύ πραγματικών αριθμών.

Αν στον άξονα έχουμε δύο αριθμούς τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα.

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν άλλο αριθμό β όταν ο α βρίσκεται στον άξονα δεξιότερα του β και συμβολίζουμε $\alpha > \beta$.

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μικρότερος** από έναν άλλο αριθμό β όταν ο α βρίσκεται στον άξονα αριστερότερα του β και συμβολίζουμε $\alpha < \beta$.

Σύγκριση πραγματικών αριθμών που δεν παριστάνονται με σημεία ενός άξονα.

Θα λέμε ότι ο αριθμός α είναι **μεγαλύτερος** από τον β , και θα συμβολίζουμε με $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Δηλαδή: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

Θα λέμε ότι ο αριθμός α είναι **μικρότερος** από τον β , και θα συμβολίζουμε με $\alpha < \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός.

Δηλαδή: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

Πορίσματα

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

Θα λέμε ότι ο αριθμός α είναι **μεγαλύτερος ή ίσος** από τον β , και θα συμβολίζουμε με $\alpha \geq \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός ή μηδέν.

Δηλαδή: $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq 0$

Θα λέμε ότι ο αριθμός α είναι **μικρότερος ή ίσος** από τον β , και θα συμβολίζουμε με $\alpha \leq \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός ή μηδέν.

Δηλαδή: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \leq 0$

Δύο αριθμοί λέγονται **ομόσημοι**, αν και οι δύο είναι θετικοί ή αν και οι δύο είναι αρνητικοί.

Δύο αριθμοί λέγονται **ετερόσημοι**, αν ο ένας είναι θετικός και ο άλλος είναι αρνητικός αριθμός.

Αξιώματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Αξιώματα		Συμβολισμός
(1)	Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός	Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$
(2)	Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός	Αν $\alpha < 0$, $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
(3)	Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός	Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0)$ τότε $\alpha \cdot \beta > 0$
(4)	Το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός	Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0)$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 0$
(5)	Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός	Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta < 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0)$ τότε $\alpha \cdot \beta < 0$
(6)	Το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός	Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta < 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0)$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$

Β) Ιδιότητες της διάταξης

Ιδιότητα		Συμβολισμός
(1)	Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$
(2)	Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$
(3)	Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

	θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	
(4)	Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $a > b$ και $\gamma > 0$ τότε $\frac{a}{\gamma} > \frac{b}{\gamma}$
(5)	Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.	Αν $a > b$ και $\gamma < 0$ τότε $a \cdot \gamma < b \cdot \gamma$
(6)	Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.	Αν $a > b$ και $\gamma < 0$ τότε $\frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\gamma}$
(7)	Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν $a > b$ και $\gamma > \delta$ τότε $a + \gamma > b + \delta$
(8)	Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.	Αν a, b, γ, δ θετικοί αριθμοί με $a > b$ και $\gamma > \delta$ τότε $a \cdot \gamma > b \cdot \delta$

Παρατηρήσεις:

Πρόταση		Συμβολισμός
(1)	Το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός	$a^2 \geq 0$
(2)	Αν το άθροισμα τετραγώνων δύο αριθμών είναι μηδέν τότε οι αριθμοί είναι ίσοι με μηδέν	Αν $a^2 + b^2 = 0$, τότε $a = 0$ και $b = 0$
(3)	Ο αντίστροφος ενός θετικού αριθμού είναι	Αν $a > 0$, τότε $\frac{1}{a} > 0$

	θετικός αριθμός	
(4)	Ο αντίστροφος ενός αρνητικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός	Αν $a < 0$, τότε $\frac{1}{a} < 0$
(5)	Οι αντίστροφοι δύο ομόσημων αριθμών δημιουργούν ανισότητα αντίθετης φοράς	Αν a, β ομόσημοι και $a > \beta$, τότε $\frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$
(6)	Οι αντίστροφοι δύο ετερόσημων αριθμών δημιουργούν ανισότητα ίδιας φοράς	Αν a, β ετερόσημοι και $a > \beta$, τότε $\frac{1}{a} > \frac{1}{\beta}$
(7)	Αν a, β θετικοί με $a > \beta$ και n φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός, τότε $a^n > \beta^n$, και αντίστροφα	
(8)	Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη	
(9)	Δεν επιτρέπεται να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη	

Μεθοδολογία για τις ασκήσεις

- Πάμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος της ανισότητας
- Παραγοντοποιούμε το 1^ο μέλος της ανισότητας
- Καταλήγουμε σε προφανή ανισοτική σχέση

Παραδείγματα

(1) Αν $a > -3$, να αποδείξετε ότι $6 + 2a > 3 + a$

Λύση:

$$6 + 2a > 3 + a$$

$$6 + 2a - 3 - a > 0$$

$$a + 3 > 0 \text{ (ισχύει)}$$

(2) Αν $a > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $a + \beta > 1 + a\beta$

Λύση:

$$a + \beta > 1 + a\beta$$

$$a + \beta - 1 - a\beta > 0$$

$$(a - 1) + \beta(1 - a) > 0$$

$$(a - 1) - \beta(a - 1) > 0$$

$$(a - 1)(1 - \beta) > 0 \text{ (ισχύει)}$$

(3) Να αποδείξετε ότι $a^2 + 9 \geq 6a$

Λύση:

$$a^2 + 9 \geq 6a$$

$$a^2 + 9 - 6a \geq 0$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 \geq 0$$

$$(a - 3)^2 \geq 0 \text{ (ισχύει)}$$

(4) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$

Λύση:

$$(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta + 8\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\alpha\beta + 8\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 6\alpha\beta + 9\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 \geq 0$$

$$(\alpha + 3\beta)^2 \geq 0 \text{ (ισχύει)}$$

Ασκήσεις

(1) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$.

(2) Να αποδείξετε ότι $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

(3) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(4) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

a. $\text{Αν } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$

b. $\text{Αν } x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

(5) Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις

i) $x + y$ ii) $x - y$ iii) $\frac{x}{y}$ iv) $x^2 + y^2$

(6) Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές :

i) της περιμέτρου ii) του εμβαδού του νέου ορθογωνίου

(7) Αν $0 \leq \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$

(8) Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς :

Έστω $x > 5$. Τότε $x > 5$

$$5x > 25$$

$$5x - x^2 > 25 - x^2$$

$$x(5 - x) > (5 + x)(5 - x)$$

$$x > 5 + x$$

$$0 > 5$$

(9) Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$.

(10) Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \geq 4$

(11) Να αποδείξετε ότι:

- i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ ii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$
- (12) Να δείξετε ότι:
- i) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ ii) $\beta^2 + 6\beta + 11 > 0$
- (13) Αν $x > 2$ τότε $x^3 > 2x^2 - x + 2$
- (14) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \gamma^2 \geq 2\beta(\alpha - \beta + \gamma)$
- (15) Αν α, β είναι ομόσημοι αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$
- (16) Αν $\alpha + \beta = 1$ να δειχθεί ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$
- (17) Αν $x > 0$ να συγκριθούν οι αριθμοί: $x^2 + \frac{1}{x^2}$ και $x + \frac{1}{x}$
- (18) Να αποδείξετε ότι: $x^2 + y^2 + z^2 + 14 \geq 2x - 4y + 6z$
- (19) Για τους θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, να αποδείξετε ότι:
- $$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} < \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta}$$
- (20) Αν $\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma(\alpha + 2\beta) + 5\gamma^2 \leq 0$ να αποδείξετε ότι: $\alpha = \frac{\beta}{2} = \gamma$
- (21) Αν $3\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι: $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{4} < \frac{\beta}{3}$
- (22) Αν x, y θετικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι: $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} < 1$
- (23) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε να αποδείξετε ότι: $\alpha - \delta < \beta - \gamma$
- (24) Αν $\alpha > \beta > \gamma$ τότε να δείξετε ότι: $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) < 0$
- (25) Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι:
- i) $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$ ii) $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1) \geq 8\alpha\beta\gamma$
- (26) Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι:
- i) $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ ii) $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$
- (27) Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β και γ με $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Να αποδείξετε ότι: α)
- $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \quad \beta) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 9$$
- (28) Αν $0 < x < 1$ και $-2 < y < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων $x + y, -y, 2x + 3y, x - y, \frac{y}{x}$

(29) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει $2 < x < y$. Να γράψετε σε μια σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς $x^2, y^2, (y+1)^2, (x-1)^2$

(30) Αν v φυσικός αριθμός να δειχθεί $\frac{v^2 + 2v + 3}{v^2 + 4} \leq 6$

(31) Αν $A = 2^{65}$ και $B = 5^{22} - 125^7$, να αποδειχθεί ότι $A > B$.

(32) Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x, y . Να εκφράσετε με μαθηματικές σχέσεις τις προτάσεις “ Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι μικρότερο από 10 m^2 ” και “ Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι τουλάχιστον 45 m ”

Γ) Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' ένα άγνωστο

Για την επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού μ' ένα άγνωστο ακολουθούμε τα ίδια βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση των εξισώσεων πρώτου βαθμού μ' ένα άγνωστο. Με την διαφορά ότι όταν διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και τα δύο μέλη της ανίσωσης, αν αυτός είναι αρνητικός αλλάζουμε την φορά της ανίσωσης.

π.χ.

Να επιλύσετε την ανίσωση: $\frac{33}{10} - \frac{3(x+1)}{5} < 4 + \frac{2(x-3)+1}{10}$

Λύση:

$$\frac{33}{10} - \frac{3(x+1)}{5} < 4 + \frac{2(x-3)+1}{10}$$

$$\frac{33}{10} - \frac{3x+3}{5} < 4 + \frac{2x-6+1}{10}$$

$$\frac{33}{10} - \frac{3x+3}{5} < 4 + \frac{2x-5}{10}$$

$$10 \cdot \frac{33}{10} - 10 \cdot \frac{3x+3}{5} < 10 \cdot 4 + 10 \cdot \frac{2x-5}{10}$$

$$33 - 2(3x+3) < 40 + (2x-5)$$

$$33 - 6x - 6 < 40 + 2x - 5$$

$$-6x - 2x < 40 - 5 - 33 + 6$$

$$-8x < -38 + 46$$

$$-8x < 8$$

$$\frac{-8x}{-8} > \frac{8}{-8}$$

$$x > -1$$

Ασκήσεις

(1) Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

a. $7x + 3 \leq 15 + 4x$

b. $x + 5 > -3$

c. $-(2-x) > 3x-2$

d. $-(7+x) < 4x-1$

(2) Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

a. $4(\omega-2) > \omega-2$

b. $3x+3-(x-1) \geq 5-x$

c. $4y-2-(y+3) < 3(y+3)+2$

d. $5(2-t) < t-2$

(3) Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

a. $\frac{2x-3}{4} - \frac{3-x}{5} > 2$

b. $3(1-x) - \frac{2}{3}(x+2) < \frac{x}{2}$

c. $x+5 + \frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{2} > 0$

d. $\frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \right) - \frac{x+1}{6} > 3$

e. $\omega - \frac{3-\omega}{3} > \frac{\omega+1}{2} - \frac{\omega-2}{4}$

f. $t + \frac{t+1}{3} > \frac{2t-1}{4} + \frac{11t}{12}$

(4) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

a. $x-3 < 2$ και $4-x < 3$

b. $3(x-1)+x > 7-x$ και $6x-7 \leq 2(x+2)+9$

c. $4x-1 > 3(1-x)+10$ και $2(1-x) \geq 8$

d. $2y-8 > \frac{3}{4}(y+1)$ και $\frac{3}{2}y + \frac{1}{12} < y-2$

e. $4x-3 < 5$ και $2(x-3) > -4$ και $2x \geq 3(x-1)$

f. $\frac{2x+3}{2} > \frac{3x-1}{3}$ και $3(2x-1)+x > -3(x+4)-1$

και $4+x > 3(x-1)$

(5) Να επιλύσετε και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων:

a. $-8 < 3x+1 \leq 22$

b. $-2 < 3-2x < 4$

c. $4 \leq 6x-2 \leq 16$

- (6) Για ποιες τιμές του θετικού ακεραίου αριθμού μ , έχουμε ότι $A = 2(\mu - 2) - 3$ είναι θετικός;
- (7) Για ποιες τιμές του αριθμού a , η ανίσωση $3x - 2a - 1 > a(x + 1)$ έχει λύση τον αριθμό $x = -1$.
- (8) Η Ιλάρια είχε τετραπλάσια χρήματα από τη Βερόνικα, αλλά δαπάνησε 15€ και τώρα έχει λιγότερα από τη Βερόνικα. Να αποδείξετε ότι η Βερόνικα έχει λιγότερα από 5€.
- (9) Ο Κωνσταντίνος έχει γράψει τρία διαγωνίσματα με βαθμούς 12, 14, 15. Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο επόμενο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο πάνω από 15;

Εξισώσεις - Ανισώσεις

§ 2.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Κάθε εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει η μπορεί να πάρει τη μορφή :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \neq 0$$

A. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

(Ελλιπείς μορφές: $\alpha x^2 + \beta x = 0$ και $\alpha x^2 + \gamma = 0$)

Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Αν $x^2 = a \geq 0$ τότε $x = \pm \sqrt{a}$

Αν $x^2 = a < 0$ τότε η εξίσωση αδύνατη

Ασκήσεις

1 Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(x-2) \cdot (x-3) = 0$

ii. $3(x-1)x^2 = 0$

iii. $(1-2\psi)\psi = 0$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^2 - 5x = 0$

ii. $3x^2 = 6x$

iii. $12x^2 + 15x = 0$

3 Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^2 - 25 = 0$

ii. $3x^2 - 12 = 0$

iii. $x^2 - 8 = 0$

iv. $8x^2 = 18$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^2 + 15 = 0$

ii. $3x^2 + 12 = 0$

5 Να λυθούν οι εξισώσεις : i.

$(x^2 - x) \cdot (x^2 - 4) = 0$

ii. $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2) = 0$

iii. $x^3 - x = 0$

iv. $x^3 = 4x$

B. Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου.

☒ Επίλυση της εξίσωσης : $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Η αλγεβρική παράσταση : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ λέγεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης και το πρόσημό της καθορίζει το πλήθος των ριζών της εξίσωσης. Ισχύουν :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$
Αν $\Delta > 0$	έχει δύο λύσεις άνισες, τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2}$
Αν $\Delta = 0$	έχει μια διπλή λύση, την $x = -\frac{\beta}{2}$
Αν $\Delta < 0$	Δεν έχει λύση.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

☆

i. $x^2 - 3x + 2 = 0$

iii. $2x^2 - x - 3 = 0$

ii. $x^2 + x - 2 = 0$

iv. $10x^2 + x - 2 = 0$

☆

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^2 + 3x - 2 = 0$

iii. $2x^2 + 6x + 3 = 0$

ii. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

iv. $7x^2 - 4x + 1 = 0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $7x^2 - 5x + 9 = 3(2x^2 + 1)$

iii. $(x+1)^2 - 3x(2)1 = (x-)^2$

ii. $(2x+1)^2 + 5(2)6 =$

iv. $3x^2 - 3(x-1)(2x-1) = 2x+1$

v. $7x^2 - (3x - 1)^2 = x + 2$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x - \frac{x^2 - 2}{2} = -3$

ii. $x^2 - \frac{2x - 1}{6} = x - \frac{x^2}{6}$ **3**

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

ii. $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

iii. $x^3 - x^2 = x - 1$

iv. $x^5 + x^4 = x + 1$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(x - 1) \cdot (x^2 - 9) = (x + 3) \cdot (x^2 - 1)$

ii. $(5x - 10) \cdot (x - 1)^2 = (3x - 6) \cdot (x^2 - 1)$

7. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

i. $x^2 + x - 6$

ii. $x^2 - 7x + 12$

iii. $2x^2 - x - 1$

iv. $5x^2 + x - 4$

8. Απλοποιήστε τις παρακάτω κλασματικές παραστάσεις:

α) $\frac{x^2 + 3x - 18}{4x - 12}$

β) $\frac{x^2 - 25}{-6x + 5}$

§ 2.4 Κλασματικές Εξισώσεις

☑ Μεθοδολογική παρατήρηση !!!

Αν θέλουμε να λύσουμε μια κλασματική εξίσωση (δηλ εξίσωση με μεταβλητή x στον παρονομαστή) τότε:

- Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.
- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.
- Από τις λύσεις που βρήκαμε απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

🔗 Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση :

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x}$$

Λύση

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x}$$

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x(x-3)}$$

$$x(x-3) \frac{x+3}{x-3} - x(x-3) \frac{1}{x} = x(x-3) \frac{3}{x(x-3)}$$

$$x(x+3) - (x-3) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x + 3 = 3$$

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ή} \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{array} \right. \quad (\text{απορρίπτεται λόγω περιορισμών})$$

Περιορισμοί :
ΕΚΠ: $x(x-3) \neq 0$
 $x \neq 0, 3$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{3}{x-1} = -\frac{1}{2}$

ii. $\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{x-3}$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$

ii. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 2$

$$\text{iii. } \frac{x+1}{x} + \frac{2x}{1-x} = -\frac{2}{x(x-1)}$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i. } \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\text{iii. } \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{2}{x-1} = \frac{-}{x-3}$$

$$\text{v. } \frac{4x}{x^2-x} + \frac{x}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

$$\text{ii. } \frac{\psi+3}{\psi-3} - \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi^2-3\psi}$$

$$\text{iv. } \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+5}{x^2-3x+2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α.	$3(x + 2) - 4x = -3(1 - 2x) + 5$	β.	$\frac{x-5}{3} = \frac{x}{2}$
γ.	$\frac{7-2x}{3} + \frac{5x}{4} = 1$	δ.	$\frac{x-2}{3} + 1 = \frac{4x-7}{4} - 5$
ε.	$\sqrt{3}x + 4 = x + \sqrt{48}$		

2. Να βρείτε τον αριθμό α ώστε η εξίσωση: $(\alpha + 1)x + 5 = x + 3\alpha$ να έχει ως λύση τον αριθμό 1.

3. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση: $(2\mu + 1)x + 1 = x + 4\mu$ είναι αδύνατη και για ποιες τιμές είναι αδύνατη;

Προβλήματα

4. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, ώστε να έχουν άθροισμα 24.

5. Το άθροισμα της ηλικίας ενός πατέρα και της κόρης του είναι 50 έτη. Πριν από 5 χρόνια η ηλικία του πατέρα ήταν τριπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Να βρεθεί η σημερινή τους ηλικία.

6. Να βρείτε τα ζεύγη των λύσεων της εξίσωσης: $3x + 2y = 15$ όταν ο x παίρνει ακέραιες τιμές στο διάστημα από 1,5 έως 4,2 .

Εξισώσεις 2ου Βαθμού

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α.	$x^2 + 1 = 0$	β.	$-2x^2 + 8 = 0$
γ.	$x^2 - 6 = 0$	δ.	$-3x^2 - 7 = 0$
ε.	$5x^2 - 7x = 0$	στ.	$2x^2 = -5$
ζ.	$-4x^2 = 6$	η.	$2x^2 + 4x = 0$
θ.	$x^2 - 1 = 0$	ι.	$4x^2 = 64$

ια. $3x^2 + x = 0$

ιγ. $16x^2 = 100$

ιε. $2x^2 + 8 = 0$

ιβ. $2x^2 + x = 0$

ιδ. $x^2 = 5x$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2 + 6x + 8 = 0$

γ. $x^2 + x + 1 = 0$

ε. $x^2 - 6x + 9 = 0$

ζ. $x^2 + 3x - 10 = 0$

β. $x^2 - 4x + 4 = 0$

δ. $x^2 - 5x + 6 = 0$

στ. $x^2 - x - 12 = 0$

η. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} = 0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x + 2)^2 + 5 = 0$

β. $(3x - 1)^2 = 9$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x + 2)^2 + (x - 7)^2 = 0$

β. $(x + 1)^2 + (3x + 7)^2 = 0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x - 1)^2 = -x$

β. $(4x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 9$

γ. $(x + 4)^2 - (x + 6)^2 = -8$

δ. $(x - 2)(x - 1) = 2x^2 + 4$

ε. $2(9 - x^2) - 4x = 3x(1 - x) + 1$

στ. $(x - 2)^2 + 2x(x + 2) = 2(3x + 10)$

ζ. $(2x - 1)^2 - (3 - x)^2 = (x + 1)(2x - 1)$

η. $(x^2 - 2)^2 - 5(x^2 - 2) + 6 = 0$

θ. $(x - 2)(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$

ι. $(4x - 1)^2 - 9 = (x - 1)^2$

ια. $(x - 2)(x + 5) = (x - 3)(x + 3) + 5$

ιβ. $(5x - 3)(x^2 + 5x + 2) = -10x + 6$

ιγ. $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$

ιδ. $(x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) + 4 = 0$

ιε. $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 29$

ιστ. $5(x^2 - 2x) - 3(x - 2)^2 = 28$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(x + 1)(2x - 3) = 0$

γ. $(4x^2 - 9)(2x^2 + 4x) = 0$

β. $(x - 1)(x^2 - 4) = 0$

δ. $x^2(x^2 + x + 4) = 0$

ε. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0$

στ. $x(x^2 + 1)(x - 3) = 0$

ζ. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 6x + 9) = 0$

η. $(x + 5)(x - 1)(x + 2) = 0$

θ. $(3x^2 + 6)(3x^2 - 6)(3x^2 + 6x) = 0$

ι. $x^4 - 36 = 0$

ια. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

ιβ. $2x^3 + 8x^2 - 24x = 0$

ιγ. $3x^8 - 27x^6 = 0$

ιδ. $(x + 4)^2 - (x + 6)^2 = 0$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2 + |x| = 0$

β. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

γ. $x^6 - 9x^3 = -8$

δ. $\sqrt{2}x^2 + 5x + 2\sqrt{2} = 0$

ε. $x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$

στ. $2x^2 + (1 - 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

ζ. $2x^2 + (1 + 2\sqrt{5})x - \sqrt{5} = 0$

η. $x^2 + (\alpha + 1)x - 2\alpha^2 + \alpha = 0$

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 2(\alpha\beta - 1) = 0$. Αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

15. Για ποιες τιμές των κ, λ η παρακάτω εξίσωση έχει μοναδική λύση το 0;

$$5x^2 + (2\kappa - 1)x + \lambda + 4 = 0$$

16. Για τις διάφορες τιμές του λ , να βρεθεί το πλήθος των ριζών της παρακάτω εξίσωσης:

$$(1 - \lambda)x^2 + (3 + 2\lambda)x - \lambda = 0$$

17. Για ποιες τιμές των κ, λ η παρακάτω εξίσωση έχει διπλή ρίζα; Κατόπιν να βρεθεί η ρίζα αυτή.

$$x^2 + (\kappa - 1)x + \lambda^2 = 0$$

18. Για ποιες τιμές του α η εξίσωση: $x^2 + 9 = 4\alpha x$ είναι αδύνατη ενώ η εξίσωση: $4x^2 + 4x + \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες;

19. Να δείξετε ότι αν $\beta \neq 0$ και $\alpha > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ τότε η παρακάτω εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες:

$$x^2 + 2\sqrt{\alpha}x + \beta = 0$$

20. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = 3x^2 - 9$ και $B(x) = (x - 1)^2$.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $\Gamma = A - B$.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις: $A = 0$, $B = 0$ και $\Gamma = 0$.

21. α. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$). Αν $\alpha + \gamma = \beta$ τότε να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = -1$ και $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$.

β. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$). Αν $\alpha + \gamma = -\beta$ τότε να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = 1$ και $x = \frac{\gamma}{\alpha}$.

22. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 6x + \lambda = 0$.

α. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει λύση;

β. Να λυθεί η εξίσωση, όταν το λ πάρει την μεγαλύτερη τιμή από τις παραπάνω.

Προβλήματα 2ου Βαθμού

23. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 15 και γινόμενο 56.

24. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $x + 2$, x , $x - 2$. Να βρείτε τον αριθμό x , καθώς και το εμβαδό και την περίμετρο του τριγώνου.

25. Σε διψήφιο αριθμό το ψηφίο των δεκάδων είναι μεγαλύτερο κατά 3 από το ψηφίο των μονάδων. Να βρεθεί ο αριθμός αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων είναι 29.

26. Τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσα με τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου.

27. Βρείτε δύο αριθμούς, που να έχουν άθροισμα 9 και το άθροισμα των αντιστροφών τους να είναι $\frac{9}{20}$.

28. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, που η διαφορά των αντιστροφών τους να είναι ίση με το $1/12$.

29. Μια διάσταση ενός ορθογωνίου είναι 18m και η άλλη του διάσταση είναι ίση με το μήκος πλευράς τετραγώνου. Αν το εμβαδό του ορθογωνίου είναι ίσο με το εξαπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου, τότε να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

Κλασματικές Εξισώσεις

30. Να λυθούν οι παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

α. $\frac{5}{x-2} = 4$

β. $\frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+2}{3x-6}$

γ. $x - \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{x}$

δ. $\frac{3}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{-1+5x}{x^2+1}$

$$\epsilon. \frac{4x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{8x}{x^2-4} = 0$$

$$\sigma\tau. \frac{8}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} = \frac{x}{9x^2-1}$$

$$\zeta. \frac{x+1}{x^2-x-2} = \frac{2}{x-2} - \frac{2x-1}{2x+2}$$

$$\eta. \frac{4x+2}{x^2-5x+6} = \frac{3}{x-2} - \frac{4}{3-x}$$

$$\theta. \frac{2x}{x^2-4} = 1 + \frac{1}{x-2}$$

$$\iota. \frac{3}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} = \frac{-2}{x+2}$$

$$\iota\alpha. \frac{x-1}{x^2+2} - \frac{3}{x^2-4} = 0$$

31. Να λυθούν οι κλασματικές εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{2x+1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = 1 + 7 \cdot \frac{x-1}{x^2-4x+3}$$

$$\beta. \frac{3x-1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} = 2 \cdot \frac{1-x}{x-2}$$

$$\gamma. \frac{x}{2x-4} - \frac{x+2}{3x+3} = \frac{x^2}{6(x-2)(2x-1)}$$

$$\delta. \frac{3}{y} - \frac{2}{y+3} = \frac{y}{y^2-9}$$

$$\epsilon. \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{(2x+3)(2x-1)}$$

$$\sigma\tau. \frac{8}{2x^2-x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{x}$$

$$\zeta. \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x-4}$$

$$\eta. \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$$

$$\theta. \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x}$$

$$\iota. \frac{x^2-x-1}{x-1} - \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x}{2 \cdot (x^2-1)}$$

$$\iota\alpha. \frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{2x-5}{x^2-x-12} = \frac{7x-10}{x^2-6x+8}$$

$$\iota\beta. \frac{3x}{x^2-x-2} + \frac{2x+5}{x^2-2x-3} = \frac{5x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\iota\gamma. \frac{3x-5}{2x-3} - \frac{2x+3}{3x+5} + \frac{5x^2+2x}{(3x+5)(3-2x)} = 0$$

32. Να λυθεί η εξίσωση: $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = -1$

33. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. 2x^{-2} - 5x^{-1} + 3 = 0$$

$$\beta. x^{-2} - 4x^{-1} + 3 = 0$$

34. Να λυθεί η εξίσωση: $\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 2 = 0$

35. Αν $A = 4x^2 + 12x + 9$, $B = 4x^2 - 2x$ και $\Gamma = (x - 2)^2 - 9$, τότε να λυθούν οι εξισώσεις:

- α. $A = 0$ β. $B = 0$ γ. $\Gamma = 0$ δ. $\frac{\Gamma}{B} = 0$

36. Αν είναι:

- $A = (8x - 6)(4 - 2x) + (6x - 3)(4 - 2x)$
- $B = (10x - 6)^2 - (4x - 3)^2$

τότε να λυθούν οι εξισώσεις:

- α. $A = 0$ β. $B = 0$ γ. $\frac{A}{B} = 0$ δ. $\frac{B}{A} = 0$

37. Αφού απλοποιήσετε την παράσταση A , να λύσετε την εξίσωση $A = 9$.

$$A = \frac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{5x}{2x^2 + 3x} - \frac{20x}{9 - 4x^2}$$

38. Αφού απλοποιήσετε τις παρακάτω ρητές παραστάσεις A και B , να λύσετε την εξίσωση $A - B = 0$.

$$A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}, \quad B = \frac{9 \cdot (2x + 1)^2 - (4x - 1)^2}{4 \cdot (x^2 + 4x + 4)}$$

39. Δίνονται τα κλάσματα $A = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - 4}$ και $B = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$.

- α. Να βρείτε πότε ορίζονται.
β. Να τα απλοποιήσετε.
γ. Να λύσετε την εξίσωση: $A = B$.

40. Ομοίως για τα κλάσματα $A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$ και $B = \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 9}$.

41. Δίνονται τα κλάσματα $K = \frac{4x^3 + 8x^2}{4x^3 - 16x}$ και $\Lambda = \frac{9x^2 - 36}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$. Αφού τα απλοποιήσετε, στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $K - \Lambda = \frac{8}{x^2 - 4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΣΤΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**Ασκήσεις αντικειμενικού τύπου

1. Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης του πίνακα στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Εξίσωση	α	β	γ
$2x^2 - x + 3 = 0$	2	-1	3
$-x^2 + 3x = 2$			
$(x-1)^2 = 3x^2 - x$			
$\lambda(x^2 - x) = \lambda^2 + x^2 - x$			
$\mu(2x^2 - 1) = (x - \mu)^2 - 3x$			

2. Να συμπληρώσετε στις παρακάτω προτάσεις τα κενά ώστε αυτές να είναι αληθείς

- i) Αν η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + 5x - \lambda = 0$ δεν είναι 2ου βαθμού τότε
- ii) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 3 = 0$ είναι 2ου βαθμού όταν
- iii) Το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ όταν
- iv) Το 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ όταν
- v) Η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 2 = 0$ είναι της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ με $a = \dots$, $\beta = \dots$ και $\gamma = \dots$
- vi) Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει ρίζες πραγματικές όταν
- vii) Αν $a\gamma < 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$
- viii) Αν δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε.....

ix) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $ax^2 + bx + \gamma \neq 0$, $a \neq 0$ τότε.....

x) Αν υπάρχει τιμή του x ώστε $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε.....

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ είναι δευτέρου βαθμού.

ii) Αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ (1) τότε:

- Αν $\Delta \geq 0$ τότε η (1) έχει ρίζες πραγματικές.
- Αν η (1) έχει δυο ρίζες άνισες τότε $\Delta \geq 0$.
- Αν $\alpha\gamma < 0$ τότε η (1) έχει δυο ρίζες άνισες.
- Αν $\Delta < 0$ τότε $ax^2 + bx + \gamma \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν $\Delta = 0$ τότε η διπλή ρίζα της (1) είναι η $x_0 = -\frac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\Delta > 0$ και $\gamma = 0$ τότε η (1) έχει ρίζα το 0.
- Αν το 1 είναι ρίζα της (1) τότε $a + b + \gamma = 0$.
- Αν a, γ ομόσημοι τότε η (1) δεν έχει καμιά πραγματική ρίζα.
- Αν η (1) δεν έχει δυο ρίζες άνισες τότε $\Delta < 0$.
- Αν η (1) δεν έχει καμιά πραγματική ρίζα, τότε a, γ ομόσημοι.
- Αν η (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα, τότε $\Delta \geq 0$.

iii) Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού μπορεί να έχει τρεις ρίζες

iv) Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $a\lambda^2 + b\lambda + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε $\Delta \geq 0$

v) Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ (1) έχει δυο τουλάχιστον ρίζες, τότε η (1) θα έχει δυο ακριβώς ρίζες.

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε

$$a. \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$b. \quad x_1 x_2 = -\frac{\gamma}{a}$$

ii) Η εξίσωση $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς a και b .

iii) Αν $\gamma < 0$ τότε η εξίσωση $x^2 + bx + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

iv) Αν η εξίσωση $x^2 + bx + \gamma = 0$ (1) έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$ και $\gamma > 0$ τότε έχει δύο ρίζες ομόσημες.

v) Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες:

- αντίθετες τότε $\beta = 0$
- αντίστροφες τότε $\alpha = \gamma$

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης: $2x^2 - 6x - 1 = 0$ είναι 3.

ii) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $3x^2 - x - 6 = 0$ είναι -2.

iii) Η εξίσωση που έχει ρίζες τους 2, -3 είναι η $x^2 - x - 6 = 0$.

iv) Αν οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ είναι ετερόσημες τότε $\alpha\gamma > 0$.

v) Υπάρχει εξίσωση της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ που έχει ρίζες συγχρόνως αντίθετες και αντίστροφες.

6. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) Η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + \lambda x + 5 = 0$ είναι δευτέρου βαθμού όταν:

- A. $\lambda \neq 0$ B. $\lambda = 1$ Γ. $\lambda \neq 1$ Δ. $\lambda > 1$

ii) Αν η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ έχει ρίζα το 0, τότε ο λ ισούται με:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 4

iii) Η εξίσωση $2x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$ έχει ρίζα το 1 όταν ο λ ισούται με:

- A. 1 B. 2 Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. $-\frac{1}{2}$

iv) Η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \mu - 2 = 0$ έχει λύση μόνο το 0 όταν:

- A. $\mu = 2$ B. $\lambda = 1$ Γ. $\mu = 2$ ή $\lambda = 1$ Δ. $\mu = 2$ και $\lambda = 1$

7. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η εξίσωση $x^2 - 5x + 2 = 0$ έχει 2 ρίζες:

- A. ετερόσημες B. αντίθετες Γ. αντίστροφες Δ. θετικές

ii) Η εξίσωση $x^2 + 3x - (\lambda^2 + 1) = 0$ έχει 2 ρίζες:

- A. αρνητικές B. αντίθετες Γ. ετερόσημες Δ. θετικές

iii) Η εξίσωση που έχει ρίζες τις -3 και 4 είναι:

A. $x^2 + x - 12 = 0$

B. $x^2 + x + 12 = 0$

Γ. $x^2 - x + 12 = 0$

Δ. $x^2 - x - 12 = 0$

iv) Η εξίσωση που έχει ρίζες τις -1 και -2 είναι: A. $x^2 + x + 2 = 0$

Γ. $x^2 + 3x + 2 = 0$ B.

$x^2 - 3x + 2 = 0$ Δ. x^2

$+ 2x + 3 = 0$

8. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α που έχουν ρίζα το 1 με την άλλη ρίζα τους που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Εξίσωση με μια ρίζα το 1	η άλλη ρίζα
Α. $x^2 + x - 2 = 0$	1. 2003
Β. $x^2 - 3x + 2 = 0$	2. -2
Γ. $x^2 - 2004x + 2003 = 0$	3. 2004
Δ. $x^2 + 2003x - 2004 = 0$	4. -2004
	5. 2

Στήλη Α	Στήλη Β
Εξίσωση	Χαρακτηρισμός ριζών
Α. $x^2 + 15x + 56 = 0$	1. ετερόσημες
Β. $x^2 - 2x - 48 = 2$	2. θετικές
Γ. $x^2 - 11x + 30 = 0$	3. αρνητικές

εξίσωση	Ρίζες
• $x^2 - 5x + 6 = 0$	•
• $x^2 + 5x + 6 = 0$	•
• $x^2 - 5x - 6 = 0$	•
• $x^2 + 5x - 6 = 0$	•

Εξίσωση	Ρίζες
• $x^2 - x - 2 = 0$	•
• $x^2 - 3x + 21 = 0$	•
• $x^2 + x - 12 = 0$	•
• $x^2 + x - 6 = 0$	•

Εξίσωση	Ρίζες
• $x^2 - (\alpha + 2)x + 2\alpha = 0$	•
• $x^2 - (1 + 2)x + 2 = 0$	• ...
• $x^2 + (3 - 2)x - 6 = 0$	•
• $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 9 = 0$	•

Ασκήσεις Εμπέδωσης

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad x^2 - 4 &= 0 \\ \text{iv)} \quad 3x^2 - x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad 2x^2 - 1 &= 0 \\ \text{iv)} \quad x^2 - 81 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad 3x^2 + 1 &= 0 \\ \text{v)} \quad 2x^2 - 3x &= 0 \end{aligned}$$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad x^2 - 16 = 0$$

$$\text{ii)} \quad 2x^2 - 18 = 0$$

$$\text{iii)} \quad -3x^2 + 12 = 0$$

$$\text{iv)} \quad 2x^2 + 8 = 0$$

$$\text{v)} \quad 4x^2 - 9 = 0$$

$$\text{vi)} \quad -3x^2 - 27 = 0$$

$$\text{vii)} \quad -9x^2 + 25 = 0$$

$$\text{viii)} \quad 36 - 16x^2 = 0$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad x^2 + 3x = 0$$

$$\text{ii)} \quad 2x^2 - 8x = 0$$

$$\text{iii)} \quad -3x^2 + 12x = 0$$

$$\text{iv)} \quad -4x^2 - 16x = 0$$

$$\text{v)} \quad 5x^2 - 30x = 0$$

$$\text{vi)} \quad -7x^2 + 35x = 0$$

$$\text{vii)} \quad 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x = 0 \quad \text{viii)} \quad -3 \cdot x^2 - 27 \cdot x = 0$$

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\text{ii)} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\text{iii)} \quad -x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\text{iv)} \quad x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\text{v)} \quad -x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\text{vi)} \quad x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\text{vii)} \quad x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$\text{viii)} \quad x^2 + 5x + 7 = 0$$

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad 2x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$\text{ii)} \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\text{iii)} \quad -2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\text{iv)} \quad 3x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\text{v)} \quad -3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\text{vi)} \quad 4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$\text{vii)} \quad 2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$\text{viii)} \quad -2x^2 + 6x - 11 = 0$$

16. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\text{ii)} \quad -3x^2 + 1 = 0$$

$$\text{iii)} \quad x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\text{iv)} \quad 5x^2 + 3 = 0$$

$$\text{v)} \quad (2x-1)^2 = x+1$$

$$\text{vi)} \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\text{vii)} \quad 3 - x(x-1) = 5$$

$$\text{viii)} \quad 2x^2 = x$$

$$\text{ix)} \quad 6x - (x-1)^2 = 8$$

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad 6x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{ii)} \quad -4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\text{iii)} \quad x(x-1) = 1$$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad 0,3x^2 + 0,9x - 3 = 0$$

$$\text{ii)} \quad -0,1x^2 + x - 2,5 = 0$$

$$\text{iii)} \quad 0,4x^2 + 2x + 2,5 = 0$$

$$\text{iv)} \quad x^2 + 0,6x - 0,4 = 0$$

$$\text{v)} \quad 0,1x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$$

$$\text{vi)} \quad 2x^2 - 0,5x - 1,5 = 0$$

19. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (3 - 2)x - 6 = 0$.

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad x^2 - (1 - 3)x - 3 = 0$$

$$\text{ii)} \quad 4x^2 - (2 - 5)x - 10 = 0$$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad x^2 + (3 + 1)x + 3 = 0$$

$$\text{ii)} \quad 2x^2 + (2 - 3)x - 3 = 0$$

$$\text{iii)} \quad 5x^2 - (2 - 10)x - 22 = 0$$

$$\text{iv)} \quad x^2 + (3 + 2)x + 6 = 0$$

$$x^2 - (3 - 22)x + 2 - 32 = 0$$

22. α λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$iii) \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{27}{4} = 0$$

$$v) -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$ii) \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$$

$$iv) -2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$vi) -\frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 = 0$$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) (x-2)(x^2+5x+4) = 0$$

$$iii) (x^2+4x)(x^2-7x+6) = 0$$

$$v) (9x^2-6x+1)(x^2-x+2) = 0$$

$$ii) (3x^2-48)(-x^2-4x+32) = 0$$

$$iv) (x^2-9x+8)(-x^2+5x-7) = 0$$

$$vi) (x^2-2x+3)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) = 0$$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x(3x+10) = 3(x+2)$$

$$iii) 2x(2x-3) = 4-5(x^2+1)$$

$$v) 3-2(x-2)(x+2) = 7(1-x)$$

$$ii) 1-x(3-5x) = x(x+2)$$

$$iv) 2x-1 = (x-6)(x+6)$$

$$vi) 4(x+2) = 4-(x-3)(x+3)$$

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) (x-1)^2 = 4x-5(2x+1)$$

$$iii) (x-1)^3 - x(x-2)(x+2) = 1$$

$$v) (x-2)^2 - (x-1)(x+1) = (x+3)^2 - 6x$$

$$ii) (2x-1)^2 - (3-x)^2 = (x+1)(2x-1)$$

$$iv) (3x+2)^2 - (x-2)(3-x) = 6-4(x-1)^2$$

$$vi) (x+2)^3 - x(x-3)^2 = 15 - (3x+1)(1-3x)$$

27. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) \frac{2x}{3} - \frac{10-3x}{4} = \frac{x^2}{6}$$

$$iii) \frac{x-2}{2} - \frac{x(6-x)}{6} = \frac{x(x-2)}{6} - \frac{x^2-2}{3}$$

$$v) \frac{4(1-7x)^2}{25} - \frac{3x(7x-1)}{5} = 2x^2+10$$

$$ii) \frac{2x+3}{6} - \frac{(x+1)(x-1)}{3} = \frac{3-x}{2}$$

$$iv) \frac{5}{6} - \frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$$

$$vi) \frac{x(3x-2)}{3} - \frac{(2x-1)^2+2}{6} = \frac{x-6}{2}$$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) |x^2-5x+5| = 1$$

$$iii) |x^2+3x-5| = |2x^2-4x+5|$$

$$ii) |x^2+2x-9| = 6$$

$$iv) |x-3| = x^2-x-6$$

Επίλυση παραμετρικών εξισώσεων και πλήθος ριζών

29. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x^2-2\alpha x+\alpha^2-1=0$$

$$ii) \alpha x^2-(1-2\alpha\beta)x-2\beta=0, \alpha \neq 0$$

30. Να λυθεί η εξίσωση: $\alpha\beta x^2-(\alpha-\beta)x-1=0, \alpha \cdot \beta \neq 0$

31. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x^2-3ax+2a^2=0$$

$$iii) x^2-\sqrt{a}x-2a=0$$

$$v) (a-x)(\beta-x)+x^2=4a^2+(x-2a)(x+2a)$$

$$vii) 2x+\frac{(2\sqrt{\beta}-x)^2-x}{2}=2\sqrt{\beta}$$

$$ii) x^2-4ax+4a^2=0$$

$$iv) 8x^2-2(2a+3\beta)x+3a\beta=0$$

$$vi) x^2-(a+\beta)x=a\beta(x-a-\beta)$$

$$viii) a^2\beta^2x^2-(a^3+\beta^3)x+a\beta=0, \alpha\beta \neq 0$$

$$\text{xi)} \frac{x^2}{\sqrt{a\beta}} + (1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})x = \alpha, \alpha, \beta > 0$$

32. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} x^2 + (a + \beta)x + a\beta = 0$$

$$\text{ii)} x^2 - (2a + 3\beta)x + 6a\beta = 0$$

$$\text{iii)} -2x^2 + (\alpha - 3)x + a - 1 = 0$$

$$\text{iv)} 2x^2 - (3a - 2)x + a(\alpha - 2) = 0$$

$$\text{v)} 2x^2 + (\alpha - 2\beta)x - a(\alpha + 2\beta) = 0$$

$$\text{vi)} -x^2 + (2a + \beta)x - a(a + \beta) = 0$$

33. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2 = 0$$

$$\text{ii)} (\lambda - 3)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 3 = 0$$

$$\text{iii)} (\lambda + 1)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0$$

$$\text{iv)} (\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 4 = 0$$

34. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να βρείτε.

$$\text{i)} x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta - 1 = 0$$

$$\text{ii)} \alpha x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 9\beta = 0, \alpha \neq 0$$

$$\text{iii)} x^2 + (2\alpha - \beta)x + \alpha^2 - \alpha\beta - 2\beta^2 = 0$$

$$\text{iv)} (\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta^2x - \alpha^2\beta^2 = 0, \alpha^2 \neq \beta^2$$

35. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να βρείτε.

$$\text{i)} \alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0, \alpha, \beta \neq 0$$

$$\text{ii)} x^2 - \left(\alpha + \frac{\alpha}{x} \right)x + 1 = 0, \alpha \neq 0$$

$$\text{iii)} (\alpha + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta + 2\gamma)x + \beta + \gamma = 0, \alpha \neq \gamma$$

$$\text{iv)} (\alpha + \beta - \gamma)x^2 + 2\beta x + \beta + \gamma - \alpha = 0, \alpha \neq \gamma - \beta$$

36. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

$$\text{i)} 4x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{ii)} 4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$\text{iii)} (x+1)(x+2) = -6$$

$$\text{iv)} x(x+2)(x-2) - (x^2-1)(x-3) = 123$$

$$\text{v)} x^2 - (a^2 - \beta^2)x - \alpha^2\beta^2 = 0, \alpha, \beta \neq 0.$$

37. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

$$\text{i)} x^2 + (\alpha - 2)x - \alpha = 0$$

$$\text{ii)} \alpha x^2 - (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta = 0, \alpha \neq 0$$

$$\text{iii)} \frac{1}{2}x^2 + (\alpha + 1)x + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\text{iv)} x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$$

38. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του λ:

$$\text{i)} x^2 - (2\lambda - 4)x - \lambda(3 - \lambda) = 0$$

$$\text{ii)} (\lambda - 3)x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$$

39. Δίνεται η εξίσωση $\mu^2 x^2 + \mu(1 + 5\mu)x - (2 + 5\mu) = 0, \mu \neq 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες στο R για κάθε $\mu \neq 0$

ii) Να λυθεί η εξίσωση

40. Αν η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει μία διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (\mu + 1)x + \frac{\lambda^2}{4} = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

41. Αν η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \frac{9}{4} = 0 \text{ είναι αδύνατη.}$$

42. Δίνεται η εξίσωση $(2a - 1)x^2 + 2(a + 5)x + \frac{a}{2} + 1 = 0$.

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης όταν το a διατρέχει το $\mathbb{R}$.

43. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 - \lambda^3 x - (|\lambda| + 1) = 0$ (1) έχει 2 ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

44. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x - \lambda^2 = 0$ (1) δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες ίσες για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

Προσδιορισμός παραμέτρου

45. Να βρείτε το a ώστε η εξίσωση $(a + 2)x^2 + (a + 1)x - |a| = 0$ να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το -1 .

46. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x + 2\Delta = 0$ (1) όπου Δ η διακρίνουσα της (1).

47. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - \Delta x - \Delta = 0$ όπου Δ η διακρίνουσα της.

48. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 + \Delta x + \Delta - 1 = 0$ όπου Δ η διακρίνουσα της.

49. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 - \beta x + \Delta = 0$ όπου Δ η διακρίνουσα της έχει ρίζες πραγματικές.

50. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - \Delta x + 2\Delta = 0$ (1) όπου Δ η διακρίνουσα της.

51. Να βρεθεί για ποια τιμή του λ η εξίσωση $(1 + \lambda)^2 x^2 + (\lambda + 3)x + 2(\lambda - 10) = 0$ έχει ρίζα το 2;
Ποια είναι η άλλη ρίζα της εξίσωσης;

52. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $(\lambda - 1)x^2 + |\lambda|x - \lambda = 0$ (1) να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το 1.

53. Να βρείτε το a ώστε η εξίσωση $(a + 2)x^2 + (a + 1)x - |a| = 0$ να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το -1 .

54. Η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0$ (1) έχει διπλή ρίζα. Να βρείτε:

i) το λ

ii) τη διπλή ρίζα της (1).

55. Η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα. Να βρείτε:

i) το λ

ii) τη διπλή ρίζα της (1).

56. Η εξίσωση $2x^2 + 2(\alpha + \beta)x + (\alpha - 2)(\beta + 4) - 2 = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα. Να βρείτε:

i) τους αριθμούς α και β

ii) τη διπλή ρίζα της (1).

57. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + (2\lambda - 4)x + \lambda = 0$ (1).

i) Να εξετάσετε αν η εξίσωση μπορεί έχει μία διπλή ρίζα για κάποια τιμή του λ .

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αδύνατη.

58. Η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + \lambda^2 x - \lambda = 0$ (1) έχει δύο ρίζες άνισες, από τις οποίες η μία είναι η $x = 1$.

- i) Να βρείτε το λ
- ii) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης (1).

59. Αν η εξίσωση $x^2 - 2(2\alpha - \beta)x - |\alpha - 1| = 0$ (1) έχει διπλή ρίζα να βρείτε τους α και β .

60. Η εξίσωση $\lambda^2 x^2 + (5\lambda - 2)x + \lambda + 2 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό -1.

- i) Να βρείτε το λ
- ii) Να δείξετε ότι το -1 είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης (1).

61. Η εξίσωση $x^2 + (4\lambda - 12)x + \lambda^2 - 12 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό 2.

- i) Να βρείτε το λ
- ii) Να δείξετε ότι το 2 είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης (1).

62. Η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό -3. Να βρείτε:

- i) το λ
- ii) την άλλη ρίζα της εξίσωσης (1).

63. Η εξίσωση $(\lambda^3 + 10)x^2 + (2\lambda^3 + 4)x + \mu^2 + 4\mu + 22 = 0$ (1) έχει διπλή ρίζα το 3.

Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .

64. Η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 7 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό -2.
i) Να βρείτε το λ
ii) Για κάθε τιμή του λ που προέκυψε, να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης (1).
65. Η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 3)x - \lambda + 6 = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.
i) Να βρείτε τις τιμές του λ
ii) Για κάθε τιμή του λ που προέκυψε, να βρείτε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης (1).
66. Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2 + (2\lambda + 1)x + |6 - 3\lambda| = 0$ (1).
i) Να βρείτε το λ , αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζα το -1
ii) Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα θεωρούμε την εξίσωση :
 $x^2 - \lambda x + \mu^2 = 0$ (2). Να βρείτε το μ , ώστε η εξίσωση (2) να έχει διπλή ρίζα.
67. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$
i) να έχει δυο ρίζες άνισες
ii) να έχει μια ρίζα διπλή
iii) να έχει πραγματικές ρίζες
iv) να μην έχει καμιά πραγματική ρίζα.
68. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - 1 = 0$ (1)
i) να έχει δυο ρίζες άνισες
ii) να έχει μια ρίζα διπλή
iii) να έχει ρίζες πραγματικές
iv) να μην έχει καμιά ρίζα πραγματική.
69. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ (1)
i) να έχει δυο ρίζες άνισες
ii) να έχει μια διπλή ρίζα
iii) έχει λύση
iv) είναι αδύνατη
70. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda + \frac{9}{4} = 0$, $\lambda \neq 0$ (1)
i) να έχει δυο ρίζες άνισες
ii) να έχει μια ρίζα διπλή
iii) να έχει ρίζες πραγματικές
iv) να μην έχει καμιά ρίζα πραγματική.
71. Η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ (1) έχει διακρίνουσα 4.
i) Να βρείτε τις τιμές του λ
ii) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.
72. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 6\lambda x + 9\lambda^2 - 1 = 0$ (1)
i) να λυθεί η εξίσωση (1)
ii) να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης (1) να ανήκουν στο διάστημα $[0, 3]$
73. Αν $\alpha^2 < 3\beta$ και $\beta > 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ (1) δεν έχει καμιά πραγματική ρίζα.

74. Αν υπάρχει λ ώστε να ισχύει η ισότητα: $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$ (1) να δείξετε ότι: $\alpha^2 > 4\beta$.
75. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση $(\alpha + 2)x^2 + (\alpha + 1)x - |\alpha| = 0$ να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το -1 .
76. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις δεν μπορούν να έχουν διπλή ρίζα:
 i) $x^2 - (\lambda + 1)x - \lambda^2 = 0$ ii) $x^2 - \lambda x - \lambda - 2 = 0$
77. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $x^2 - (2\lambda - 1)x + 1 - 2\lambda = 0$ να έχει διπλή ρίζα και μετά να βρείτε τη διπλή ρίζα.
78. Να βρείτε τα λ και μ ώστε η εξίσωση: $x^2 - (2x - \lambda) - |\lambda + 2| = 2\mu x$ να έχει μια ρίζα διπλή.
79. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση: $\alpha^2 x^2 + 2\alpha x + 1 = 0$ (1) να έχει ρίζα το $-\frac{1}{2}$ και μετά να δείξετε ότι η (1) έχει διπλή ρίζα το $-\frac{1}{2}$.
80. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 4\lambda x + 4\lambda^2 - 1 = 0$ (1)
 i) Να λυθεί η εξίσωση (1)
 ii) Να βρείτε για ποιες του λ οι ρίζες της (1) ανήκουν στο διάστημα $(-1, 3]$
81. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (4\lambda - 2)x + (2\lambda - 1)^2 = 0$ (1)
 i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό λ
 ii) Να βρείτε για ποιες του λ , η διπλή ρίζα της (1) βρίσκεται στο διάστημα $(-3, 5)$
82. Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 - x - 12 = 0$ (1) και $x^2 + (2\lambda - 9)x + \lambda^2 - 6\lambda = 0$ (2). Η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι και ρίζα της εξίσωσης (2). Να βρείτε:
 i) το λ
 ii) τις ρίζες της εξίσωσης (2)
83. Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 + (\lambda + 3)x - 4\lambda + 2 = 0$ (1) και $x^2 + (1 - 2\lambda)x - 3\lambda - 4 = 0$ (2).
 i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν την ίδια διακρίνουσα
 ii) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2)
84. Καθεμία από τις εξισώσεις: $x^2 + (\lambda - 2)x + 1 - 2\lambda = 0$ και $x^2 - \lambda x + \lambda + 8 = 0$ έχει μία διπλή ρίζα.
 i) Να βρείτε το λ
 ii) Να λύσετε τις παραπάνω εξισώσεις.
85. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο ρίζες άνισες:
 i) $x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 5)x - (\lambda^2 + 1) = 0$
 ii) $13x^2 - 7x - (3|\lambda| + 2) = 0$
86. Αν υπάρχει λ ώστε να ισχύει η ισότητα: $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \beta = 0$ (1) να δείξετε ότι $\beta \leq \alpha^2$.
87. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 2(\beta - 3\gamma) - (\gamma^2 + 2)$. Να βρείτε τα β , γ και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.

88. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = \gamma$. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.
89. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (1). Αν $\beta = \alpha + \gamma$ να δείξετε ότι η (1) έχει ρίζες πραγματικές.
90. Αν η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + 2\gamma = 0$ δεν έχει καμία ρίζα να δείξετε ότι:
 i) $\gamma > 0$
 ii) η εξίσωση $x^2 + 3\beta x + 5\gamma = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες
91. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1) και $\alpha\gamma \neq 0$. Αν $|\alpha - \gamma| = |\alpha| + |\gamma|$ να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

92. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων :

- i) $x^2 + 3x - 2 = 0$ ii) $x^2 - 5x - 4 = 0$ iii) $2x^2 - 7x + 4 = 0$
 iv) $-3x^2 + 12x + 15 = 0$ v) $-3x^2 - 3x - 1 = 0$ vi) $2x^2 + 4x + 6 = 0$

93. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων :

- i) $2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 18 = 0$ ii) $3 \cdot x^2 - 27 \cdot x + 12 = 0$
 iii) $6 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{2}{3} = 0$ iv) $\frac{3}{5} \cdot x^2 + 15 \cdot x - \frac{1}{15} = 0$
 (1).

94. Έστω η εξίσωση $(7 + 1)x^2 + 2x - 3 = 0$

- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 ii) Να βρείτε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης (1) και να τα γράψετε σαν κλάσματα με ρητό παρονομαστή.

95. i) Μια εξίσωση 2ου βαθμού έχει ρίζα το 4. Αν ισχύει $P = -4$, να βρείτε τον λόγο $-\frac{\beta}{\alpha}$.
☐

ii) Μια εξίσωση 2ου βαθμού έχει ρίζα το -2. Αν ισχύει $S = -3$, να βρείτε τον λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}$.
☐

96. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης : $\alpha x^2 - 18x + 21 = 0$, με $\alpha \neq 0$, είναι 6. Να βρείτε :

- i) τον αριθμό α
 ii) το γινόμενο των ριζών της παραπάνω εξίσωσης.

97. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης : $\alpha x^2 + 16x - 20 = 0$, με $\alpha \neq 0$, είναι 10. Να βρείτε :

- i) τον αριθμό α
 ii) το άθροισμα των ριζών της παραπάνω εξίσωσης.

98. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 8 = 0$ (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 για τους οποίους ισχύει $x_1 + x_2 = 6$

και $x_1 \cdot x_2 = 4$.

- i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β
 ii) Να λύσετε την εξίσωση (1).

99. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - x - 5 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

- i) $x_1 + x_2$ ii) $x_1^2 + 2x_2^2$
 ii) $\frac{x_1^2}{x_2}$ iii) $\frac{x_1^2}{x_2} + 2x_2^2$
 1 2 1 2 1 2

$$\text{iii)} \quad \frac{x}{1} + \frac{x}{2}$$

$$\text{iv)} \quad x \cdot x$$

$$\text{iii)} \quad x^2 + x^2$$

$$\text{iv)} \quad x^3 + x^3$$

100. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{i)} x_1 + x_2$$

$$\text{ii)} x_1 \cdot x_2$$

$$\text{iii)} x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{iv)} x_1^3 + x_2^3$$

$$\text{v)} \quad \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$$

$$\text{vi)} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

102. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 5x - 4 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{i)} x_1 + x_2$$

$$\text{ii)} x_1 \cdot x_2$$

$$\text{iii)} x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{iv)} x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$$

$$\text{v)} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

$$\text{vi)} (x_1 - x_2)^2$$

103. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 4x + 2 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{i)} x_1 + x_2$$

$$\text{ii)} x_1 \cdot x_2$$

$$\text{iii)} x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{iv)} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

$$\text{v)} \quad \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$$

$$\text{vi)} \quad \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$$

104. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 + 3x - 4 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{i)} x_1 + x_2$$

$$\text{ii)} x_1 \cdot x_2$$

$$\text{iii)} x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{iv)} (x_1 + 1)(x_2 + 1)$$

$$\text{v)} (2x_1 - 3)(2x_2 - 3)$$

$$\text{vi)} (x_1^2 - x_1 x_2)(x_1 x_2 - x_2^2)$$

105. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 6x + 3 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{i)} x_1 + x_2$$

$$\text{ii)} x_1 \cdot x_2$$

$$\text{iii)} x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{iv)} (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2$$

$$\text{v)} \quad \frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3}$$

$$\text{vi)} x_1^3 x_2 + 2 x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3$$

106. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + 7x - 9 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{i)} x_1 + x_2$$

$$\text{ii)} x_1 \cdot x_2$$

$$\text{iii)} x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{iv)} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

$$\text{v)} \quad x_1 + x_2$$

$$\text{vi)} |x_1 - x_2|$$

107. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x - 1 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{i)} x_1 + x_2$$

$$\text{ii)} x_1 \cdot x_2$$

$$\text{iii)} x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{iv)} x_1^3 + x_2^3$$

$$\text{v)} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

$$\text{vi)} |x_1 - x_2|$$

$$\text{vii)} x_1^2 - x_2^2$$

108. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 5x + 3 = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

$$\Gamma = \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$$

109. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3x - 5 = 0$ να υπολογιστεί η τιμή της

$$\text{παράστασης : } E = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{\square_1 x}{2 + x_2} + \frac{\square_2}{2 + x_1} - \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \right|^2$$

110. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες
 α) αντίθετες β) αντίστροφες

111. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $x^2 - 6x - 3(2 - \lambda) = 0$ έχει ρίζες :

- i) ομόσημες ii) ετερόσημες

112. Να βρείτε τον πραγματικό λ , ώστε η εξίσωση $x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$ να έχει :

- i) μία διπλή ρίζα ii) δύο ρίζες ετερόσημες iii) δύο ρίζες αρνητικές
 iv) δύο ρίζες θετικές v) δύο ρίζες αντίστροφες

113. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 5)x - \lambda + 4 = 0$ έχει :

- i) μία διπλή ρίζα ii) δύο ρίζες ετερόσημες iii) δύο ρίζες αρνητικές
 iv) δύο ρίζες θετικές v) δύο ρίζες αντίστροφες iv) δύο ρίζες αντίθετες

114. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $-x^2 + (\lambda - 7)x + \lambda - 6 = 0$ έχει :

- i) μία διπλή ρίζα ii) δύο ρίζες ετερόσημες iii) δύο ρίζες αρνητικές
 iv) δύο ρίζες θετικές v) δύο ρίζες αντίστροφες iv) δύο ρίζες αντίθετες

115. Δίνεται η εξίσωση $-2x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda - 3 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Να βρείτε το λ ώστε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με το γινόμενο τους.

116. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2x - \lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ :
 α) η εξίσωση (1) έχει αντίστροφες ρίζες
 β) το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) είναι τετραπλάσιο από το άθροισμα τους

117. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) , να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$\alpha) x_1^2 + x_2^2 = 10 \quad \beta) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{5}$$

118. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ (1) .

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = 20$

119. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ (1) .

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες..
 ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) , να βρείτε το λ ώστε να ισχύει : $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -\frac{2}{3}$

120. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$ (1) .

ι) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

α) $x_1(3-2x_1) = -3(x_1-1)$

β) $x_1(x_2-x_1) = (x_1+3)(3-x_1)$

121. Δίνεται η εξίσωση $2x^2-4x+\lambda-3=0$ (1) .i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) ,να βρείτε το λ ώστε να ισχύει:

α) $x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 = 8$

β) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$

122. Δίνεται η εξίσωση $x^2-10x+\lambda+8=0$ (1) .i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) ,να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $2x_1 = 3x_2$ 123. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda+1)x+\lambda=0$ (1) .i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .ii) Να βρείτε το λ , ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι διπλάσια από την άλλη.124. Δίνεται η εξίσωση $x^2+\lambda x-27=0$ (1) .i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .ii) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) ισούται με το τετράγωνο της άλλης να βρείτε τις ρίζες της και το λ .125. Δίνεται η εξίσωση $x^2+\lambda x+\lambda-1=0$ (1) .i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $3x_1 + 2x_2 = -\lambda$ 126. Δίνεται η εξίσωση $(\mu-1)x^2+\mu x+1=0$, $\mu \neq 1$ με ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$. Για ποια τιμή του μ η εξίσωση :

i) έχει ρίζες αντίθετες

ii) έχει ρίζες αντίστροφες

iii) $\rho_1 = 2\rho_2$ 127. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\lambda^3 + 8)x - 1 = 0$ (1).i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.ii) Να βρείτε το λ ώστε οι ρίζες της (1) να είναι αντίθετες.128. Δίνεται η εξίσωση $\mu x^2 + 2(\mu+1)x + \mu + 2 = 0$, $\mu \neq 0$ i) Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ ii) Για ποια τιμή του μ η εξίσωση

α) έχει ρίζες αντίθετες

β) η μία ρίζα είναι διπλάσια της άλλης

129. Δίνεται η εξίσωση $(3\lambda - 1)x^2 - x - 1 = 0$ (1)α) Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση (1)

i) να είναι δευτέρου βαθμού.

ii) να έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες,

β) Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε:

i) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -1$

ii) $2x_1 + 2x_2 < 1$

130. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - (\lambda^2 + 1) = 0$

i) Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αν x_1, x_2 ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

131. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει δύο ρίζες άνισες.

ii) Αν $\lambda \in (1, +\infty)$ να δείξετε ότι η (1) δεν έχει ρίζες αντίστροφες.

iii) Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της (1) και $2x_1 + 2x_2 < 5$ να βρείτε το λ .

133. Έστω η εξίσωση $3x^2 - (\lambda^2 - 5)x - 2 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

134. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + x - 2 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Αν x_1, x_2 οι πραγματικές και άνισες ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε: $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = \frac{1}{2}$

135. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1).

i) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

ii) Αν x_1, x_2 ρίζες της (1) και ισχύει $x_1 = 3x_2$ να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και το λ .

136. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + 5\lambda + 4 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

ii) Αν $\lambda \leq 1$ και οι ρίζες της (1) x_1, x_2 είναι ανάλογες του 2 και 4 να βρείτε το λ .

137. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + |\lambda| - 1 = 0$ (1) με ετερόσημες ρίζες τις x_1 και x_2 .

i) Να βρείτε το λ .

ii) Αν $3x_1 + 3x_2 > 1$ να βρείτε το λ .

138. Οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$ (1) είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης

$\lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2 = 0$ (2) με $\lambda \neq 0$ είναι αντίστροφες.

i) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ και μ

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2).

139. Έστω η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1) με $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Αν $\|a\| - \|\gamma\| = |a + \gamma|$ να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

140. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \beta x + \gamma = 0, \gamma \neq 0$, τότε η εξίσωση $\gamma x^2 + \beta x + 1 = 0$ έχει ρίζες τις $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$.

141. Δίνεται η εξίσωση $9x^2 + 6x + \gamma = 0$ με ρίζες ρ_1, ρ_2 . Αν γνωρίζουμε ότι $\rho_1 - \rho_2 = 2$

i) να βρείτε τις ρίζες ρ_1, ρ_2

ii) να βρείτε το γ

Κατασκευή εξίσωσης β' βαθμού

142. Να βρεθεί η εξίσωση που έχει ως ρίζες τους αριθμούς: $1 - 3\sqrt{2}$ και $1 + 3\sqrt{2}$

143. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) 3, -2

ii) 2, -1/3

iii) 2, -2

iv) 3, 0

144. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) 2, 4

ii) -3, 5

iii) -6, 1

iv) -4, -1

v) $\frac{1}{2}$, -2

vi) $-\frac{2}{3}$, 6

145. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$

ii) $\sqrt{3} + 2$, $2 - \sqrt{3}$

iii) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

iv) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

146. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν για ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) -1, 2,

ii) -3, 0

iii) $-1, \frac{2}{3}$

147. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) $\lambda - 2$, $\lambda + 2$

ii) $1 + \alpha$, $1 - \alpha$

iii) μ , 2μ

iv) $\frac{\alpha}{3}$, -3α

148. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 5 = 0$ είναι οι x_1 και x_2 . Να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τα ζεύγη.

i) $x_1 - 1$, $x_2 - 1$

ii) $\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$

149. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 1 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $2x_1$, $2x_2$

ii) $\frac{x_1}{2}$, $\frac{x_2}{2}$

iii) x_1^2 , x_2^2

iv) $\frac{1}{x_1 x_2}$, $\frac{1}{x_1 x_2}$

150. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + 5x - 2 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $3x_1$, $3x_2$

ii) $-x_1$, $-x_2$

iii) x_1^2 , x_2^2

iv) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$

151. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $x_1 + 2$, $x_2 + 2$

ii) $2x_1 - 3$, $2x_2 - 3$

iii) x_1^2 , x_2^2

iv) x_1^3 , x_2^3

152. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 3 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $x_1 + 3$, $x_2 + 3$

ii) $2x_1 - 1$, $2x_2 - 1$

iii) x_1^2 , x_2^2

iv) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$

153. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + x + 3 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $x_1^2 x_2$, $x_2^2 x_1$

ii) $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_1}$

iii) $\frac{1}{x_1 - 1}$, $\frac{1}{x_2 - 1}$

iv) $\frac{x_1}{x_1 + 2}$, $\frac{x_2}{x_2 + 2}$

154. Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων (χωρίς να λυθούν):

i) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ii) $x^2 + 4x - 5 = 0$

iii) $x^2 - (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

155. Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων χωρίς να λυθούν:

i) $x^2 - 3x + 2 = 0$

ii) $x^2 + 5x + 6 = 0$ iii) $x^2 -$

$(1 - 5)x - 5 = 0$ iv) $x^2 - 2ax$

$+ a^2 - 1 = 0$

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

156. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$

ii) $x^4 - x^2 + 1 = 0$

157. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

ii) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

iii) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

iv) $6y^4 + 17y^2 = -12$

v) $x^4 - 2(a^2 + \beta^2)x^2 + (a^2 - \beta^2)^2 = 0$

158. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

ii) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

iii) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

iv) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$

v) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

vi) $x^4 - x^2 - 20 = 0$

161. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

iii) $3x^4 + x^2 + 1 = 0$

v) $2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

ii) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

iv) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

162. Να σχηματίσετε διτετράγωνη εξίσωση που να έχει ρίζες $\pm 3, \pm 2$

163. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

iii) $x^6 + 28x^3 + 27 = 0$

v) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

ii) $x^6 - 16x^3 + 64 = 0$

iv) $-8x^6 + 7x^3 + 1 = 0$

vi) $-16x^8 - 15x^4 + 1 = 0$

164. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

iii) $x^{10} - 1025x^5 + 1024 = 0$

v) $2x^2 - 5|x| - 3 = 0$

ii) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

iv) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

vi) $-3x^2 + 10|x| - 8 = 0$

165. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2 - 4 = 3|x|$

iii) $4|x| - 3 = x^2$

v) $2x^2 = |x| + 10$

ii) $x^2 = 8 - 2|x|$

iv) $3|x| = x^2 - 10$

vi) $3x^2 + |x| - 2 = -3(|x| + 1)$

166. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2 + |4x| - 5 = 0$

iii) $x^2 + |-6x| - 40 = 0$

v) $-3x^2 + |-5x| - 2 = 0$

ii) $x^2 - |5x| + 6 = 0$

iv) $x^2 - |-3x| + 2 = 0$

vi) $-x^2 - |-x| + 20 = 0$

168. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2 + 2|x| + 1 = 0$

iii) $(2x+1)^2 - 4|2x+1| + 3 = 0$

ii) $|x-1|^2 - 4 = 3|x-1|$

iv) $x^2 = |2x| + 3$

169. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $2(x-3)(x+3) + 9|x| = 0$

iii) $|x| = \frac{(2x-3)(2x+3)}{9}$

v) $(x-1)^2 - 8 = |x| - (x+1)^2$

ii) $3|x| = (2-x)(2+x)$

iv) $(x-2)^2 = 7|x| + 1 - x(x+4)$

vi) $5|x| = 1 - \frac{(x-3)(x+3)}{2}$

170. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - |x| - 2 = 0$.

171. Να λυθεί η εξίσωση: $(x-3)^2 + |x-3| - 6 = 0$.

172. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(2x-1)^2 - 3(2x-1) - 4 = 0$

ii) $(x^2-1)^2 + 2(x^2-1) - 3 = 0$

173. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \left(2x + \frac{1}{x} \right)^2 - 3 \left(2x + \frac{1}{x} \right) - 4 = 0$$

174. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} x^2 - |x| - 6 = 0$$

$$\text{iii)} x^2 - 2x + |x-1| - 5 = 0$$

175. Να λυθεί η εξίσωση $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$ (1)

176. Να λύσετε την εξίσωση: $\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 3 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 2 = 0$ (1).

177. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i)} (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 4) = -8$$

$$\text{iii)} (x-5)^4 - 6(x-5)^2 = 27$$

178. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{ii)} \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 3 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 2 = 0$$

$$\text{ii)} (2x-1)^2 + 3|2x-1| - 4 = 0$$

$$\text{iv)} (x-3)^2 + x^2 - 6x + 9 = 7$$

$$\text{ii)} (x+1)^4 - (x+1)^2 = 1260$$

$$\text{iv)} \left| \frac{\left(x - \frac{1}{x} \right)^2}{x-1} + \frac{\left(x - \frac{1}{x} \right)}{x+1} \right| = \frac{10}{9}$$

$$i) (x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) + \frac{75}{16} = 0$$

$$iii) (x^2 + 5x - 4)^2 + (x^2 + 5x) = 10$$

$$ii) (x - 3)^2 + \frac{5}{(x - 3)^2} = \frac{126}{5}$$

$$iv) (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x + 4) = 120$$

179. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$$

ii)

$$iii) \sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 10 = 0$$

$$) x - x = 20$$

$$x - 4 + \sqrt{x}$$

3

=

0

$$iv) x + 5\sqrt{x} + 4 = 0$$

$$vi) x(x - 2) = 3$$

180. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) (x^3 - 1)^2 - x^6 - 2x^3 + 1 - 2 = 0$$

$$ii) (x^5 - 1)^2 + x^{10} - 2x^5 + 1 - 2 = 0$$

181. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x + 5)^2 - 2(x + 5) - 3 = 0$$

$$iii) (3x - 5)^2 + 7(3x - 5) - 8 = 0$$

$$v) (x - 4)^2 - 3(4 - x) - 10 = 0$$

$$ii) (2x - 1)^2 + 2(2x - 1) - 15 = 0$$

$$iv) \left(\frac{x - 3}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{x - 3}{2} - 18 = 0$$

$$vi) (2x - 3)^2 - 6(3 - 2x) - 7 = 0$$

182. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$$

$$iii) (x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$$

$$ii) (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = 0$$

$$iv) (x^2 + 2x - 6)^2 + 3(x^2 + 2x - 6) - 10 = 0$$

183. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x + 1)^2 + |x + 1| - 2 = 0$$

$$iii) (x - 1)^2 - 4 = 3|x - 1|$$

$$v) -(x - 3)^2 + 5|3 - x| - 6 = 0$$

$$ii) (2x - 1)^2 - 8|2x - 1| + 15 = 0$$

$$iv) (x - 5)^2 - 3|5 - x| - 10 = 0$$

$$vi) 5 - (2x - 1)^2 = 4|1 - 2x|$$

184. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) (2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 12 = 0$$

$$ii) (x - 1)^6 + 5(x - 1)^3 - 6 = 0$$

185. Αν λ ακέραιος, να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) 4\lambda - 9 \cdot 2\lambda + 8 = 0$$

$$ii) 3 \cdot 9\lambda - 4 \cdot 3\lambda + 1 = 0$$

186. Αν λ ακέραιος, να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) 5 \cdot 25\lambda - 7 \cdot 10\lambda + 2 \cdot 4\lambda = 0$$

$$ii) 4 \cdot 9\lambda - 13 \cdot 6\lambda + 9 \cdot 4\lambda = 0$$

187. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) \left(\frac{x + 5}{8 - x} \right)^2 = 10 \left(\frac{x + 5}{8 - x} \right) + 24$$

$$iii) \sqrt[3]{x^2} = 5\sqrt{x} + 78$$

$$v) 2(x^2 + x - 2)^2 - 5(x^2 + x - 2) = 0$$

$$ii) x + 5 - x = 14$$

$$iv) \frac{x}{27 - x} + \frac{27 - x}{x} = \frac{5}{2}$$

188. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x^2 - 5x + 3)^2 + 4(x^2 - 5x) + 15 = 0$

iii) $(x^2 + 3x + 1)^2 - 4(x^2 + 3x + 2) - 1 = 0$

ii) $(x^2 + 2x + 2)^2 + x^2 + 2x = 0$

iv) $(x^4 - 5x^2 + 2)^2 + 6(x^4 - 5x^2 - 1) + 26 = 0$

189. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x) = 8$

ii) $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 5x + 9) + 15 = 0$

190. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β :

i) $x^4 - (a^2 + 2)x^2 + 2a^2 = 0$

ii) $x^4 - 2(a^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0$

iii) $x^4 - 3\alpha^2 x^2 - 4\alpha^4 = 0$

iv) $x^4 - 4\alpha\beta x^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$

191. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α , β και γ :

i) $\alpha^2 x^4 - (1 - a^2 \beta^2)x^2 - \beta^2 = 0$

ii) $\gamma^4 x^4 + (a^2 \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2)x^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0$

192. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α , να λύσετε την εξίσωση: $x^4 - (\alpha + 1)x^2 + \alpha = 0$

193. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x-4)(x-2)(x-1)(x+1)+8=0$

ii) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)=12$

Κλασματικές εξισώσεις

194. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{6}{x+2} - \frac{4}{x+3} = 1$

iii) $\frac{5}{x-1} = 2 - \frac{2}{x-4}$

ii) $\frac{4}{x-5} = \frac{3}{x-6} - 1$

iv) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+3} = -2$

195. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $1 - \frac{3}{x+2} = \frac{6}{x^2 + 2x}$

ii)

iii) $\frac{x-10}{x^2-4} - \frac{x}{2-x} = \frac{2}{x+2}$

$\frac{4}{x^2-1} = \frac{x}{-1} - \frac{1}{x+1}$

iv) $\frac{x+2}{x-3} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2-3x} = \frac{x+6}{x}$

196. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x}$

iii) $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+1}{3x-9} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x+3} \right)$

ii) $\frac{x}{3} - \frac{x^2-6}{3(x+4)} = \frac{6}{x}$

iv) $\frac{2x}{x-1} - \frac{11}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

()

197. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{4x}{x^2-x} = \frac{4}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} \\ \text{iii)} \quad & \frac{x+2}{x-1} - \frac{7}{x^2-x} = \frac{x+3}{x^2+3x} \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{6}{x^2+2x} - \frac{x-1}{x^2-x} = 1$$

$$\frac{\frac{x}{5x} - \frac{20}{x+2}}{\frac{14}{x^2-4x}} = \frac{14}{x^2+2x}$$

198. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i)} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 2x$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{x}} + \frac{4}{x-\frac{1}{x}} = \frac{5}{4}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{x}{1-\frac{1}{x}} - \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{\frac{x}{1+\frac{2}{x}} - \frac{4}{x-1}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - \frac{x}{2}} = \frac{7}{3}$$

199. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i)} \quad (x-1)^2 - 6x^2 - 2x + 1 + 8 = 0$$

$$\text{ii)} \quad (x+2)^2 - 2x^2 + 4x + 4 - 15 = 0$$

$$\text{iii)} \quad (2x-1)^2 - 44x^2 - 4x + 1 + 3 = 0$$

$$\text{iv)} \quad (|x|-3)^2 - 3x^2 - 6|x| + 9 - 4 = 0$$

200. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i)} \quad \left(\frac{2}{x-x} \right)^2 - 5 \left(\frac{2}{x-x} \right) + 4 = 0$$

$$\text{ii)} \quad \left(\frac{6}{x+\frac{6}{x}} \right)^2 - 12 \left(\frac{6}{x+\frac{6}{x}} \right) + 35 = 0$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{x}{x-4} \right)^2 - \frac{x}{x-4} - 2 = 0$$

$$\text{iv)} \quad \left(\frac{2x}{x-3} \right)^2 - 3 \frac{2x}{x-3} - 4 = 0$$

201. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i)} \quad 6 \left(\frac{2x}{x-3} \right)^2 - \frac{10x}{x-3} - 6 = 0$$

$$\text{ii)} \quad 4 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 - \frac{8x+8}{x-1} + 3 = 0$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2 + \frac{12-6x}{x+1} + 8 = 0$$

$$\text{iv)} \quad \left(\frac{3x}{x-1} \right)^2 + \frac{6x}{1-x} - 8 = 0$$

202. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i)} \quad \left(\frac{2}{3x+\frac{2}{x}} \right)^2 - 12 \left(\frac{2}{3x+\frac{2}{x}} \right) + 35 = 0$$

$$\text{ii)} \quad \left(\frac{x^2+1}{x-1} \right)^2 - \frac{4x^2+4}{x-1} - 5 = 0$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{4}{x+\frac{4}{x}} \right)^2 - \frac{x^2+4}{x} - 20 = 0$$

$$\text{iv)} \quad \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^2 + \frac{7x+14}{2x-4} + 3 = 0$$

203. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i)} \quad \frac{1}{3x^2-2x} + 3x^2 - 2x = 2$$

$$\text{ii)} \quad \frac{8}{x^2+4x} - x^2 - 4x = 2$$

$$\text{iii)} \quad \frac{6}{x^2-x} - x^2 + x = 1$$

$$\text{iv)} \quad \frac{12}{x^2-1} - 3x^2 + 3 = -5$$

216. Ένας κηπουρός θέλει να περιφράξει με σύρμα έναν κήπο ΑΒΓΔ που έχει σχήμα ορθογωνίου και εμβαδόν 576cm^2 . Στη συνέχεια θέλει να χωρίσει τον ορθογώνιο αυτό κήπο, σε δύο μικρότερους σχήματος ορθογωνίου, τους ΑΖΕΔ και ΖΒΓΕ. Αν το σύρμα έχει συνολικό μήκος 132m, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του κήπου αυτού.
217. Το 2010 η ηλικία ενός πατέρα είναι x^2 , ενώ η ηλικία της κόρης του είναι x . Όταν η ηλικία του πατέρα θα γίνει 13x, τότε η ηλικία της κόρης του θα είναι x^2
 i) Να βρείτε την ηλικία που έχει ο πατέρας το 2010.
 ii) Πότε η ηλικία της κόρης θα είναι x^2 ;
218. Τα μήκη των τριών πλευρών ενός τριγώνου είναι 4cm, 6cm και 8cm. Αν αυξήσουμε το μήκος κάθε πλευράς κατά x cm, το τρίγωνο γίνεται ορθογώνιο. Να βρείτε το x .
219. Ορισμένα άτομα θα μοιραστούν 3600 €. Αν τα άτομα ήταν 5 λιγότερα, ο καθένας θα έπαιρνε 24€ περισσότερα. Να βρείτε πόσα ήταν τα άτομα και πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;
220. Ένα ποταμόπλοιο, όταν κινείται σε ήρεμα νερά, έχει μια σταθερή ταχύτητα v . Το ποταμόπλοιο ξεκινά από το σημείο Α του ποταμού, πηγαίνει στο σημείο Β που απέχει 24km από το Α και επιστρέφει στο Α. Κατά τη μετάβαση από το Α στο Β προστίθεται η ταχύτητα 2km/h που έχει το νερό του ποταμού, ενώ στην επιστροφή η ταχύτητα αυτή αφαιρείται. Αν ολόκληρο το ταξίδι διαρκεί συνολικά 5 ώρες, να βρείτε την ταχύτητα του ποταμόπλοιου.
221. Ένα αγρόκτημα οργώνεται από δύο τρακτέρ Α και Β, αν δουλέψουν συγχρόνως σε 6 ώρες. Αν οργώσει το αγρόκτημα μόνο το τρακτέρ Α, τότε χρειάζονται 5 ώρες περισσότερες απ' όσες χρειάζονται για να οργώσει το αγρόκτημα το τρακτέρ Β μόνο του. Να βρείτε σε πόσες ώρες καθένα τρακτέρ οργώνει μόνο του το αγρόκτημα.
222. Στο διπλανό ορθογώνιο ο λόγος της μεγαλύτερης διάστασης (x) προς τη μικρότερη διάσταση (y) είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος των δύο διαστάσεων ($x+y$) προς τη μεγαλύτερη διάσταση (x). Σε αυτή την περίπτωση ο λόγος $\frac{x}{y}$ είναι ίσος με τον χρυσό αριθμό ϕ . Μπορείτε να βρείτε τον λόγο $\frac{x}{y} = \phi$

Συνδυαστικά θέματα

223. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + \sqrt{\lambda+3} \cdot x + \lambda = 0$ (1)
 i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες.
 ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 9} + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1}$
224. i) Να βρείτε το ανάπτυγμα : $(2 - \sqrt{3})^2$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3 - 2(x - 2\sqrt{3}) = -(x - 3)(x + 3)$

- iii) Αν x_1 είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης, να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{x_1}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

225. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\sqrt{3} + 1) \cdot x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0$ (1)

- i) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta = (\sqrt{3} - 3)^2$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση (1)
 iii) Αν ρ η άρρητη ρίζα της εξίσωσης (1), να αποδείξετε ότι ο αριθμός : $\alpha = \frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{2}$ είναι ακέραιος.

226. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ (1)

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες.
 ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1) ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$
 iii) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση :

$$A = \left(\lambda^2 - 6\lambda + 9 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 \right)^2 \text{ έχει τιμή ανεξάρτητη του } \lambda, \text{ την οποία και να βρείτε.}$$

227. Η εξίσωση : $x^2 + \lambda^2 \cdot x - \mu(\mu - \lambda) - \left(\mu + \frac{1}{2} \right) = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.

- i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .
 ii) Αν ρ η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1), τότε:
 α) να λύσετε την εξίσωση $x^2 + (\rho - 1)x - \rho = 0$
 β) να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\rho}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.
☐

228. Η εξίσωση : $x^2 - (\lambda - 1)x + 2(\lambda - 3) = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.

- i) Να βρείτε τον αριθμό λ .
 ii) Αν ρ η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1), τότε να βρείτε τον αριθμό : $\kappa = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{\rho^4} \cdot \rho^{37}$
 iii) Να λύσετε την εξίσωση $|2x^2 + \lambda x - \kappa + \lambda| + |2x^2 - (\kappa + \lambda)x + \kappa| = 0$

229. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\Delta - 2) \cdot x + \frac{\Delta - 5}{4} = 0$ (1), όπου Δ είναι η διακρίνουσα της.

- i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ .
 ii) Να λύσετε την εξίσωση (1)
 iii) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{2\rho_1^2}$.

230. Η εξίσωση : $x^2 + 2\alpha + \beta \cdot x - \gamma = 0$ (1), με $\alpha, \beta, \gamma > 0$ έχει μία διπλή ρίζα. Να αποδείξετε ότι :

- i) $\alpha + \beta + \gamma = 0$.
 ii) η εξίσωση : $x^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{4} \cdot x + 3\alpha\beta\gamma = 0$ έχει μία διπλή ρίζα, την οποία και να βρείτε.
☐
☐
☐
 4

231. Δίνονται οι εξισώσεις : $x^2 - (2\lambda - 1)x - 3 = 0$ (1) και $x^2 - (\lambda - 2)x + 3\lambda = 0$ (2) με $\lambda \neq -1$. Αν οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν κοινή ρίζα τον αριθμό ρ , τότε:

- i) να βρείτε τους αριθμούς ρ και λ .
 ii) να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2)

232. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει :

$$6(P(A))^2 + 11P(A) = 8, P(A - B) = \frac{1}{12} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$

ii) Να βρείτε την πιθανότητα:

- α) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B β) να μην πραγματοποιηθεί το B
- γ) να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A και B δ) να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B
- ε) να πραγματοποιηθεί το A ή να μην πραγματοποιηθεί το B.

233. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 3)x + 3\lambda - 2 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) ,να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει :
 $\frac{x_1 + x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1^2 - x_2^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη του λ ,την οποία και να βρείτε.

234. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 4(\lambda + 1)x + 8\lambda - 1 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) .

α) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (x_1 - 2)(x_2 - 2)$ είναι ανεξάρτητη του λ

β) Να βρείτε το λ ,ώστε να ισχύει : $\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_1 + x_2} = 64$

235. Έστω ρ_1 και ρ_2 (με $\rho_1 \neq \rho_2$) οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$.Να βρείτε συναρτήσει των α ,β ,γ τις παραστάσεις :

i) $|\rho_1 - \rho_2|$ ii) $|\rho_1^2 - \rho_2^2|$ iii) $|\rho_1| + |\rho_2|$

236. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda + 6 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Να βρείτε το λ ,ώστε το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με 14.

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β),να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $x_1^2 + x_2^2$ ii) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

237. Δίνεται ο αριθμός : $\mu = (20 - 2)^6 + 2^5$ και η εξίσωση : $x^2 + \mu^{\frac{1}{3}} \cdot \lambda \cdot x - \mu = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός μ είναι ακέραιος .

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) ισούται με το τετράγωνο της άλλης,να βρείτε τις ρίζες της και την τιμή του λ.

238. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 4 = 0$ (1) .

i) Να βρείτε τον αριθμό: $\alpha(1+x)^{2011}(1+x)^{2011}$

ii) Να σχηματίσετε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{\alpha}{x_1}$ και $\frac{\alpha}{x_2}$

239. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 7 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τις οποίες ισχύει : $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -2$.

α) Να βρείτε το λ

β) Να σχηματίσετε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$

240. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $10x^2 - 8x + 1 = 0$. Θεωρούμε και τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει : $P(A) = x_1 + x_2$, $P(B) = x_1 \cdot x_2$ και $P(A \cap B) = x_1^2 x_2 \cdot x_1 x_2^2$

Να βρείτε τις πιθανότητες :

i) $P(A), P(B)$ και $P(A \cap B)$

ii) $P(A \cup B)$

iii) $P(A - B)$

iv) $P((A - B) \cup (B - A))$

242. Η εξίσωση : $(x + 1)^4 - (a^2 + 3a)(x^2 + 2x + 1) + 2a^2 - a + 3 = 0$ έχει ρίζα το -3.

i) Να βρείτε τον αριθμό a .

ii) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

243. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda + 1)x^4 - (\lambda^4 - 1)x^3 - \lambda x^2 - \lambda = 0$ (1) i) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να είναι διτετράγωνη. ii) Για $\lambda = 1$ να λυθεί η εξίσωση (1).

244. Δίνεται η εξίσωση $(2\alpha - \beta)x^4 - (\alpha - \beta)x^3 + 2x^2 + (\alpha - 1)x - 3\alpha = 0$ (1).

i) Να βρείτε τα α, β , ώστε η (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για $\alpha=1$ και $\beta=1$ να λυθεί η (1).

245. Δίνεται η εξίσωση: $(2\lambda + \mu)x^4 - |3\lambda + \mu - 1|x^3 - (\lambda - \mu)x^2 + 2(|\lambda| - 1)x - |3\lambda + \mu| = 0$ (1)

i) Να βρείτε τα λ και μ , ώστε η (1) να είναι διτετράγωνη. ii) Για $\lambda = -1$ και $\mu = 4$ να λυθεί η (1).

246. Δίνεται η εξίσωση : $x^4 + (\lambda^3 + 8)x^3 - 10x^2 + 5 - 2\lambda = 0$ (1) .

i) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα i) να λύσετε την εξίσωση (1).

247. Δίνεται η εξίσωση : $x^4 - 6x^2 + (\lambda^2 + \mu^2 - 6\lambda + 4\mu + 13)x - \mu^3 = 0$ (1) .

i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ , ώστε η εξίσωση (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για τις τιμές των λ και μ που βρήκατε στο ερώτημα i) να λύσετε την εξίσωση (1).

248. Δίνεται η εξίσωση : $x^4 + (\lambda^2 - 2\lambda - 3)x^3 - 5x^2 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x + \lambda + 1 = 0$ (1) .

i) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα i) να λύσετε την εξίσωση (1).

249. Η εξίσωση : $\frac{1}{4}x^2 + (\beta - 9)x - \alpha^2 + 6\alpha - 9 = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

ii) Να λύσετε την εξίσωση : $\alpha\beta^x - 28a^x + \beta = 0$.

250.i) Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει : $\alpha - \beta = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

$$\text{ii) Να λύσετε την εξίσωση : } \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x + 3} = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 6x + 8} + \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 6x + 8}$$

251. Έστω η εξίσωση $x^2 - (2\lambda + 4)x - \lambda^2 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

iii) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (ii), να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2 \cdot |x - 3| = x - \lambda$

252. Δίνονται οι εξισώσεις : $(x-1)^2 - 2(2-x^2) = 2$ (1) και $\lambda + -\lambda = -\frac{\lambda -}{(x-3)} \frac{1}{6} \frac{\lambda -}{2(x)}$ (2).

i) Να λύσετε την εξίσωση (1).

ii) Έστω ρ η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης (1). Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (2) να έχει μοναδική λύση το ρ

253. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1)+12=4(\lambda x-1)(1)$. Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, τότε:

i) να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \lambda^2 \cdot x^2 - |x| - 6 = 0 \quad \beta) \frac{x - \lambda}{x + \lambda^2} - \frac{2x^2 + \lambda}{x^2 - \lambda} = \lambda^2 - \frac{7x - 15}{x - 2}$$

254. i) Να βρείτε το ανάπτυγμα : $\left[\frac{1}{2} (3+1)^2 \right]$

ii) Να βρείτε τον αριθμό : $\alpha = (6 + 2)(2 - 3) \cdot 3 + 2$.

iii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 + a^2 x + 2a = a \quad \beta) |x^2 + 3x - 10| - |x - a| = 0$$

255. Δίνεται ο αριθμός : $\alpha = 3 \cdot 4^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^5}$.

i) Να βρείτε τον αριθμό α .

ii) Αν οι εξισώσεις : $x^3 + 9a = 0$ (1) και $\frac{3\beta^3}{8} \cdot x^2 - 1 = 0$ (2) έχουν κοινή λύση, τότε :

α) να βρείτε τον αριθμό β

β) να λύσετε την εξίσωση (2)

iii) Να αποδείξετε ότι : $\alpha\beta - \alpha - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$

256. Δίνονται οι αριθμοί : $\alpha = 3 - 5 \cdot 3^1 + 5 \cdot 6^7 + 3 \cdot 5$ και $\beta = \frac{1}{(2-1)^2} + \frac{1}{(2+1)^2}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \sqrt{x^2 - a^2 x + 2a} - \sqrt{x^2 + \beta x + 9} = \sqrt{\alpha\beta} \quad \beta) \frac{|x| + \frac{\beta}{2}}{|x| - x} = (a + \beta)^3$$

257. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 1 = 0$ (1). και $\mu = (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$

i) Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x| + |x| + |x| - x = \lambda(x - 1) + \mu$

258. Έστω η εξίσωση $x^2 - 2(\mu + 3)x + \mu^2 + 6\mu - 7 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = |\rho_1 - \rho_2|$

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 1| - 5 = A$

259. Δίνεται ο αριθμός: $\alpha = \frac{1}{(5 - \sqrt{7})^2} + \frac{1}{(5 + \sqrt{7})^2}$.

i) Να βρείτε τον αριθμό α .

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{3}{3}x^2 + 2(3 - a)x + \frac{11}{3} - 6a = 0$

iii) Αν ρ είναι η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, να λύσετε την εξίσωση: $|x - 2| = \rho$.

260. Έστω η εξίσωση $2x^2 + 4x + 3\lambda - 1 = 0$ (1).

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 15$

iii) Να μετατρέψετε το παρακάτω κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή: $A = \frac{1}{\lambda^2 - \lambda^2}$

261. Δίνονται οι αριθμοί: $\lambda = 3^4 \cdot 3^2 \cdot 2 + 6 \cdot 3^2 \cdot 2 - 6$ και $\mu = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^9$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + \mu x + \lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} \quad \beta) B = |x_1 - x_2|$$

262. Έστω η εξίσωση $2x^2 + 2(\mu + \nu)x - \mu^2 - \nu^2 = 0$ (1).

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1).

α) Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1^2 + x_1x_2$ και $x_2^2 + x_1x_2$

β) Να βρείτε τους αριθμούς μ και ν , ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 - x_1x_2 = -1$

263. Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha = 3\left(3 + 2 - 3 - 2\right)$ και $\beta = 6 \cdot 9 \cdot 3^4 + 7 \cdot 3^4 - 7$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + \alpha x + 4 = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \beta x - 5 = 0$.
Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1\rho_1 + x_2\rho_2$ και $x_2\rho_1 + x_1\rho_2$.

264. Η εξίσωση $x^2 - ax - a^2 = 0$ έχει ρίζες τις x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει : $x_1(x_2 + 4) + 4(x_2 - 1) = 0$

i) Να βρείτε τον αριθμό a

ii) Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $1 - \frac{1}{x_1}$ και $1 - \frac{1}{x_2}$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 + ax + 1 - (ax)^2 + a^2x + 1 = 0$

265. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + \lambda = 0$ (1).

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει :

$$5x_1^3x_2 - 2\lambda - 4x_1^2x_2 = 4x_1x_2^2 + 3 - 5x_1x_2^3$$

iii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \lambda^3 5^2 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{\lambda^3}$

266. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\lambda - 4)x - \lambda = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Εστω ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1) είναι τριπλάσιο από το γινόμενο τους.

α) Να βρείτε την τιμή του λ

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς x_1^2 και x_2^2

267. Δίνεται η εξίσωση $4x(x + \mu) = 8(1 - x) - \mu^2$ (1).

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

ii) Να βρείτε το μ , ώστε το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με 2.

iii) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να λύσετε την εξίσωση : $\mu^2 \cdot x + |x| = 35 - \mu x$