

ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

- Τι ονομάζουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού;
- Εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ένα άγνωστο ονομάζουμε κάθε εξίσωση που γράφεται ή μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$
π.χ $3x^2 - 5x + 6 = 0$
- Τι ονομάζουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού ελλιπούς μορφής;
- Εξίσωση 2^{ου} βαθμού ελλιπούς μορφής ονομάζεται η εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta=0$ ή $\gamma=0$

Επίλυση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.

- Αν $\beta=0$ τότε $\alpha x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 = -\gamma \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$.
 - Αν $-\frac{\gamma}{\alpha}$ αρνητικό τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
 - Αν $-\frac{\gamma}{\alpha}$ θετικό τότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες(λύσεις)
$$x = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Π.χ

$$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$2x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{6}{3} \Leftrightarrow x^2 = -2 \quad \text{Αδύνατη}$$

- Αν $\gamma=0$ τότε
 $\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha x + \beta = 0$

Π.χ

$$3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{3} \Leftrightarrow x = 0) \quad \text{ή} \quad (x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3)$$

$$6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 6x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (6x = 0 \Leftrightarrow x = 0) \quad \text{ή} \quad (x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2)$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) (x-1) \cdot (x-4) = 0 \quad \beta) x^2 (x-1) = 0 \quad \gamma) (2-x)x = 0$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 5x = 0 \quad \beta) 6x^2 = 12x \quad \gamma) 4x^2 + 8x = 0$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

$$\alpha) x^2 - 16 = 0 \quad \beta) 4x^2 - 16 = 0 \quad \gamma) x^2 = 9$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) (x^3 - x) \cdot (x^2 - 9) = 0 \quad \beta) (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 4) = 0 \quad \gamma) x^4 - x^2 = 0$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$a) 3x^2 + x = 0 \quad \beta) 3x^2 - 6 = 0 \quad \gamma) 3x(x-2) = x^2$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$a) (2x-1)^2 - 1 = 0 \quad \beta) 3(x+2)^2 = 12$$

$$\gamma) \frac{(x-3)^2}{3} = 27 \quad \delta) (3x-1)^2 - 4x^2 = 0 \quad \epsilon) (x+\sqrt{3})^2 - 3 = 0$$

▪ Αν

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ δηλαδή είναι της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

τότε πρώτα υπολογίζουμε την **Διακρίνουσα**

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$ και ανάλογα με το πρόσημο της βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τις ρίζες(λύσεις) της εξίσωσης:

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$	Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Έχει μία διπλή ρίζα την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Παράδειγμα 1

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 6$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες (λύσεις) άνισες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Δηλαδή υπάρχουν 2 διαφορετικοί αριθμοί, το $x=2$ και το $x=3$ που αν το αντικαταστήσουμε στη θέση του x στην εξίσωση, τότε το αποτέλεσμα είναι 0.

Παράδειγμα 2

$$12x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$a=12 \quad \beta=-7 \quad \gamma=1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 49 - 48 = 1 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες(λύσεις) άνισες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 12} = \frac{7 \pm 1}{24} = \begin{cases} \frac{7+1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{8:8}{24:8} = \frac{1}{3} \\ \frac{7-1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{6:6}{24:6} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Παράδειγμα 3

$$x^2 + (\sqrt{3}-1) \cdot x - \sqrt{3} = 0$$

$$a=1 \quad \beta=\sqrt{3}-1 \quad \gamma=-\sqrt{3}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (\sqrt{3}-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3}+1)^2$$

[**Προσέχω** ότι δεν κάνω χρήση της ιδιότητας $\sqrt{3}^2 = 3$ για να μπορεί η Δ να γραφτεί σαν τέλειο τετράγωνο]

Άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες(λύσεις) άνισες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{3}+1 \pm (\sqrt{3}+1)}{2} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Παράδειγμα 4

$$2x^2 - 8x + 8 = 0$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

$$a=2 \quad \beta=-8 \quad \gamma=8$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 2\cdot 8=64-64=0$$

Άρα η εξίσωση έχει 1 ρίζα (διπλή) την

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-(-8)}{2\cdot 2}=\frac{8}{4}=2$$

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i) x^2-6x+8=0 \quad ii) 3x^2-5x+2=0 \quad iii) 5\phi^2+3\phi+9=0$$

$$iv) 2s^2+4s+1=0 \quad v) 9x^2+12x+4=0$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i) 9y^2-3y+64=10y^2+9y \quad ii) 9(\omega^2-2)-8\omega=4\omega(2\omega-1)+14$$

$$iii) (2\kappa-3)^2=(\kappa-1)(\kappa-4)+9\kappa \quad iv) (x+4)^2=(x+2)^2+(x+3)^2$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i) -\omega^2+\omega+90=0 \quad ii) x^2=\frac{1}{3}-\frac{x}{6} \quad iii) \sqrt{3}x^2-x-\sqrt{12}=0$$

$$iv) 25-6x+x^2=0$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$i) (x+1)(x^2-5x+6)=0 \quad ii) (x^2-7x+12)(2x^2+7x-4)=0$$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Τριώνυμο ονομάζεται η παράσταση $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$

- Αν $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma$ θετική τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 2

ρίζες άνισες $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}$ και τότε η $f(x)=0$ γράφεται:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

[προσέξτε μην ξεχνάτε το **a** μπροστά από τις παρενθέσεις]

- Αν $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=0$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 1 ρίζα (διπλή) και η $f(x)$ γράφεται

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_1)=a(x-x_1)^2$$

[προσέξτε μην ξεχνάτε το **a** μπροστά από τις παρενθέσεις]

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

- Αν $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$ αρνητική τότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

Παράδειγμα 1

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

$$a = 6 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Άρα το τριώνυμο έχει 2 ρίζες άνισες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2} \\ \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } f(x) = 6x^2 - 5x + 1 = 6 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right)$$

Παράδειγμα 2

Να γίνει γινόμενο παραγόντων το παρακάτω τριώνυμο

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$$

Θα λύσω την αντίστοιχη εξίσωση $2x^2 - 3x + 7 = 0$

$$a = \frac{1}{2} \quad \beta = -4 \quad \gamma = 8$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 16 - 16 = 0$$

Άρα η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα την

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-4)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\text{Άρα το τριώνυμο γράφεται : } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = \frac{1}{2}(x-4)^2$$

Ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$f(y) = 3y^2 - 8y + 5$$

$$g(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$h(x) = -2x^2 + 5x - 3$$

$$k(y) = -y^2 + 10y - 25$$

2. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3$$

$$g(x) = 9x^2 + 12x + 4$$

$$h(y) = 4x^2 - 17x + 15$$

$$k(y) = 3y^2 - 4y + 1$$

3. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$f(x) = 3x^2 - (\sqrt{2} - 3)x - \sqrt{2} \quad g(x) = 4x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $9 - 4x^2 = 0$

ii) $-3x^2 + 5x = 0$

iii) $x^2 + 5 = 0$

iv) $3x^2 - 4 = 0$

v) $(x+1)^2 = 16$

vi) $2(x-3)^2 + 6 = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $x^2 - 4x + 3 = 0$

ii) $x^2 - 2x - 3 = 0$

iii) $-2x^2 + 5x + 5 = 0$

iv) $3x^2 - x - 5 = 0$

v) $2x^2 - 12x + 18 = 0$

vi) $x^2 - 2x - 3 = 0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

a) $\sqrt{3} \cdot x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot x + \sqrt{5} = 0$

β) $x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

γ) $2 \cdot x^2 - 3\sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$

δ) $\sqrt{3} \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3\sqrt{3} = 0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις

a) $\frac{1}{6} - \frac{x(1-x)}{2} = \frac{x^2}{3}$

β) $7x - \frac{3x(x+1)}{2} = 3$

γ) $\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)(x+1)}{4} = -3$

δ) $\frac{5}{6} - \frac{x^2-1}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $2x(x+3) + 5 = x^2$

ii) $3x(x-2) - 1 = x^2 - 7x$

iii) $x(7x+3) = 5x^2 - 2x - 2$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

β) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

γ) $(x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) + 4 = 0$

δ) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

ε) $6x - 13\sqrt{x} = 5$

στ) $4(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 10 = 0$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x+2)^2 - 2x(6-x) = -2(3x-10)$

ii) $(4x-1)^2 - 9 = (x+1)^2$

iii) $-2x(x-3) = (x+1)^2 - (x-1)(x+2)$

iv) $(x-2)(3x+5) = (2x-1)(x+3)$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\begin{array}{ll} \text{i)} -2x^2 + kx + k^2 = 0 & \text{ii)} x^2 - 3kx - 10k^2 = 0 \\ \text{iii)} x^2 - 2kx + k^2 = 0 & \text{iv)} x^2 - (a + \beta)x + \alpha\beta = 0 \end{array}$$

9. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} x^2 - 3x + 2 & \text{ii)} x^2 - 5x + 6 & \text{iii)} 3x^2 + 5x + 2 \\ \text{iv)} -3x^2 - 3x + 18 & \text{v)} 2x^2 + 5x - 3 & \text{vi)} x^2 + x + \frac{1}{4} \end{array}$$

10. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

$$\text{i)} x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 \quad \text{ii)} x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 \quad \text{iii)} x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3}$$

11. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

$$(\kappa^2 - \lambda^2)x^2 - 2(\kappa^2 + \lambda^2)x + \kappa^2 - \lambda^2, \kappa \neq \pm \lambda$$

$$\alpha^2 x^2 - 2a^3 x + a^4 - 1, a \neq 0$$

$$(x + y)^2 - 7(x + y) + 10$$

$$5ax^2 + (5a - 3\beta)x - 3a\beta, \alpha \neq 0$$

$$x^2 - (2a + \beta)x + a^2 + a\beta$$

12. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{ii)} \frac{3x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x + 3} & \text{iii)} \frac{9x^2 - 4}{9x^2 - 12x + 4} \\ \text{iv)} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x - 12} & \text{v)} \frac{x^2 - 2\lambda x - 3\lambda^2}{x^2 - 7\lambda x + 12\lambda^2} & \text{vi)} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 6x + 8} \end{array}$$

13. Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\frac{(x^2 + 3x - 4)^2 - (x^2 - x)^2}{(x^3 - 1) - (x^2 + x - 2)}$

14. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο άνισες λύσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x^2 + ax - 1 = 0 & \text{β)} ax^2 + 3x - a = 0, a \neq 0 \\ \text{γ)} x^2 + (a + 2)x + a = 0 & \text{δ)} ax^2 + (2a - 1)x + a - 1 = 0 \end{array}$$

15. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 4x^2 - 2(a - \beta)x - a\beta = 0 & \text{β)} ax^2 + \beta x - a = 0, a \neq 0 \\ \text{γ)} x^2 - 2ax + a^2 - \beta^2 = 0 & \text{δ)} x^2 - 3(a + \beta)x + 5a\beta = 0 \end{array}$$

16. Αν η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές, τότε να αποδείξετε ότι και οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:

$$i)x^2 - (\beta - 2\gamma)x + \gamma(1 - \beta + \gamma) = 0$$

$$ii)x^2 + \beta x + \gamma + \mu(2x + \beta) = 0$$

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 3x + 4 = \lambda$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει μία διπλή λύση

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση.

18. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda + 5 = 0, \quad \lambda \neq 0$$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει μία διπλή λύση

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση

19. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - x + \alpha = 0 \quad \text{έχουν κοινή ρίζα;}$$

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο αριθμός 1 είναι λύση της

$$\text{εξίσωσης } (2\lambda^2 + 1)x^2 + 4\lambda x + \lambda + 1 = 0$$

21. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$ έχει πάντοτε δύο ρίζες πραγματικές.

22. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x^2 + (\lambda^2 + 5)x + 8(\lambda + 1) = 0$$

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση

23. Αν η εξίσωση $x^2 + \mu x + \kappa = 0$ έχει διπλή ρίζα δείξτε ότι το ίδιο

$$\text{ισχύει και για την εξίσωση: } \left(1 - \kappa + \frac{\mu^2}{2}\right) \cdot x^2 + \mu(1 + \kappa) \cdot x + \kappa(\kappa - 1) + \frac{\mu^2}{2} = 0$$

24. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^2 + 1)x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \mu^2 + 1 = 0$$

Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, τότε να αποδείξετε ότι:

α) οι αριθμοί λ και μ είναι αντίστροφοι

β) η διπλή λύση της εξίσωσης είναι $x = \mu$.

25. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ για τις οποίες η

$$\text{εξίσωση } x^2 - 4x + 6 = \kappa(\kappa - 1) \quad \text{έχει μία ρίζα διπλή.}$$

26. Αν μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 + ax - 4 = 0$ είναι ο αριθμός 2, να βρεθεί η άλλη ρίζα της.

27. Να λύσετε την εξίσωση $4x^2 + ax + 9 = 0$ αν η εξίσωση αυτή έχει κοινή λύση με τη εξίσωση $2x + 1 = 0$.

28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 6x - 4\lambda + 1 = 0$. Να βρεθεί για ποιές τιμές του λ η εξίσωση

α) έχει 2 διαφορετικές ρίζες

β) έχει μία διπλή ρίζα

γ) δεν έχει ρίζες

29. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 8)x^2 + 2(\lambda + 2)x + (\lambda + 8) = 0$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση

α) να έχει 2 ρίζες άνισες

β) να έχει μία ρίζα διπλή

γ) να είναι αδύνατη

30. Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x + 1 - 2\lambda = 0$ να έχει διπλή ρίζα και μετά να βρείτε τη διπλή ρίζα.

31. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (a - \beta)x - 1 = 0$ για τις διάφορες τιμές των α, β .

32. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$(\lambda + 8)x^2 + (\lambda + 2)x + \frac{\lambda}{4} = 0$ για τις διάφορες τιμές του λ .

33. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$(\lambda^2 + 1)x^2 + (\lambda^5 - 2)x - |\lambda| - 3 = 0$ για τις διάφορες τιμές του λ .

34. Να λυθεί η εξίσωση: $(\lambda + 4)x^2 + (\lambda + 2)x - 2 = 0$

35. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 + (4\lambda + 1)x + 3\lambda^2 + \lambda = 0$

36. Η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 να βρείτε το λ και κατόπιν να βρείτε την άλλη λύση.

- 37.** Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + x - (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
- 38.** Αν $\alpha \neq \beta$ να δείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0$ είναι αδύνατη. Να εξετάσετε τι γίνεται στην περίπτωση που $\alpha = \beta$.
- 39.** Η εξίσωση $x^2 + (\mu + 1)x + \mu + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα. Να βρεθεί το μ και μετά να βρείτε τη ρίζα.
- 40.** Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 3)x^2 - 2(\lambda + 2)x + \lambda = 0$. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες;
- 41.** Να λύσετε τις εξισώσεις:
 $\alpha) \lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2 = 0$
 $\beta) (\lambda - 3)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 3 = 0$
- 42.** Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πάντα ρίζα
 $\alpha) \alpha x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 9\beta = 0, \quad \alpha \neq 0$
 $\beta) x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0, \quad a \neq 0$
- 43.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της $x^2 + (a - 2)x - a = 0$
- 44.** Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda + \frac{9}{4} = 0, \quad \lambda \neq 0$
Για ποια τιμή του λ η εξίσωση i) έχει 2 άνισες ρίζες ii) 1 διπλή iii) δεν έχει ρίζες.
- 45.** (Τ.Θ) α. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$
β. Να σχηματίσετε την εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης του α ερωτήματος
- 46.** (Τ.Θ) α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.
β. Να λύσετε την εξίσωση $:\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$
- 47.** (Τ.Θ) α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού;

Β) Για τιμές του χ που βρήκατε στο α ερώτημα να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0$

48.(Τ.Θ). Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $\chi=1$ να προσδιορίσετε την τιμή του λ .

Β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

49. (Τ.Θ) Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0 \quad , \lambda \neq 0$

Α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$

50.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0 \quad , \lambda \in \mathbb{R}.$

Α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού.

Β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο α ερώτημα η εξίσωση παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$

Γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο α ερώτημα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης , αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού.

51. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (a^2 - 1)x - a = 0 \quad , \alpha \neq 0$

Α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι : $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$

Β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι : $\rho_1 = \alpha \quad \rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$

Γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$.

52. Α. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

Β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4) \quad \alpha \gamma \neq 0$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή , δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \gamma \neq 0$ τότε:

i) $\rho \neq 0$

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

53.(Τ.Θ).α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$$

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $4x^4 + 11x - 3 = 0$ ii) $9x^4 - 35x - 4 = 0$

iii) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ iv) $x^4 - 4x^2 + 8 = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^6 - x^3 - 2 = 0$ ii) $x^8 - x^4 - 12 = 0$

iii) $x^2 + 5|x| + 6 = 0$ iv) $x^2 - 4|x| + 21 = 0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x-1)^2 - 4|x-1| - 45 = 0$ ii) $(x-3)^2 + 3|x-3| - 4 = 0$

iii) $3x^2 + 2|x-1| - 3 = 0$ iv) $x^2 - 3x + |3-x| = 0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x - 11\sqrt{x} + 30 = 0$ ii) $|2x-4| = x^2 - 3x + 4$

iii) $2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} = 1$ iv) $\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $|x^2 - x| + |x^2 - 11x + 10| = 0$ ii) $3(x+5)^2 + 2|x+5| - 5 = 0$

iii) $(x^2 + 5x + 7)^2 + (x^2 + 5x + 7) - 2 = 0$

iv) $2(x^2 - 28)^2 + 5(x^2 - 28) - 3 = 0$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$

ii) $(x-1)^2 + 4|x-1| - 5 = 0$

iii) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

ΤΥΠΟΙ VIETA

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Αν συμβολίσουμε με S το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών αυτών τότε θα έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{τύποι του Vieta})$$

Οι παραπάνω τύποι ονομάζονται τύποι του Vieta (από τον Γάλλο μαθηματικό Franciscus Vieta (1540-1603)) με την βοήθεια των οποίων η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Παράδειγμα 1

Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 4x - 6 = 0$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$\text{i)} x_1 + x_2 \quad \text{ii)} x_1 \cdot x_2 \quad \text{iii)} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \text{iv)} \frac{2}{x_1 + 3} + \frac{2}{x_2 + 3} \quad \text{v)} x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{vi)} (x_1 - x_2)^2 \quad \text{vii)} \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} \quad \text{viii)} x_1^3 + x_2^3$$

Λύση

$$\text{i)} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \quad \text{ii)} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{6}{3} = -2$$

$$\text{iii)} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{6}{3}} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{iv)} \frac{2}{x_1 + 3} + \frac{2}{x_2 + 3} = \frac{2(x_2 + 3) + 2(x_1 + 3)}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} = \frac{2(x_1 + x_2) + 12}{x_1 \cdot x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3} + 12}{-\frac{6}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} + 9} = \frac{\frac{44}{3}}{\frac{33}{3}} = \frac{44}{33} = \frac{4}{3}$$

$$\text{v)} x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2\frac{4}{3} - 2\left(-\frac{6}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

$$\text{vi)} (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \frac{20}{3} - 2\left(-\frac{6}{3}\right) = \frac{20}{3} + \frac{12}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{vii)} \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{20}{3}}{-\frac{6}{3}} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$$

$$\text{viii)} x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{6}{3}\right)\frac{4}{3} = \frac{64}{27} + \frac{24}{3} = \frac{280}{3}$$

ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η εξίσωση 2^{ου} βαθμού της οποίας οι ρίζες είναι οι αριθμοί 2 και 3.

Λύση

Αφού οι ρίζες είναι οι αριθμοί 2 και 3 άρα $S=2+3=5$ και $P=2 \cdot 3=6$ οπότε η εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι η $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 9 και γινόμενο -52

Λύση

Έστω α, β οι 2 αριθμοί. Άρα $\alpha + \beta = 9$ και $\alpha \cdot \beta = -52$.

Οπότε οι αριθμοί α, β είναι οι ρίζες μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με $S=9$ και $P=-52$. Δηλαδή είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x - 52 = 0$$

Με την χρήση της διακρίνουσας έχω ότι:

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-52) = 81 + 208 = 289.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \alpha, \beta &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{9 \pm 17}{2} \\ \alpha &= \frac{9+17}{2} = 13 \quad \text{και} \quad \beta = \frac{9-17}{2} = -4 \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) -x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \beta) 2x^2 + 4x + 6 = 0 \quad \gamma) -\sqrt{3}x^2 - \sqrt{27}x + \sqrt{12} = 0$$

2. Η εξίσωση $3x^2 - 5x - 6 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 . Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\iota) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \text{ii)} (2x_1 - 3)(2x_2 - 3) \quad \text{iii)} x_1^2 + x_2^2 \quad \text{iv)} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \quad \text{v)} \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$$

3. Να κατασκευάσετε εξίσωση που να έχει ρίζες τους αριθμούς

$$\alpha) 4 \text{ και } 3 \quad \beta) 3 \text{ και } \frac{1}{3} \quad \gamma) -6 \text{ και } 7$$

4. Να κατασκευάσετε εξίσωση που να έχει ρίζες τους αριθμούς

$$\alpha) -4, -1 \quad \beta) \sqrt{3} + 2, 2 - \sqrt{3} \quad \gamma) \frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

5. Να προσδιοριστεί η εξίσωση που έχει ρίζες:

$$\text{i)} a, a-1$$

$$\text{ii)} \frac{\alpha + \beta}{\beta}, \frac{\beta + \alpha}{\alpha}$$

$$\text{iii)} 2a - 3\beta, 2\alpha + 3\beta$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

6. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 18x + 21 = 0$ με $a \neq 0$. Αν το άθροισμα των ριζών είναι 6 να βρείτε το a και το γινόμενο των ριζών.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ η οποία έχει ρίζες x_1, x_2 . Να υπολογίσετε το a αν γνωρίζετε ότι $x_1^2 + x_2^2 = 112$

8. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ να βρεθεί δευτεροβάθμια εξίσωση που να έχει ρίζες $\rho_1 = 3x_1 - x_2$ και $\rho_2 = 3x_2 - x_1$

9. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες $x^2 - 5x + 3 = 0$, τότε χωρίς να βρεθούν οι ρίζες

i) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$x_1 + x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1^2 + x_2^2 \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$

10. Για ποιες τιμές του a η εξίσωση $x^2 - (4 - 5a + a^2)x - a = 0$ έχει ρίζες αντίθετες.

11. Έστω η εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 1)x - \lambda = 0$. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης να υπολογίσετε το λ ώστε να ισχύει $3x_1^2 - 7x_1^2x_2 - 7x_1x_2^2 + 3x_2^2 = 2$

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. Βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει ρίζες α) αντίθετες β) αντίστροφες

13. Να υπολογίσετε το a ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + (6a^2 + a - 2)x + (4a^2 + 7a - 1) = 0$ να είναι
α) αντίθετες
β) αντίστροφες

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + 3 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ με ρίζες x_1, x_2 . Να βρεθεί ο λ ώστε να ισχύει $x_1 = 3x_2$

15. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x + a = 0$. Να βρείτε το a αν γνωρίζετε ότι $x_1^2 + x_2^2 = 6$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

16. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3ax - 7a^2 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 . Να βρείτε την τιμή του a ώστε $x_1^2 + x_2^2 = 18$

17. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0$ να είναι διπλάσια της άλλης

18. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της $x^2 - 5x + 2 = 0$ να βρεθεί η εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς i) $x_1 + 3, x_2 + 3$ ii) x_1^2, x_2^2

19. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, να αποδείξετε ότι $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

20. Αν μια ρίζα της $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ είναι διπλάσια της άλλης να δειχτεί ότι $2b^2 = 3ac$

21. Αν η εξίσωση $x^2 + ax + b = 0$ έχει ρίζες δύο διαδοχικούς ακεραίους, να αποδειχθεί ότι $a^4 - 4b = 1$

22. Αν μια ρίζα της $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ είναι τριπλάσια της άλλης να δειχτεί ότι $3b^2 = 16ac$

23. Δίνονται οι εξισώσεις $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (1) και $x^2 + Sx + P = 0$, όπου S και P το άθροισμα και γινόμενο ριζών της (1). Να αποδείξετε ότι $S^2 - 4P = \frac{\Delta}{a^2}$

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \mu x - \lambda = 0$ και $\mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in (0, +\infty)$

A) Να δείξετε ότι έχει ρίζες ετερόσημες.

B) Αν P, S είναι το γινόμενο και το άθροισμα αντίστοιχα των ριζών της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές των λ, μ αν ισχύει

$$\frac{P^2 + S^2 + 5}{2} = -P - 2S$$

25. Η εξίσωση $(a-2)x^2 - (5-a)x - 5 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 , Να βρεθεί ο a αν $x_1 - x_2 = 2\sqrt{6}$

26. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 5)x - \lambda + 4 = 0$ έχει

- A)μία διπλή ρίζα
- B)2 ρίζες αντίστροφες
- Γ)2 ρίζες αντίθετες
- Δ)2 ρίζες ετερόσημες
- E)2 θετικές ρίζες
- στ)2 αρνητικές ρίζες

27. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδό 16 τ.μ και περίμετρο 20 μ. Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 1)x^2 - 3|\lambda|x + \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, να υπολογίσετε την τιμή του λ .

B) Αν $\lambda \neq 1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες άνισες.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της $f(x) = 0$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(\lambda) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 7$

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $|g(2) \cdot x - \sqrt{21}| = \sqrt{84}$

29. (Τ.Θ) α. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$

Β. Να σχηματίσετε την εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης του α ερωτήματος

30. (Τ.Θ). Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20$ cm και εμβαδό $E = 24$ cm^2 .

A) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου

B) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου

31. (Τ.Θ). Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

A) Να δείξετε ότι $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$

B) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B.

32. (Τ.Θ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:
 $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

33.(Τ.Θ) Δίνεται το τριώνυμο : $2x^2 + 5x - 1$

Α)Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2

Β)Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων : $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Γ)Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

34.(Τ.Θ).Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Α)Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης

Β)Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$

35.(Τ.Θ).Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α)Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης

Β)Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$

36.(Τ.Θ) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α)Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

Β)Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει : $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$

37.(Τ.Θ) . Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

Α)η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες

Β)το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

38.(Τ.Θ).Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α)Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες

Β)Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

ι)Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού λ .

Γ) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$

ii) να βρείτε το λ .

39.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2 = 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε λ .

Β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δυο ρίζες ίσες;

Γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα

και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό λ .

40.(Τ.Θ). Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε λ

Γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$

41.(Τ.Θ) . Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

Α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ είναι ανεξάρτητη του λ .

Β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ

Γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

42.(Τ.Θ) Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του, η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Β) Υποθέτουμε τώρα ότι μια από τις ρίζες της εξίσωσης είναι ο αριθμός ρ .

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$

ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$

- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

43.(T.Θ). Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι , για κάθε λ η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

B) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$$

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 \cdot x_2^2$$

44.(T.Θ). Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda < 1$

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

B) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$

Γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε :

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ .

45.(T.Θ). Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε :

A) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

B) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

Γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα , η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

46.(T.Θ). Δίνεται το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

A) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και P των ριζών του τριωνύμου , να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2^a$ και $\beta = -3a$.

B) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι $a < 0$

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + a < 0$.

47.(T.Θ) Τέσσερις αθλητές , ο Αργύρης , ο Βασίλης , ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους,

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

t_A, t_B, t_T, t_Δ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις :

$$t_A < t_B, \quad t_T = \frac{t_A + t_B}{3}, \quad |t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$$

A)i) Να δείξετε ότι : $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει : $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$

i) Να γράψετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B .

Δύο ρίζες πραγματικές και άνισες	$\Delta > 0$ και $\alpha \neq 0$
Δύο ρίζες ίσες	$\Delta = 0$ και $\alpha \neq 0$
Καμία πραγματική ρίζα	$\Delta < 0$
Δύο ρίζες ετερόσημες	$P < 0$
Δύο ρίζες ετερόσημες (θετική η μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή)	$P < 0$ και $S > 0$
Δύο ρίζες ετερόσημες (αρνητική η μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή)	$P < 0$ και $S < 0$
Δύο ρίζες θετικές	$\Delta \geq 0$ και $P > 0$ και $S > 0$
Δύο ρίζες θετικές και άνισες	$\Delta > 0$ και $P > 0$ και $S > 0$
Δύο ρίζες θετικές και ίσες	$\Delta = 0$ και $S > 0$
Μία ρίζα θετική και η άλλη μηδέν	$P = 0$ και $S > 0$
Δύο ρίζες αρνητικές	$\Delta \geq 0$ και $P > 0$ και $S < 0$
Δύο ρίζες αρνητικές και άνισες	$\Delta > 0$ και $P > 0$ και $S < 0$
Δύο ρίζες αρνητικές και ίσες	$\Delta = 0$ και $S < 0$
Μία ρίζα αρνητική και η άλλη μηδέν	$P = 0$ και $S < 0$
Μία ρίζα το μηδέν	$P = 0$
Δύο ρίζες ίσες με μηδέν	$\Delta = 0$ και $P = 0$
Δύο ρίζες αντίστροφες	$\Delta \geq 0$ και $P = 1$
Δύο ρίζες αντίθετες	$P < 0$ και $S = 0$
Δύο ρίζες ομόσημες	$\Delta \geq 0$ και $P > 0$
Δύο ρίζες ομόσημες και διαφορετικές	$\Delta > 0$ και $P > 0$
Δύο ρίζες ομόσημες και ίσες	$\Delta = 0$ και $P > 0$