

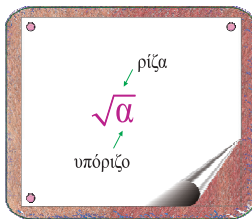


? Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;

Πώς συμβολίζουμε την τετραγωνική ρίζα του a ;

Με τι ισούται η $\sqrt{0}$;

Τετραγωνική ρίζα



✓ **Τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού a είναι ο θετικός αριθμός που όταν τον υψώσουμε στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό a .

Δηλαδή $\sqrt{a} = x$, αν και μόνον αν, $x^2 = a$ (με $x > 0$).

Η τετραγωνική ρίζα του αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.

Έτσι $\sqrt{9} = 3$ γιατί $3^2 = 9$. Ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$.



Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a ισχύει: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Για παράδειγμα, $\sqrt{4^2} = 4 = |4|$ και $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4 = |-4|$.

? Πώς αποδεικνύουμε τις παρακάτω ισότητες;

$$\bullet \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \text{ όπου } a \geq 0, b \geq 0.$$

$$\bullet \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ όπου } a \geq 0, b > 0.$$



Υψώνουμε και τα δύο μέλη της ισότητας στο τετράγωνο. Έτσι η ισότητα γράφεται:

$$(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha\beta})^2 \text{ ή } (\sqrt{\alpha})^2 (\sqrt{\beta})^2 = \alpha\beta$$

ή $\alpha\beta = \alpha\beta$, που ισχύει.

• Όμοια έχουμε:

Για το 1^ο μέλος:
$$\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{\alpha})^2}{(\sqrt{\beta})^2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Για το 2^ο μέλος:
$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta}$$

Άρα
$$\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 \text{ ή } \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Πράξεις με ρίζες

Το γινόμενο (ή το πηλίκο) των τετραγωνικών ριζών δύο αριθμών είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου (ή του πηλίκου) τους.

? Ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$; (με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$).

✓ Έστω $\alpha = 36$ και $\beta = 64$ τότε :

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14.$$

Όμως
$$\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

Έτσι με τη βοήθεια του παραπάνω αντιπαραδείγματος διαπιστώσαμε ότι $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$.

Άρα το άθροισμα των τετραγώνων ριζών δεν μπορούμε να το γράψουμε ως τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος.



Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή, τότε βρίσκουμε ένα ισοδύναμο με το αρχικό κλάσμα του οποίου ο παρονομαστής είναι ρητός πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τον άρρητο παρονομαστή. Για παράδειγμα ,

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ και } \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Διάταξη

Πως συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β ;

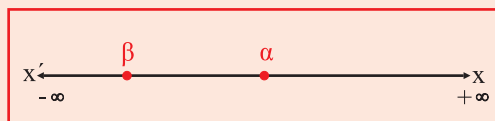


Ο αριθμός α είναι **μεγαλύτερος** από τον β , όταν και μόνον όταν, η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή $\alpha > \beta$, όταν και μόνον όταν, $\alpha - \beta > 0$.

Ο αριθμός α είναι **μικρότερος** από τον β , όταν και μόνον όταν, η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή $\alpha < \beta$, όταν και μόνον όταν, $\alpha - \beta < 0$



Αν $\alpha > \beta$ τότε ο αριθμός α βρίσκεται δεξιότερα από τον αριθμό β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



**Ποιες ιδιότητες ανισοτήτων γνωρίζετε;
Να τις αποδείξετε.**

**Διάταξη και
πρόσθεση**

1. Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν

$$\alpha > \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma > \beta + \gamma.$$

Απόδειξη:

Θέλουμε να συγκρίνουμε τους αριθμούς $\alpha + \gamma$ και $\beta + \gamma$. Σύμφωνα με τον ορισμό αν η διαφορά $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός τότε ο $\alpha + \gamma$ θα είναι μεγαλύτερος από τον $\beta + \gamma$.

Είναι

$$(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta > 0$$

διότι $\alpha > \beta$. Συνεπώς $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

2. Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν

$$\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta \text{ τότε } \alpha + \gamma > \beta + \delta.$$

Απόδειξη:

Όπως και προηγουμένως σχηματίζουμε τη διαφορά:
 $(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) = \alpha + \gamma - \beta - \delta = (\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) > 0$, ως άθροισμα θετικών. Έτσι είναι $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

3. Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν

$$\alpha > \beta \text{ και } \gamma > 0 \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma.$$

Απόδειξη:

$\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta) > 0$, διότι $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$.
 Έτσι $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

4. Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς. Δηλαδή αν

$$\alpha > \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha\gamma < \beta\gamma.$$

Απόδειξη:

$\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta) < 0$, διότι $\gamma < 0$ και $\alpha - \beta > 0$.
 Έτσι $\alpha\gamma < \beta\gamma$.



Εφαρμογή των ιδιοτήτων των ανισοτήτων βρίσκουμε στη λύση ανισώσεων. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί όταν λύνουμε μία ανίσωση, στο σημείο που διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου. Αν αυτός είναι αρνητικός διαιρούμε και αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.



1. Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α είναι ο θετικός αριθμός, που όταν τον υψώσουμε στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό α .

2. Για τις τετραγωνικές ρίζες ισχύουν οι ιδιότητες:

i. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

ii. $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$ όπου $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$

iii. $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ όπου $\alpha \geq 0, \beta > 0$

3. Ένας αριθμός α λέγεται μεγαλύτερος από έναν αριθμό β , αν και μόνον αν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Δηλαδή

$$\alpha > \beta, \text{ όταν και μόνον όταν, } \alpha - \beta > 0.$$

Ένας αριθμός α λέγεται μικρότερος από έναν αριθμό β , αν και μόνον αν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός.

Δηλαδή

$$\alpha < \beta, \text{ όταν και μόνον όταν, } \alpha - \beta < 0$$

4. Για τις ανισότητες ισχύουν οι ιδιότητες:

i. αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

ii. αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

iii. αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$

iv. αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$



- 1 Να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $\sqrt{a^2} = a$

β. $\sqrt{(-4)^2} = -4$

γ. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

δ. $\sqrt{20} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Λύση

α. Λ, διότι $\sqrt{a^2} = |a|$.

β. Λ, διότι $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ ή αλλιώς $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$.

γ. Σ, διότι $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

δ. Σ, διότι $\sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{5} = \sqrt{4}\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

- 2 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $\sqrt{3} + \sqrt{3}$

β. $4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$

γ. $2\sqrt{7} - 4\sqrt{2} - 5\sqrt{7} + 6\sqrt{2}$

Λύση

α. $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

β. $4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (4-3)\sqrt{5} = 1\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \gamma. 2\sqrt{7} - 4\sqrt{2} - 5\sqrt{7} + 6\sqrt{2} &= 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (2-5)\sqrt{7} + (-4+6)\sqrt{2} \\ &= -3\sqrt{7} + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

- 3 Να υπολογιστούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x ώστε να ορίζεται η παράσταση: $\sqrt{4x - (3x+5) - 16}$.

Λύση

Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει η υπόρριζος ποσότητα να μην είναι αρνητική (δηλαδή θετική ή μηδέν). Έτσι:

$$4x - (3x + 5) - 16 \geq 0 \quad \text{ή} \quad 4x - 3x - 5 - 16 \geq 0 \quad \text{ή} \quad 4x - 3x \geq 21 \quad \text{ή} \quad x \geq 21$$

4 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha. A = \sqrt{5^2} - (\sqrt{49} + 2\sqrt{144} - \sqrt{7^2}) - 8\sqrt{\frac{9}{16}} \quad \beta. B = 2\sqrt{32} + 3\sqrt{45} - 2\sqrt{12} + 5\sqrt{72}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. A &= \sqrt{5^2} - (\sqrt{49} + 2\sqrt{144} - \sqrt{7^2}) - 8\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{5^2} - (7 + 2 \cdot 12 - 7) - 8\sqrt{\frac{9}{16}} = \\ &= \sqrt{5^2} - (7 + 24 - 7) - 8\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{5^2} - 24 - 8\sqrt{\frac{9}{16}} = 5 - 24 - 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 - 24 - 6 = -25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. B &= 2\sqrt{32} + 3\sqrt{45} - 2\sqrt{12} + 5\sqrt{72} = 2\sqrt{16 \cdot 2} + 3\sqrt{9 \cdot 5} - 2\sqrt{4 \cdot 3} + 5\sqrt{36 \cdot 2} = \\ &= 2\sqrt{16} \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 4\sqrt{2} + 3 \cdot 3\sqrt{5} - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 5 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = \\ &= 8\sqrt{2} + 9\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 30\sqrt{2} = 38\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 9\sqrt{5}. \end{aligned}$$

5 Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha. \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \quad \beta. (3 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - 2)$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} - \sqrt{3}^2 = \sqrt{6} - 3 \\ \beta. (3 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - 2) &= 3\sqrt{3} - 2 \cdot 3 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

6 Να μετατρέψετε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή:

$$\alpha. \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \beta. \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad \gamma. \frac{4}{3\sqrt{7}}$$

Λύση

$$\alpha. \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\beta. \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma. \frac{4}{3\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{3 \cdot (\sqrt{7})^2} = \frac{4\sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{4\sqrt{7}}{21}$$

- 7 Να υπολογίσετε την τετραγωνική ρίζα $\sqrt{(4-x)^2}$.

Λύση

$\sqrt{(4-x)^2} = |4-x|$. Έτσι αν $4-x \geq 0$ δηλαδή αν $x \leq 4$ τότε $\sqrt{(4-x)^2} = 4-x$ και αν $4-x < 0$ δηλαδή αν $x > 4$ τότε $\sqrt{(4-x)^2} = x-4$.

- 8 Να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης:

$$A = \sqrt{3+3},$$

$$B = \sqrt{3 \cdot 3},$$

$$\Gamma = \sqrt{3} + \sqrt{3},$$

$$\Delta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

Λύση

$$A = \sqrt{3+3} = \sqrt{6},$$

$$B = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\Gamma = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\Delta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = 3$$

- 9 Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με πλευρά την υποτείνουσα του $\hat{A}B\Gamma$ σχεδιάζουμε εξωτερικά του ορθογωνίου τριγώνου τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$. Αν $AB = 6\text{cm}$ και $A\Gamma = 8\text{cm}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $B\Gamma\Delta E$ και την πλευρά του.

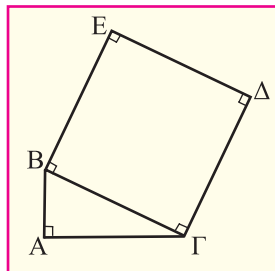
Λύση

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad B\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 \quad \text{ή} \quad B\Gamma^2 = 100\text{cm}^2$$

Το εμβαδόν του τετραγώνου $B\Gamma\Delta E$ είναι:

$$E = B\Gamma^2 = 100\text{cm}^2 \quad \text{και η πλευρά του} \quad B\Gamma = \sqrt{100} = 10\text{cm}.$$



- 10 Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha > \beta$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $3\alpha + 4\gamma$ και $3\beta + 4\gamma$.

Λύση

Αφού $\alpha > \beta$ τότε $3\alpha > 3\beta$ (1) (πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη της δεδομένης ανίσωσης με το θετικό αριθμό 3).

Στην σχέση (1) προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό 4γ και έχουμε:

$3\alpha + 4\gamma > 3\beta + 4\gamma$. Επομένως ο $3\alpha + 4\gamma$ είναι μεγαλύτερος του $3\beta + 4\gamma$.

- 11** Να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\alpha < \beta$ τότε $-2\alpha > -2\beta$.

β. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 > 0$.

γ. Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

δ. Αν $\alpha \cdot \beta > 1$ τότε $\alpha > \frac{1}{\beta}$ με $\beta \neq 0$.

ε. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

Λύση

α. (Σ), διότι πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη της δεδομένης ανίσωσης με -2 και αλλάξαμε τη φορά αφού $-2 < 0$.

β. (Λ), διότι αν $\alpha = 0$ τότε ο α^2 είναι 0.

γ. (Σ), διότι προσθέτουμε και στα δύο μέλη της δεδομένης ανίσωσης το γ .

δ. (Λ), διότι από τη σχέση $\alpha \cdot \beta > 1$ για να πάμε στην $\alpha > \frac{1}{\beta}$ πρέπει να πολλαπλασιά-

σουμε με το $\frac{1}{\beta}$ του οποίου δεν ξέρουμε το πρόσημο.

ε. (Σ), διότι στη δεδομένη ανίσωση προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $-\gamma$, οπότε θα προκύψει ανίσωση της ίδιας φοράς με την αρχική.

- 12** Αν $2\alpha + \beta < 4$ και $4\alpha - \beta < 8$ τότε:

α. $\alpha > 2$

β. $\alpha < 8$

γ. $\alpha > 0$

δ. $\alpha < 2$

Λύση

Οι δεδομένες ανισώσεις είναι της ίδιας φοράς, έτσι μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

$2\alpha + \beta + 4\alpha - \beta < 4 + 8$ ή $6\alpha < 12$ δηλαδή $\alpha < 2$.

Σωστή απάντηση είναι η δ.

13. Αν $a < 0$, να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς a ,

$$\frac{1}{3}a \text{ και } a-3.$$

Λύση

Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς a , $\frac{1}{3}a$ σχηματίζουμε τη διαφορά:

$$a - \frac{1}{3}a = \frac{3a-a}{3} = \frac{2a}{3} < 0 \text{ (διότι } a < 0 \text{ άρα } \frac{2}{3}a < 0 \text{)}. \text{ Έτσι } a < \frac{1}{3}a \text{ (1). Όμοια θα συγκρίνουμε τους αριθμούς } a, a-3. \text{ Έχουμε } (a-3) - a = a-3-a = -3 < 0.$$

Άρα $a-3 < a$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $a-3 < a < \frac{1}{3}a$.

14. Αν $x > 3$ ποια από τις ακόλουθες ανισώσεις είναι λάθος;

α. $x+3 > 3+3$

β. $x-3 > 3-3$

γ. $3-x > -3+3$

δ. $3x > 3 \cdot 3$

Λύση

Λανθασμένη είναι η ανίσωση (γ), διότι:

αφού $x > 3$ πολλαπλασιάζουμε με το -1 και αλλάζουμε τη φορά. Έτσι $-x < -3$. Προσθέτουμε το 3 και έχουμε: $3-x < -3+3$.

15. Αν $2 < x < 5$ και $-1 < y < 4$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

α. $x+2$

β. $y-1$

γ. $-x$

δ. $x+y$

ε. $2x-y$

Λύση

α. $2 < x < 5$. Προσθέτουμε το 2 και έχουμε: $2+2 < x+2 < 5+2$ δηλαδή $4 < x+2 < 7$.

β. $-1 < y < 4$. Προσθέτουμε το -1 και έχουμε: $-1-1 < y-1 < 4-1$ δηλαδή $-2 < y < 3$.

γ. $2 < x < 5$. Πολλαπλασιάζουμε με το -1 , αλλάζουμε τη φορά και έχουμε:

$$2 \cdot (-1) > -1x > 5 \cdot (-1), \text{ δηλαδή } -2 > -x > -5 \text{ ή } -5 < -x < -2.$$

δ. Τις ανισώσεις $2 < x < 5$ και $-1 < y < 4$ τις προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$2+(-1) < x+y < 5+4 \text{ ή } 1 < x+y < 9$$

ε. Την ανίσωση $2 < x < 5$ την πολλαπλασιάζουμε με το 2 και έχουμε: $2 \cdot 2 < 2x < 2 \cdot 5$ ή $4 < 2x < 10$ (1). Στην ανίσωση $-1 < y < 4$ πολλαπλασιάζουμε με το -1 αλλάζο-

ντας τη φορά: $-1 \cdot (-1) > -1y > 4 \cdot (-1)$ ή $1 > -y > -4$ ή $-4 < -y < 1$ (2).

Τις σχέσεις (1) και (2) τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$4 - 4 < 2x - y < 10 + 1, \text{ δηλαδή } 0 < 2x - y < 11.$$

16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha. \frac{2x+2}{3} + 1 \geq \frac{x}{2} - \frac{x-3}{4}$$

$$\beta. \frac{4x-1}{5} - \frac{1}{2} > \frac{2x-1}{10} - \frac{4-x}{2}$$

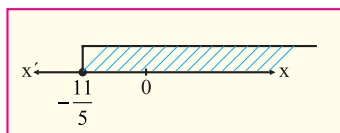
Λύση

$$\alpha. \frac{2x+2}{3} + 1 \geq \frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} \quad (\text{Πολλαπλασιάζουμε επί 12 αφού ΕΚΠ}(2,3,4)=12)$$

$$12 \cdot \frac{2x+2}{3} + 12 \cdot 1 \geq 12 \cdot \frac{x}{2} - 12 \cdot \frac{x-3}{4} \quad \text{ή} \quad 4(2x+2) + 12 \geq 6x - 3(x-3)$$

$$8x + 8 + 12 \geq 6x - 3x + 9 \quad \text{ή} \quad 8x - 6x + 3x \geq 9 - 8 - 12 \quad \text{ή} \quad 5x \geq -11 \quad \text{ή} \quad \frac{5x}{5} \geq -\frac{11}{5}$$

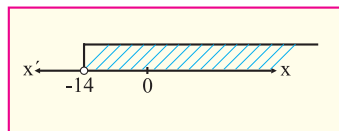
$$x \geq -\frac{11}{5}.$$



$$\beta. \frac{4x-1}{5} - \frac{1}{2} > \frac{2x-1}{10} - \frac{4-x}{2} \quad \text{ή} \quad 10 \cdot \frac{4x-1}{5} - 10 \cdot \frac{1}{2} > 10 \cdot \frac{2x-1}{10} - 10 \cdot \frac{4-x}{2}$$

$$2(4x-1) - 5 \cdot 1 > 2x - 1 - 5(4-x) \quad \text{ή} \quad 8x - 2 - 5 > 2x - 1 - 20 + 5x$$

$$8x - 2x - 5x > -1 - 20 + 2 + 5 \quad \text{ή} \quad 1x > -14 \quad \text{ή} \quad x > -14.$$



17 Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha. 5(x-2) + 5 - 9x > -1 - 4x$$

$$\beta. 6x + 4 > 13 + 2(3x - 10)$$

Λύση

$$\alpha. 5(x-2) + 5 - 9x > -1 - 4x \quad \text{ή} \quad 5x - 10 + 5 - 9x > -1 - 4x \quad \text{ή}$$

$$5x - 9x + 4x > -1 + 10 - 5 \quad \text{ή} \quad 0x > 4. \text{ Η ανίσωση είναι αδύνατη, γιατί δεν υπάρχει}$$

αριθμός που να την επαληθεύει, αφού ο $0x$ ισούται με 0 που δεν είναι μεγαλύτερος του 4 .

$$\beta. 6x + 4 > 13 + 2(3x - 10) \quad \text{ή} \quad 6x + 4 > 13 + 6x - 20 \quad \text{ή} \quad 6x - 6x > 13 - 20 - 4 \quad \text{ή}$$

$$0x > -11.$$

Η ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του x .

18 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2(x-4) + 6x - 8 \geq 3(2x-4) + 10 \quad \text{και} \quad -2(x-1) + 3x - 4(x-2) > -2x + 1$$

Λύση

Λύνουμε αρχικά κάθε ανίσωση χωριστά.

$$2(x-4) + 6x - 8 \geq 3(2x-4) + 10 \quad \text{και} \quad -2(x-1) + 3x - 4(x-2) > -2x + 1$$

$$2x - 8 + 6x - 8 \geq 6x - 12 + 10$$

$$-2x + 2 + 3x - 4x + 8 > -2x + 1$$

$$2x + 6x - 6x \geq -12 + 10 + 8 + 8$$

$$-2x + 3x - 4x + 2x > 1 - 8 - 2$$

$$2x \geq 14$$

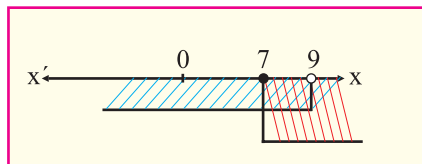
$$-1x > -9$$

$$x \geq 7$$

$$\frac{-1x}{-1} < \frac{-9}{-1}$$

$$x < 9$$

Σημειώνουμε στον ίδιο άξονα τις παραπάνω λύσεις:





1. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$x^2 - 4xy \text{ για } x = \sqrt{2} - 1 \text{ και } y = 2 + \sqrt{3}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. (\sqrt{12} + \sqrt{75})(\sqrt{48} - \sqrt{27}) = 21$$

$$\beta. \left(\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{20}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}} \right) = \frac{11}{2}$$

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λάθος).

$$\alpha. \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\beta. \sqrt{9a^2} = 3a \text{ αν } a \geq 0$$

$$\gamma. \sqrt{(-2)^2} = -2$$

$$\delta. \sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b} \text{ όπου } a \text{ είναι πραγματικός αριθμός}$$

4. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\alpha. \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\beta. \frac{2}{3\sqrt{5}}$$

$$\gamma. \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha. 5\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}$$

$$\beta. 7\sqrt{2} : \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}-1}$$

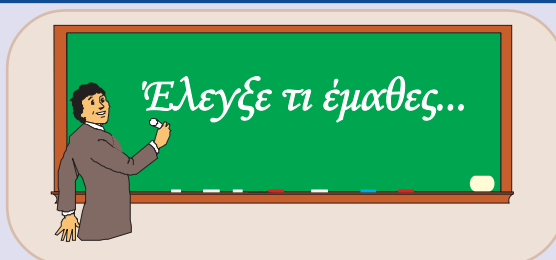
6. Αν $a = 7$ και $b = -5$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha. (a+b)^2$$

$$\beta. a^2 + 2ab + b^2$$

Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

7. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση τετράγωνο πλευράς a έχει όγκο $V = 64 \text{ cm}^3$ και ύψος $\gamma = 16 \text{ cm}$. Πόσο είναι η πλευρά του τετραγώνου;
8. Αν $\alpha = \frac{2\sqrt{50}}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{10}$ και β είναι η ρίζα της εξίσωσης $\sqrt{3}x - 7\sqrt{3} = 0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{2} + \sqrt{71 - \beta} - \sqrt{100 + \alpha}$
9. Αν $0 < \alpha < 2$ να διατάξετε από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: 0, $1, \frac{\alpha}{2}, \alpha - 2$.
10. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με το σωστό σύμβολο ανισότητας.
- α. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \dots 0$
- β. $\alpha < \beta$ τότε $-\frac{1}{2}\alpha \dots -\frac{1}{2}\beta$
- γ. Αν $\gamma < 0$ και $\alpha < \beta$ τότε $\alpha\gamma \dots \beta\gamma$
- δ. $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha - \beta \dots 0$
11. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- α. Ένας αριθμός α είναι από έναν αριθμό β όταν $\alpha - \beta < 0$.
- β. Κάθε θετικός αριθμός είναι από κάθε αρνητικό.
- γ. Κάθε αριθμός που είναι μικρότερος από το μηδέν λέγεται αριθμός.
12. Αν για το μήκος α ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ γνωρίζουμε ότι $2,5 < \alpha < 2,6$ και το πλάτος του β είναι 1,3, μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται το εμβαδόν του;
13. Να λύσετε τις ανισώσεις:
- α. $\frac{x-1}{2} - \frac{-3x+4}{6} > \frac{x+2}{4}$ β. $\frac{x+1}{3} - \frac{2(x+4)}{5} < 1$
14. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $2(x-1) - 4(x+2) > x+7$ και $-2(x+3) + 2x - 12 < x+4$.



Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;
Ποιες ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών γνωρίζετε;

Ερώτηση 2

Πως συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b ;
Ποιες ιδιότητες ανισοτήτων γνωρίζετε;

Άσκηση 1

i. Αν $x = \sqrt{2} + 1$, τότε η τιμή της παράστασης $x^2 - 2x + 3$ είναι ίση με:

α. 1 β. $\sqrt{2}$ γ. 4 δ. $\sqrt{2} + 1$

ii. Αν $x - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$ να υπολογιστεί ο x^2 .

Άσκηση 2

Αν $2x - y < 4$ και $x + y < 8$ τότε:

α. $x > 4$ β. $x < 4$ γ. $y > 0$ δ. $x + y + 1$

Άσκηση 3

Έστω ότι ισχύει: $(x - y) \cdot (x^2 + 2) > 0$ τότε

α. $x < y$ β. $x = y$ γ. $x > y$ δ. κανένα από τα προηγούμενα

Κεφάλαιο 2°

Βιβλιομάθημα 3°

Μονώνυμα
Αναγωγή όμοιων όρων
Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Βιβλιομάθημα 4°

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Βιβλιομάθημα 5°

Παραγοντοποίηση πολυωνύμων

Βιβλιομάθημα 6°

Κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις
Πρόσθεση - Αφαίρεση κλασματικών αλγεβρικών παρα-
στάσεων

Βιβλιομάθημα
3

Μονώνυμα
Αναγωγή όμοιων όρων
Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων



? Ποιες παραστάσεις λέγονται αλγεβρικές;

Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης;



Αλγεβρικές ονομάζονται οι παραστάσεις που περιέχουν αριθμούς και μεταβλητές (γράμματα) που συνδέονται με τα σύμβολα των τεσσάρων πράξεων.

Για παράδειγμα, οι παραστάσεις :

$$3x, 2a^2 + x, -\sqrt{3}y^2 + 1$$

είναι αλγεβρικές. Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή (ή τις μεταβλητές) με έναν αριθμό (ή με αριθμούς) και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής αυτής παράστασης.

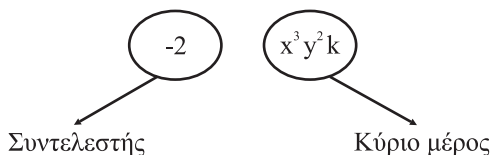
Για παράδειγμα: αν $a = 2$ η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης $2a^2 + 3$ είναι $2 \cdot 2^2 + 3 = 11$.



Τι ονομάζουμε μονώνυμο;



Μονώνυμο ονομάζεται η αλγεβρική παράσταση που οι αριθμοί και οι μεταβλητές συνδέονται με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Ο αριθμητικός παράγοντας του μονώνυμου ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου και συνήθως γράφεται πρώτος. Το γινόμενο όλων των μεταβλητών λέγεται κύριο μέρος.





Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται όμοια μονώνυμα. Τα όμοια μονώνυμα με τον ίδιο συντελεστή λέγονται ίσα. Τα όμοια μονώνυμα με αντίθετους συντελεστές λέγονται αντίθετα.



Ποιες πράξεις κάνουμε με τα μονώνυμα;



α. Προσθέτουμε μόνο τα όμοια μονώνυμα και το άθροισμά τους είναι ένα όμοιο μονώνυμο με συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

$$\text{Παράδειγμα: } -3x^2y + 5x^2y - x^2y = (-3 + 5 - 1)x^2y = x^2y$$

β. Πολλαπλασιάζουμε μονώνυμα δίχως περιορισμό και το γινόμενο τους είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών του και κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές με εκθέτη σε κάθε μία το άθροισμα των εκθετών της.

Παράδειγμα:

$$(2x^2y^3)(-5ky^2) = 2(-5)x^2ky^3y^2 = -10x^2ky^5$$

γ. Διαιρούμε μονώνυμα πολλαπλασιάζοντας τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\begin{aligned} \text{Παράδειγμα: } (-4\alpha\beta^2) : (-8\alpha\beta x) &= -4\alpha\beta^2 \frac{1}{-8\alpha\beta x} = \\ &= \frac{-4\alpha\beta^2}{-8\alpha\beta x} = \frac{-4}{-8} \frac{\alpha}{\alpha} \frac{\beta^2}{\beta} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \frac{\beta}{x} \end{aligned}$$



Τι ονομάζουμε πολώνυμο;

Τι είναι η αναγωγή ομοίων όρων πολωνύμου;



Πολώνυμο ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση όταν είναι άθροισμα ανομοίων μονωνύμων.

$$\text{Παράδειγμα: } kx^2 + \lambda x + \mu, -x^2y + xy + 1$$

Αναγωγή ομοίων όρων πολωνύμου ονομάζεται η αντικατάσταση των ομοίων όρων του με το άθροισμά τους.

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} 3\alpha^3 - 5\beta^2 + 4\alpha^3 + \beta^2 - 2 &= 3\alpha^3 + 4\alpha^3 - 5\beta^2 + \beta^2 - 2 = \\ &= (3+4)\alpha^3 + (-5+1)\beta^2 - 2 = 7\alpha^3 - 4\beta^2 - 2. \end{aligned}$$



**Πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυ-
ώνυμο και πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων;**



Ο πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο
στηρίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Έτσι για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο
πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του
πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων
όρων.

Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} 2x^2(3a - x^3 + 4) &= 2x^2 \cdot 3a - 2x^2 \cdot x^3 + 2x^2 \cdot 4 = \\ &= 6x^2a - 2x^5 + 8x^2 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του γινομένου πολυωνύμων
εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Έτσι για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα
πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του
άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} (9x^2 + 3xy + y^2)(2x - y) &= \\ &= 9x^2 \cdot 2x - 9x^2y + 3xy \cdot 2x - 3xy \cdot y + y^2 \cdot 2x - y^2 \cdot y = \\ &= 18x^3 - 9x^2y + 6x^2y - 3xy^2 + 2xy^2 - y^3 = \\ &= 18x^3 - 3x^2y - xy^2 - y^3 \end{aligned}$$



1. Οι εκθέτες στις μεταβλητές ενός μονωνύμου είναι φυσικοί αριθμοί
2. Οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται μονώνυμα
3. Το πηλίκο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο.
4. Ένα πολυώνυμο με δύο όρους και μία μεταβλητή λέγεται διώνυμο ενώ όταν έχει τρεις όρους λέγεται τριώνυμο.
5. Μια αλγεβρική παράσταση δεν έχει υποχρεωτικά αριθμητική τιμή για οποιαδήποτε τιμή των γραμμάτων της.



1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

α. Η παράσταση $-\frac{4x^2y\omega}{3}$ είναι μονώνυμο.

β. Η παράσταση $-\frac{4x^2y}{3\omega}$ είναι μονώνυμο.

γ. Η παράσταση $-\frac{4}{3}x^{-2}y\omega$ είναι μονώνυμο.

δ. Το κύριο μέρος του μονώνυμου $-\frac{6x^3y^2}{5}$ είναι το $\frac{x^3y^2}{5}$.

ε. Το γινόμενο και το πηλίκο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.

στ. Η παράσταση $3x^3 - 2y^3 + 9\omega^3 + 1$ είναι ένα πολυώνυμο.

Λύση

α. Η παράσταση $-\frac{4x^2y\omega}{3}$ γράφεται $-\frac{4}{3}x^2y\omega$ και είναι μονώνυμο διότι μεταξύ των μεταβλητών και του αριθμητικού παράγοντα μοναδική πράξη που σημειώνεται είναι ο πολλαπλασιασμός (Σ).

β. Η παράσταση $-\frac{4x^2y}{3\omega}$ γράφεται $-\frac{4}{3}\frac{x^2y}{\omega}$ και δεν είναι μονώνυμο, διότι υπάρχει διαίρεση μεταξύ των μεταβλητών (Λ).

γ. Η παράσταση $-\frac{4}{3}x^{-2}y\omega$ γράφεται $-\frac{4}{3}\frac{y\omega}{x^2}$ και δεν είναι μονώνυμο, διότι υπάρχει διαίρεση μεταξύ των μεταβλητών (Λ).

δ. Το μονώνυμο γράφεται $-\frac{6}{5}x^3y^2$ και έχει κύριο μέρος το x^3y^2 (Λ).

ε. Το γινόμενο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο ενώ το πηλίκο δεν είναι μονώνυμο

$$\text{π.χ. } 3x^4y^2 : 6xy^3 = 3x^4y^2 \cdot \frac{1}{6xy^3} = \frac{3x^4y^2}{6xy^3} = \frac{1x^3}{2y} \quad (\Lambda)$$

στ. Η παράσταση είναι άθροισμα ανομοίων μονωνύμων και είναι πολυώνυμο. (Σ)

② Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $2xy - x^2y + 2xy^2 + 2003$ για

α. για $x = 10$ και $y = 0$

β. για $x = 0$ και $y = 10$

γ. για $x = -10$ και $y = 10$

δ. για $x = 0$ και $y = 0$

Λύση

α. Αντικαθιστούμε όπου $x = 10$ και $y = 0$ στην παράσταση

$$2 \cdot 10 \cdot 0 - 10^2 \cdot 0 + 2 \cdot 10 \cdot 0^2 + 2003 = 2003$$

β. Αντικαθιστούμε όπου $x = 0$ και $y = 10$ στην παράσταση

$$2 \cdot 0 \cdot 10 - 0^2 \cdot 10 + 2 \cdot 0 \cdot 10^2 + 2003 = 2003$$

γ. Αντικαθιστούμε όπου $x = -10$ και $y = 10$ στην παράσταση

$$2(-10) \cdot 10 - (-10)^2 \cdot 10 + 2(-10) \cdot 10^2 + 2003 = -200 - 1000 - 2000 + 2003 = -1197$$

δ. Αντικαθιστούμε όπου $x = 0$ και $y = 0$ στην παράσταση

$$2 \cdot 0 \cdot 0 - 0^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0^2 + 2003 = 2003$$

③ Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις της στήλης Α με τις ίσες τους παραστάσεις της στήλης Β.

Στήλη Α

α. $-5x^2y + 5x^2y$

β. $-5x^2y \cdot 5x^2y$

γ. $-5x^3y^2 : xy$

δ. $-\frac{1}{3}\omega^2y - \frac{1}{3}\omega^2y$

ε. $\left(-\frac{1}{3}\omega^2y\right)\left(-\frac{1}{3}\omega^2y\right)$

στ. $-4xy\omega + 8xy\omega$

Στήλη Β

1. $-5x^2y$

2. $\frac{1}{9}\omega^4y^2$

3. $-25x^4y^2$

4. $4xy\omega$

5. 0

6. $-\frac{2}{3}\omega^2y$

Λύση

α. Είναι $-5x^2y + 5x^2y = 0$. Άρα στο α αντιστοιχίζεται το 5

β. Είναι $-5x^2y \cdot 5x^2y = -25x^4y^2$. Άρα στο β αντιστοιχίζεται το 3

γ. Είναι $-5x^3y^2 : xy = -5x^3y^2 \cdot \frac{1}{xy} = -5 \frac{x^3}{x} \frac{y^2}{y} = -5x^2y$. Άρα στο γ αντιστοιχίζεται το 1

δ. Είναι $-\frac{1}{3}\omega^2y - \frac{1}{3}\omega^2y = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\omega^2y = -\frac{2}{3}\omega^2y$. Άρα στο δ αντιστοιχίζεται το 6

ε. Είναι $\left(-\frac{1}{3}\omega^2y\right)\left(-\frac{1}{3}\omega^2y\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\omega^2\omega^2yy = \frac{1}{9}\omega^4y^2$.

Άρα στο ε αντιστοιχίζεται το 2

στ. Είναι $-4xy\omega + 8xy\omega = (-4 + 8)xy\omega = 4xy\omega$. Άρα στο στ αντιστοιχίζεται το 4.

- 4** Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες όχι; Στην περίπτωση που μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο ποιος είναι ο συντελεστής και ποιο το κύριο μέρος του; Υπάρχουν μονώνυμα που να είναι όμοια;

α. $\sqrt{5}a\beta^2$

β. $\frac{5}{3}x^2y^2\omega$

γ. $(3 + \sqrt{2})xy\omega$

δ. $\frac{(\omega - x)}{2}y$

ε. $\frac{2\kappa^2}{\omega \cdot x}$

στ. $3x^2y^{-2}$

ζ. $\frac{5x^2y^2\omega}{4}$

η. $-\frac{1}{2}(\omega - x)$

θ. $-x^2y^2\omega$

ι. $\frac{x^3}{4}$

Λύση

α. Η παράσταση $\sqrt{5}a\beta^2$ είναι μονώνυμο με συντελεστή $\sqrt{5}$ και κύριο μέρος $a\beta^2$.

β. Η παράσταση $\frac{5}{3}x^2y^2\omega$ είναι μονώνυμο με συντελεστή $\frac{5}{3}$ και κύριο μέρος $x^2y^2\omega$.

γ. Η παράσταση $(3 + \sqrt{2})xy\omega$ είναι μονώνυμο με συντελεστή $3 + \sqrt{2}$ και κύριο μέρος $xy\omega$.

δ. Η παράσταση $\frac{(\omega - x)}{2}y = \frac{1}{2}(\omega - x)y$ δεν είναι μονώνυμο διότι υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών ω, x η πράξη της αφαίρεσης.

ε. Η παράσταση $\frac{2\kappa^2}{\omega \cdot x}$ δεν είναι μονώνυμο διότι υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών ω , x ,

κ η πράξη της διαίρεσης.

στ. Η παράσταση $3x^2y^{-2} = 3\frac{x^2}{y^2}$ δεν είναι μονώνυμο διότι υπάρχει μεταξύ των μετα-

βλητών x , y η πράξη της διαίρεσης.

ζ. Η παράσταση $\frac{5x^2y^2\omega}{4} = \frac{5}{4}x^2y^2\omega$ είναι μονώνυμο με συντελεστή $\frac{5}{4}$ και κύριο μέρος $x^2y^2\omega$.

η. Η παράσταση $-\frac{1}{2}(\omega - x)$ δεν είναι μονώνυμο διότι υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών ω , x η πράξη της αφαίρεσης.

θ. Η παράσταση $-x^2y^2\omega$ είναι μονώνυμο με συντελεστή -1 και κύριο μέρος $x^2y^2\omega$.

Όμοια μονώνυμα είναι τα $\frac{5}{3}x^2y^2\omega$, $\frac{5}{4}x^2y^2\omega$, $-x^2y^2\omega$.

5 Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ ώστε η αλγεβρική παράσταση $-\frac{2}{3}x^{7-\lambda} \cdot y^{\lambda-4}$ να

είναι μονώνυμο. Στη συνέχεια για τις τιμές αυτές να βρείτε τα αντίστοιχα μονώνυμα.

Λύση

Για να είναι μονώνυμο η παραπάνω αλγεβρική παράσταση πρέπει οι εκθέτες των μεταβλητών x , y να είναι φυσικοί αριθμοί.

Δηλαδή πρέπει ο λ να είναι ακέραιος και συγχρόνως να ισχύουν :

$$7 - \lambda \geq 0 \text{ και } \lambda - 4 \geq 0 \text{ ή } -\lambda \geq -7 \text{ και } \lambda \geq 4 \text{ ή } \lambda \leq 7 \text{ και } \lambda \geq 4.$$

Οι κοινές ακέραιες τιμές για τη μεταβλητή λ είναι 4, 5, 6, 7.

$$\text{Για } \lambda = 4 \text{ έχουμε: } -\frac{2}{3}x^{7-4}y^{4-4} = -\frac{2}{3}x^3y^0 = -\frac{2}{3}x^3.$$

$$\text{Για } \lambda = 5 \text{ έχουμε: } -\frac{2}{3}x^{7-5}y^{5-4} = -\frac{2}{3}x^2y^1 = -\frac{2}{3}x^2y.$$

$$\text{Για } \lambda = 6 \text{ έχουμε: } -\frac{2}{3}x^{7-6}y^{6-4} = -\frac{2}{3}x^1y^2 = -\frac{2}{3}xy^2.$$

$$\text{Για } \lambda = 7 \text{ έχουμε: } -\frac{2}{3}x^{7-7}y^{7-4} = -\frac{2}{3}x^0y^3 = -\frac{2}{3}y^3.$$

6 Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha. 3x^2y^2 - x^2y^2 + 8x^2y^2 - 12x^2y^2$$

$$\beta. 2x^2 \cdot 3x^3y \left(-\frac{4}{3}xy\omega^2 \right) \left(-\frac{1}{8}x^2\omega\alpha \right)$$

$$\gamma. (-4xy^3\omega^2) : \left(-\frac{1}{2}xy^2\omega^2 \right)$$

$$\delta. (-3x^2y + 5y^2x + 4xy)(-2x^3y^2\omega^3)$$

$$\epsilon. (-xy + \omega)(-2x^2y + 4xy - 2xy^2)$$

Λύση

$$\alpha. 3x^2y^2 - x^2y^2 + 8x^2y^2 - 12x^2y^2 = (3 - 1 + 8 - 12)x^2y^2 = -2x^2y^2.$$

$$\beta. 2x^2 3x^3y \left(-\frac{4}{3}xy\omega^2 \right) \left(-\frac{1}{8}x^2\omega\alpha \right) = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) \left(-\frac{1}{8} \right) x^2 x^3 x x^2 \cdot y \cdot y \omega^2 \omega \cdot \alpha = x^8 y^2 \omega^3 \alpha.$$

$$\gamma. (-4xy^3\omega^2) : \left(-\frac{1}{2}xy^2\omega^2 \right) = -4xy^3\omega^2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2y^2\omega^2} = \frac{-4x^3y^3\omega^2}{-\frac{1}{2}x^2y^2\omega^2} = 8xy.$$

$$\delta. (-3x^2y + 5y^2x + 4xy)(-2x^3y^2\omega^3) =$$

$$= -3x^2y(-2x^3y^2\omega^3) + 5y^2x(-2x^3y^2\omega^3) + 4xy(-2x^3y^2\omega^3) =$$

$$= 6x^5y^3\omega^3 - 10y^4x^4\omega^3 - 8x^4y^3\omega^3.$$

$$\epsilon. (-xy + \omega)(-2x^2y + 4xy - 2xy^2) =$$

$$= -xy(-2x^2y) - xy(4xy) - xy(-2xy^2) + \omega(-2x^2y) + \omega(4xy) + \omega(-2xy^2) =$$

$$= 2x^3y^2 - 4x^2y^2 + 2x^2y^3 - 2\omega x^2y + 4\omega xy - 2\omega xy^2.$$



1. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $(\alpha + \beta)(3\alpha - \beta) - (4\beta - \alpha)(2\alpha - \beta) - 2\beta(2\alpha + \beta)$

β. $(2x + 3y)(x - 4y) - (x + 5y)(-y - x) - 3xy(x - y)$

γ. $(x + 1)(y - 2) - (3y + 4)(x - 6) + 2(x - 6y)$

δ. $(2x + 3y)(3x - 2y) - 3(x^2 - y^2) + 4(x^2 - xy + y^2)$

ε. $(x + y)(3x - y) - [xy - x(2x - y)]$

στ. $(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta + \gamma) \cdot (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma - \alpha)(\beta + \gamma)$

η. $(3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(-2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2)$

ζ. $(1 - 2x^2 + 4x^3)(2 - 5x^2 + 4x)$

θ. $(12x^5 - 6x^4 - 3x^3) : (-3x^3)$

ι. $(12\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu} - 3\alpha^{\mu}\beta^{\nu+1} - 6\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu+1}) : (2\alpha^{\mu}\beta^{\nu-1})$

2. Να αντικαταστήσετε τους παρακάτω αστερίσκους ώστε να ισχύει κάθε μια από τις παρακάτω ισότητες:

α. $* (4\beta^2 - 7\beta + 8) = 28\beta^3 - 49\beta^2 + 56\beta$

β. $* (3x^2 + 8x - 7) = 36x^5 + * - *$

γ. $5\alpha^2\beta^3 (* - 9\beta^2 + *) = 20\alpha^5\beta^7 - * + \alpha^4\beta^9$

3. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για τις τιμές των γραμμάτων που αναφέρονται:

α. $(x^2y - 2xy^2)(2x - y) - 2x^3(x + y) - (x - y)(-2y^3)$ για $x = -1, y = 2$

β. $\alpha^2 + \alpha\beta^2 - [\alpha^3 - (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)]$ για $\alpha = -2, \beta = \frac{1}{2}$

4. $A = -2x^3y$, $B = -x^2y^4$, $\Gamma = xy^3$

Να υπολογίσετε:

α. $A \cdot B$

β. $B \cdot \Gamma$

γ. $A \cdot B \cdot \Gamma$

δ. $A : B$

ε. $A : \Gamma$

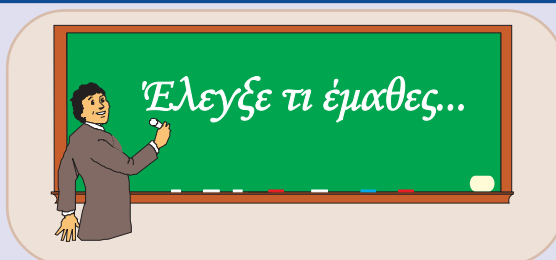
στ. $B : \Gamma$

ζ. $\Gamma : B$

η. $B : A$

5. Να βρείτε τους ακέραιους κ , λ ώστε η παρακάτω αλγεβρική παράσταση να είναι μονώνυμο και στη συνέχεια να βρείτε το μονώνυμο:

$$\frac{3}{4}x^3y^{\kappa-2} - \frac{1}{3}x^{\lambda+1}y^4$$



Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε μονώνυμο;

Ερώτηση 2

Πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυνύμο και πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός πολυνύμων;

Άσκηση 1

α. Για να είναι το πηλίκο $a^v : a^u$ μονώνυμο πρέπει $v \dots \mu$. Να σημειώσετε το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας.

β. Δίνονται τα μονώνυμα $(a+1)x^2y^{\lambda+1}$ και $-3x^{\mu+5}y^2$. Να βρείτε τους a , λ και μ ώστε τα μονώνυμα να είναι ίσα.

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης A για $a = 13^{2004}$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$ όπου:

$$A = (a - \beta)(a + \beta + \gamma) - (a + \beta)(a - \beta + \gamma)$$

Άσκηση 3

Να κάνετε τις πράξεις:

$$(x^{\mu}y^{k-2} + x^{\mu-1}y^{k-1} + x^{\mu-2}y^k)(x^2 - y^2)$$



Ανάπτυγμα τετραγώνου



Τι ονομάζουμε ταυτότητα και ποιες είναι οι βασικές ταυτότητες;



Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Οι βασικές ταυτότητες είναι:

1. Τετράγωνο αθροίσματος και τετράγωνο διαφοράς

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Παράδειγμα

$$\alpha. (x + 2y)^2 = x^2 + 2x \cdot 2y + (2y)^2$$

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$\beta. \left(x^2 - \frac{ab}{2}\right)^2 = (x^2)^2 - 2x^2 \frac{ab}{2} + \left(\frac{ab}{2}\right)^2$$

$$\left(x^2 - \frac{ab}{2}\right)^2 = x^4 - x^2 ab + \frac{a^2 b^2}{4}$$

Διαφορά τετραγώνων

2. Γινόμενο αθροίσματος μονωνύμων επί τη διαφορά τους

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Παράδειγμα

$$(2 - x^2y)(2 + x^2y) = 2^2 - (x^2y)^2 = 4 - x^4y^2$$

3. Κύβος αθροίσματος και κύβος διαφοράς

**Ανάπτυγμα
κύβου**

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Παράδειγμα

$$\alpha. (3\alpha + 2)^3 = (3\alpha)^3 + 3(3\alpha)^2 \cdot 2 + 3(3\alpha) \cdot 2^2 + 2^3$$

$$(3\alpha + 2)^3 = 27\alpha^3 + 54\alpha^2 + 36\alpha + 8$$

$$\beta. (2y - x^2)^3 = (2y)^3 - 3(2y)^2 \cdot x^2 + 3 \cdot 2y \cdot (x^2)^2 - (x^2)^3$$

$$(2y - x^2)^3 = 8y^3 - 12y^2x^2 + 6yx^4 - x^6$$

4. Άθροισμα κύβων και διαφορά κύβων

**Άθροισμα κύβων και
διαφορά κύβων**

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Παράδειγμα

$$\alpha. x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\beta. y^6 - 8 = (y^2)^3 - 2^3 = (y^2 - 2) \left[(y^2)^2 + y^2 \cdot 2 + 2^2 \right]$$

$$y^6 - 8 = (y^2 - 2)(y^4 + 2y^2 + 4)$$

5. Τετράγωνο αθροίσματος τριών μονώνυμων

**Τετράγωνο
αθροίσματος**

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

Παράδειγμα

$$(2\kappa + 3\lambda + \mu)^2 =$$

$$\left((2\kappa)^2 + (3\lambda)^2 + \mu^2 + 2 \cdot 2\kappa \cdot 3\lambda + 2(2\kappa)\mu + 2(3\lambda)\mu \right)$$

$$(2\kappa + 3\lambda + \mu)^2 = 4\kappa^2 + 9\lambda^2 + \mu^2 + 12\kappa\lambda + 4\kappa\mu + 6\lambda\mu$$

6. Ταυτότητα του τριωνύμου

$$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

Παράδειγμα

$$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)(x + (-3)) = x^2 + (2 + (-3))x + 2(-3) = x^2 - x - 6$$



1. Οι παραστάσεις των δεύτερων μελών των ταυτοτήτων λέγονται αναπτύγματα
2. Οι παραστάσεις $(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha - \beta)^2$ λέγονται και τέλεια τετράγωνα
3. Είναι $(\alpha + \beta)^2 \neq \alpha^2 + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2 \neq \alpha^2 - \beta^2$
4. Οι παραστάσεις της μορφής $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$ λέγονται συζυγείς παραστάσεις
5. Στις εκφράσεις $(\alpha + \beta)^3$ και $(\alpha - \beta)^3$ τα αναπτύγματα του δεύτερου μέλους είναι διατεταγμένα ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του α .



1 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες.

α. $(x-2)^2 = x^2 + 4x + 4$

β. $(x+2)^2 = x^2 + 2x + 4$

γ. $(x-2)^2 = (-2+x)^2$

δ. $(-κ-λ)^2 = (κ+λ)^2$

ε. $(-κ+λ)^2 = (λ-κ)^2$

στ. $(-κ+λ)^2 = (κ-λ)^2$

ζ. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

η. $(x+4)^2 = x^2 + 16$

θ. $x^2 - 9 = (x-9)(x+9)$

ι. $a^2 - b^2 = (a-b)^2$

Λύση

α. $(x-2)^2 = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη λάθος Λ.

β. $(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη λάθος Λ.

γ. $x-2 = -2+x$ λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης οπότε $(x-2)^2 = (-2+x)^2$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη σωστό Σ.

δ. $(-κ-λ)^2 = [-(κ+λ)]^2 = (κ+λ)^2$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη σωστό Σ.

ε. $-κ+λ = λ-κ$ οπότε $(-κ+λ)^2 = (λ-κ)^2$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη σωστό Σ.

στ. $(-κ+λ)^2 = [-(κ-λ)]^2 = (κ-λ)^2$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη σωστό Σ.

ζ. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη λάθος Λ.

η. $(x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την

ένδειξη λάθος Λ .

θ. $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη λάθος Λ .

ι. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$. Άρα η ισότητα χαρακτηρίζεται με την ένδειξη λάθος Λ .

② Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις της στήλης Α με τις ίσες τους παραστάσεις της στήλης Β.

Στήλη Α

α. $(4x-1)^2$

β. $(2x+y)^2$

γ. $(2x+3y)(2x-3y)$

δ. $(x-1)^3$

ε. $(2x+1)^3$

στ. $(x+3)(x-5)$

Στήλη Β

1. $4x^2 + 4xy + y^2$

2. $4x^2 - 9y^2$

3. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

4. $x^2 - 2x - 15$

5. $16x^2 - 8x + 1$

6. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

Λύση

α. $(4x-1)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1$. Επομένως στο α αντιστοιχίζεται το 5.

β. $(2x+y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$. Επομένως στο β αντιστοιχίζεται το 1.

γ. $(2x+3y)(2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$. Επομένως στο γ αντιστοιχίζεται το 2.

δ. $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Επομένως στο δ αντιστοιχίζεται το 3.

ε. $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$. Επομένως στο ε αντιστοιχίζεται το 6.

στ. $(x+3)(x-5) = (x+3)(x+(-5)) = x^2 + [3+(-5)]x + 3(-5) = x^2 - 2x - 15$.

Επομένως στο στ αντιστοιχίζεται το 4.

③ Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $(\dots + \dots)^2 = y^2 + 2y + \dots$

β. $(\dots - \dots)^2 = 9\alpha^2 - \dots + 16\beta^2$

γ. $\left(\frac{1}{2}x - \dots\right)^2 = \dots - xy + \dots$

δ. $(\dots + 2x^2)^2 = 9 + \dots + \dots$

$$\varepsilon. (\kappa + \dots)(\kappa - \dots) = \dots - 25$$

$$\sigma\tau. (\dots + 3x)(\dots - 3x) = 16\beta^2 - \dots$$

$$\zeta. (\dots + \dots)^3 = 8\alpha^3 + 12\alpha^2 + \dots + \dots$$

$$\eta. (\dots - 2)^3 = 27x^3 - \dots + \dots - \dots$$

$$\theta. (x+2)(x+\dots) = \dots + \dots + 6$$

$$\iota. (x+4)(x+3) = \dots + \dots + \dots$$

Λύση

$$\alpha. (y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$$

$$\beta. (3\alpha - 4\beta)^2 = 9\alpha^2 - 24\alpha\beta + 16\beta^2$$

$$\gamma. \left(\frac{1}{2}x - y\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - xy + y^2$$

$$\delta. (3 + 2x^2)^2 = 9 + 12x^2 + 4x^4$$

$$\varepsilon. (\kappa + 5)(\kappa - 5) = \kappa^2 - 25$$

$$\sigma\tau. (4\beta + 3x)(4\beta - 3x) = 16\beta^2 - 9x^2$$

$$\zeta. (2\alpha + 1)^3 = 8\alpha^3 + 3(2\alpha)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\alpha \cdot 1^2 + 1^3 = 8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 6\alpha + 1$$

$$\eta. (3x - 2)^3 = 27x^3 - 3(3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 + 2^3 = 27x^3 - 54x^2 + 18x + 8$$

$$\theta. (x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

$$\iota. (x+4)(x+3) = x^2 + 7x + 12$$

4 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha. (x^2 + 2y)^2 \quad \beta. \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)^2 \quad \gamma. (x^2 + 2y^2)^2 \quad \delta. \left(xy + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \varepsilon. (-x^3 - y^3)^2$$

$$\sigma\tau. \left(2x - \frac{y}{2}\right)^2 \quad \zeta. \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 \quad \eta. \left(-3\alpha + \frac{\beta}{3}\right)^2 \quad \theta. \left(-xy + \frac{4}{x}\right)^2 \quad \iota. \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2$$

Λύση

$$\alpha. (x^2 + 2y)^2 = (x^2)^2 + 2x^2 \cdot 2y + (2y)^2 = x^4 + 4x^2y + 4y^2$$

$$\beta. \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2\frac{x}{3}\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{4}$$

$$\gamma. (x^2 + 2y^2)^2 = (x^2)^2 + 2x^2 \cdot 2y^2 + (2y^2)^2 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$$

$$\delta. \left(xy + \frac{1}{2}\right)^2 = (xy)^2 + 2xy \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2y^2 + xy + \frac{1}{4}$$

$$\varepsilon. (-x^3 - y^3)^2 = [-(x^3 + y^3)]^2 = (x^3 + y^3)^2 = (x^3)^2 + 2x^3y^3 + (y^3)^2 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6$$

$$\sigma\tau. \left(2x - \frac{y}{2}\right)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} = 4x^2 - 2xy + \frac{y^2}{4}$$

$$\zeta. \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 4x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}$$

$$\eta. \left(-3\alpha + \frac{\beta}{3}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{3} - 3\alpha\right)^2 = \left(\frac{\beta}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\beta}{3} \cdot 3\alpha + (3\alpha)^2 = \frac{\beta^2}{9} - 2\beta\alpha + 9\alpha^2$$

$$\theta. \left(-xy + \frac{4}{x}\right)^2 = \left(\frac{4}{x} - xy\right)^2 = \left(\frac{4}{x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{x} \cdot xy + (xy)^2 = \frac{16}{x^2} - 8y + x^2 y^2$$

$$\iota. \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{9} - \frac{yx}{3} + \frac{x^2}{4}$$

5 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha. (xy+1) \cdot (xy-1)$$

$$\beta. (2-x^2) \cdot (2+x^2)$$

$$\gamma. (x^3+y^3) \cdot (x^3-y^3)$$

$$\delta. \left(-\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}\beta^3\right) \cdot \left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}\beta^3\right)$$

$$\epsilon. (4xy-3\alpha\beta) \cdot (4xy+3\alpha\beta)$$

$$\sigma\tau. (-2x-\kappa) \cdot (2x-\kappa)$$

$$\zeta. (x+y+\omega) \cdot (x+y-\omega)$$

$$\eta. (\kappa+2\lambda+1) \cdot (\kappa+2\lambda-1)$$

$$\theta. (x+y+\omega-3) \cdot (x+y-\omega+3)$$

$$\iota. (x^4-2y^2+1) \cdot (x^4+2y^2+1)$$

Λύση

$$\alpha. (xy+1)(xy-1) = (xy)^2 - 1^2 = x^2 y^2 - 1$$

$$\beta. (2-x^2)(2+x^2) = 2^2 - (x^2)^2 = 4 - x^4$$

$$\gamma. (x^3+y^3)(x^3-y^3) = (x^3)^2 - (y^3)^2 = x^6 - y^6$$

$$\begin{aligned} \delta. \left(-\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}\beta^3\right) \left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}\beta^3\right) &= \left(\frac{1}{2}\beta^3 - \frac{1}{3}a^2\right) \left(\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{1}{3}a^2\right) = \left(\frac{1}{2}\beta^3\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a^2\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}\beta^6 - \frac{1}{9}a^4 \end{aligned}$$

$$\epsilon. (4xy-3\alpha\beta)(4xy+3\alpha\beta) = (4xy)^2 - (3\alpha\beta)^2 = 16x^2 y^2 - 9\alpha^2 \beta^2$$

$$\sigma\tau. (-2x-\kappa)(2x-\kappa) = -(2x+\kappa)(2x-\kappa) = -[(2x)^2 - \kappa^2] = -4x^2 + \kappa^2$$

$$\zeta. (x+y+\omega)(x+y-\omega) = (x+y)^2 - \omega^2 = x^2 + 2xy + y^2 - \omega^2$$

$$\eta. (\kappa+2\lambda+1)(\kappa+2\lambda-1) = (\kappa+2\lambda)^2 - 1^2 = \kappa^2 + 2\kappa 2\lambda + (2\lambda)^2 - 1 = \kappa^2 + 4\kappa\lambda + 4\lambda^2 - 1$$

$$\theta. (x+y+\omega-3)(x+y-\omega+3) = [(x+y) + (\omega-3)][x+y-(\omega-3)] =$$

$$= (x+y)^2 - (\omega-3)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - \omega^2 + 6\omega - 9$$

$$\iota. (x^4 - 2y^2 + 1)(x^4 + 2y^2 + 1) = (x^4 + 1 - 2y^2)(x^4 + 1 + 2y^2)$$

$$= (x^4 + 1)^2 - (2y^2)^2 = (x^4)^2 + 2x^4 + 1 - 4y^4 = x^8 + 2x^4 + 1 - 4y^4$$

6 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$a. (a+3)^3$$

$$b. \left(\frac{a}{2} + 1\right)^3$$

$$g. \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^3$$

$$d. (-x-2y)^3$$

$$e. (-x+2y^2)^3$$

$$στ. (x^2 + y^2)^3$$

$$z. (-x^2 - y^2)^3$$

$$η. \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$\theta. \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$\iota. \left(\frac{x-1}{3}\right)^3$$

Λύση

$$a. (a+3)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot 3 + 3a \cdot 3^2 + 3^3 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27$$

$$b. \left(\frac{a}{2} + 1\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\frac{a}{2} + 1^3 = \frac{a^3}{8} + 3\frac{a^2}{4} + \frac{3a}{2} + 1$$

$$g. \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 \frac{1}{3} + 3x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = x^6 - x^4 + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{27}$$

$$d. (-x-2y)^3 = -(x+2y)^3 = -[x^3 + 3x^2 \cdot 2y + 3x(2y)^2 + (2y)^3] \\ = -x^3 - 6x^2y - 12xy^2 - 8y^3$$

$$e. (-x+2y^2)^3 = (2y^2-x)^3 = (2y^2)^3 - 3(2y^2)^2 x + 3 \cdot 2y^2 \cdot x^2 - x^3 = \\ = 8y^6 - 12y^4x + 6y^2x^2 - x^3$$

$$στ. (x^2 + y^2)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2 y^2 + 3x^2 (y^2)^2 + (y^2)^3 = \\ = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6$$

$$z. (-x^2 - y^2)^3 = -(x^2 + y^2)^3 \stackrel{(στ)}{=} -x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 - y^6$$

$$η. \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2 \frac{1}{x} + 3x \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$\theta. \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 \frac{1}{x^2} + 3x^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 = x^6 - 3x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^6}$$

$$\iota. \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 = \frac{(x-1)^3}{3^3} = \frac{1}{27}(x^3 - 3x^2 + 3x + 1)$$

7 Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha. (2\alpha + \beta)^2 - 3(\alpha + \beta)^2 - (2\beta - 5\alpha)^2 \quad \beta. 2(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) - (2\beta - \alpha)^2 - 3\alpha(\alpha - \beta)$$

$$\gamma. (2x + 3y)(-3y + 2x) - (2x + y)(y - 2x) \quad \delta. (1 + x)(1 - x) - (1 - 2x)^2$$

$$\epsilon. (5\kappa + \lambda)^2 - (4\kappa^2 - 3\lambda)(4\kappa^2 + 3\lambda) - (\kappa + 2\lambda)^2$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. (2\alpha + \beta)^2 - 3(\alpha + \beta)^2 - (2\beta - 5\alpha)^2 &= \\ &= (2\alpha)^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot \beta + \beta^2 - 3(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - [(2\beta)^2 - 2 \cdot 2\beta \cdot 5\alpha + (5\alpha)^2] = \\ &= 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 - 3\alpha^2 - 6\alpha\beta - 3\beta^2 - 4\beta^2 + 20\alpha\beta - 25\alpha^2 = -24\alpha^2 + 18\alpha\beta - 6\beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. 2(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) - (2\beta - \alpha)^2 - 3\alpha(\alpha - \beta) &= \\ &= 2(\beta^2 - \alpha^2) - [(2\beta)^2 - 2 \cdot 2\beta\alpha + \alpha^2] - 3\alpha^2 + 3\alpha\beta = \\ &= 2\beta^2 - 2\alpha^2 - 4\beta^2 + 4\alpha\beta - \alpha^2 - 3\alpha^2 + 3\alpha\beta = -6\alpha^2 - 2\beta^2 + 7\alpha\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma. (2x + 3y)(-3y + 2x) - (2x + y)(y - 2x) &= (2x)^2 - (3y)^2 - [y^2 - (2x)^2] = \\ &= 4x^2 - 9y^2 - y^2 + 4x^2 = 8x^2 - 10y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta. (1 + x)(1 - x) - (1 - 2x)^2 &= 1 - x^2 - (1 - 2 \cdot 2x + 4x^2) = 1 - x^2 - 1 + 4x - 4x^2 = \\ &= -5x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon. (5\kappa + \lambda)^2 - (4\kappa^2 - 3\lambda)(4\kappa^2 + 3\lambda) - (\kappa + 2\lambda)^2 &= \\ &= 25\kappa^2 + 10\kappa\lambda + \lambda^2 - (16\kappa^4 - 9\lambda^2) - (\kappa^2 + 4\kappa\lambda + 4\lambda^2) = \\ &= 25\kappa^2 + 10\kappa\lambda + \lambda^2 - 16\kappa^4 + 9\lambda^2 - \kappa^2 - 4\kappa\lambda - 4\lambda^2 = \\ &= -16\kappa^4 + 24\kappa^2 + 6\lambda^2 + 6\kappa\lambda \end{aligned}$$

8 Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες:

$$\alpha. (\alpha^2 + 2)(\beta^2 + 2) - (\alpha\beta + 2)^2 = 2(\alpha + \beta)^2 \quad \beta. \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\gamma. \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \qquad \delta. \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

$$\varepsilon. (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. (\alpha^2 + 2)(\beta^2 + 2) - (\alpha\beta + 2)^2 &= \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 4 - (\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4) = \\ &= \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 4 - \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta - 4 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 4\alpha\beta = \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)^2 \end{aligned}$$

$$\beta. (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\gamma. (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$$

$$\delta. \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 2 + 2 = 4$$

$$\varepsilon. (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 &= \alpha^2x^2 + 2\alpha x\beta y + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 - 2\alpha y\beta x + \beta^2x^2 = \\ &= \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι :

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

9 Αν $A = \sqrt{7} + \sqrt{3}$ και $B = \sqrt{7} - \sqrt{3}$ τότε να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\alpha. A \cdot B$$

$$\beta. A^2 - B^2$$

Λύση

$$\alpha. A \cdot B = (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$$

$$A \cdot B = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 \quad \text{ή} \quad A \cdot B = 7 - 3 = 4$$

$$\beta. A^2 - B^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$$

$$A^2 - B^2 = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - [(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2]$$

$$A^2 - B^2 = 7 + 2\sqrt{21} + 3 - 7 + 2\sqrt{21} - 3 \quad \text{ή} \quad A^2 - B^2 = 4\sqrt{21}$$

- 10 Αν $x + y = 5$ και $x \cdot y = 4$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = x^2 + y^2$.

Λύση

$$\text{Ισχύει ότι: } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{ή} \quad (x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = 5^2 - 2 \cdot 4 \\ \text{ή} \quad x^2 + y^2 = 17.$$

- 11 Αν $x + \frac{1}{x} = 2$ τότε να υπολογιστεί η παράσταση $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Λύση

$$\text{Ισχύει: } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Οπότε } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \quad \text{ή} \quad A = 2^2 - 2 \quad \text{ή} \quad A = 2.$$

- 12 Αν είναι $x = 2^{2004} + 2^{-2004}$ και $y = 2^{2004} - 2^{-2004}$ τότε να υπολογιστεί η παράσταση $A = x^2 - y^2$.

Λύση

$$A = x^2 - y^2 \quad \text{ή} \quad A = (x - y)(x + y) \quad \text{ή}$$

$$A = (2^{2004} + 2^{-2004} - 2^{2004} + 2^{-2004})(2^{2004} + 2^{-2004} + 2^{2004} - 2^{-2004}) \quad \text{ή}$$

$$A = 2 \cdot 2^{-2004} \cdot 2 \cdot 2^{2004} \quad \text{ή} \quad A = 2^{1-2004+1+2004} \quad \text{ή} \quad A = 2^2 = 4.$$

- 13 Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $(a + b)^2 \geq 4ab$

Λύση

$$(a + b)^2 \geq 4ab \quad \text{ή} \quad a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \quad \text{ή} \quad a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0 \quad \text{ή} \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \quad \text{αληθές.}$$

- 14 Αν $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2$ να αποδείξετε ότι $x = y$.

Λύση

$$2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 \quad \text{ή} \quad 2x^2 + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{ή} \quad 2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 - 2xy = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0 \quad \text{ή} \quad (x - y)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - y = 0 \quad \text{ή} \quad x = y.$$



1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha. (x^x + \beta^y)^2$$

$$\beta. (x^{x-1} + 3\alpha\beta)^2$$

$$\gamma. \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\beta^2}{3} \right)^2$$

$$\delta. (a^2x - \beta^2y)^2$$

$$\epsilon. \left(\frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{1}{2}xy^2 \right)^2$$

$$\sigma\tau. \left(\frac{x^3}{4} - \frac{y^3}{3} \right)^2$$

$$\zeta. \left(-x^2 + \frac{1}{3} \right)^3$$

$$\eta. (-\alpha\beta + \gamma)^3$$

$$\theta. (-\kappa\alpha - \lambda\beta)^3$$

2. Να κάνετε τις πράξεις.

$$\alpha. (x+2)^2 - (x+3)(x-3) - 2(2x-3)$$

$$\beta. (2x+1)^2 - (3x-2)^2 - (2x+5)(5-2x)$$

$$\gamma. 2(\alpha+2\beta)^2 - 3(\alpha+3\beta)^2 - (2\alpha+3\beta)(3\alpha-3\beta)$$

$$\delta. (2x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 1) + (x-3)(x+1) - 4(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

$$\epsilon. (x-1)^3 - 2(3x+2)^3 - x(x+2)(x-2)$$

$$\sigma\tau. (x+\psi)^3 - \psi(x-\psi)(x+\psi) + x(x-\psi)^2$$

$$\zeta. (x+2)^3 - 3x(x-1)^2 + (x-1)(x+1)(x-2)$$

$$\eta. (x^2+9)(y^2+4) - (xy+6)^2 \quad \theta. (2x-y)^2 - (x-5)^2 + (x^2-y^2)^2 - (2x^4+y^4)$$

3. Να αντικατασταθούν τα κενά ώστε να προκύψουν τριώνυμα που να είναι τετράγωνα διωνύμων:

$$\alpha. x^2 + 2x +$$

$$\beta. a^2 - \alpha\beta +$$

$$\gamma. 9x^2 + 4y^2 +$$

$$\delta. a^2 + \frac{1}{4} +$$

$$\epsilon. a^4 + 2a^2 +$$

$$\sigma\tau. 49a^6 + \beta^8 +$$

$$\zeta. x^2 - x +$$

$$\eta. 4x^2 + 1 -$$

$$\theta. \frac{1}{25} + \frac{2}{5}x +$$

4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha. (\dots)^2 = a^2 + 2a\beta + \dots$$

$$\beta. (5y - \dots)^2 = -40y\omega + \dots + \dots$$

$$\gamma. (x + \dots)^2 = \beta x + \dots + \dots$$

$$\delta. (\dots + 1)^2 = 4xy + \dots + \dots$$

$$\epsilon. (\dots + \dots)(3x - \dots) = 9x^2 - 1$$

$$\sigma\tau. (\dots + \dots)^3 = x^3 + \dots + \dots + y^3$$

$$\zeta. (x - 1)(x - 2) = \dots - \dots + \dots$$

$$\eta. \left(\frac{1}{2}xy - \dots\right)(\dots + \dots) = -1 + \dots$$

$$\theta. (x + 3)(x - 5) = \dots - \dots + \dots$$

$$\iota. (\dots - 3)(x + \dots) = x^2 - 9$$

5. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

$$\alpha. (a + \beta)^2 + (a - \beta)^2 = 2(a^2 + \beta^2)$$

$$\beta. (\kappa x + \kappa y)^2 = \kappa^2(x + y)^2$$

$$\gamma. (a - \beta)^5 - (a - \beta)^3(\beta - a)^2 = 0$$

$$\delta. \left(\frac{\kappa + \lambda}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa - \lambda}{2}\right)^2 = \kappa\lambda$$

$$\epsilon. \left(\frac{\kappa + \lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\kappa - \lambda}{2}\right)^2 = \frac{\kappa^2 + \lambda^2}{2}$$

$$\zeta. \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2 = x^3$$

$$\sigma\tau. (2a + \beta - 3\gamma)(2a - \beta + 3\gamma) = (2a)^2 - (\beta - 3\gamma)^2$$

6. Αν $x - \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

7. Αν $x + y = \frac{7}{2}$ και $x \cdot y = -\frac{5}{2}$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων $A = x^2 + y^2$

$$\text{και } B = (x + 2)(y + 2).$$

8. Αν είναι $A = 3^{-1821} + 3^{1821}$ και $B = 3^{-1821} - 3^{1821}$ τότε να υπολογιστεί η παράσταση $A^2 - B^2$.

9. Να αποδείξετε τις επόμενες ανισότητες

$$\alpha. a^2 + \beta^2 \geq 2a\beta$$

$$\beta. \frac{x^2 + 1}{2} \geq -x$$

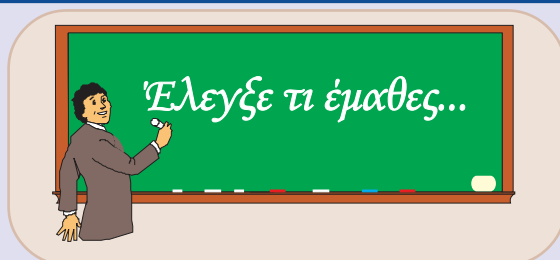
$$\gamma. a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ αν } a > 0$$

10. Αν $A = \sqrt{11} - \sqrt{5}$ και $B = \sqrt{11} + \sqrt{5}$ να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

$$\alpha. A \cdot B$$

$$\beta. A^2 + B^2$$

$$\gamma. A^2 - B^2$$



Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε ταυτότητα και ποιες είναι οι βασικές ταυτότητες;

Άσκηση 1

Να γραφούν οι βασικές ταυτότητες και να αποδειχθεί ότι:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Άσκηση 2

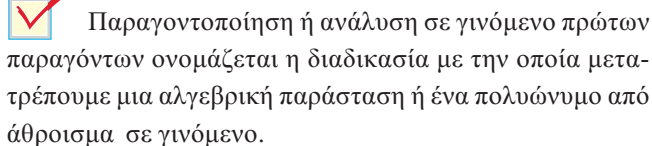
Να κάνετε τις πράξεις στην παρακάτω αλγεβρική παράσταση:

$$(xy-1)(xy+1)(x^2y^2+1)(x^4y^4+1)$$

Άσκηση 3

Αν $A = 4\sqrt{3} - \sqrt{5}$ και $B = 4\sqrt{3} + \sqrt{5}$ να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\frac{A^2 + B^2}{AB}$$



Όταν όλοι οι όροι του πολωνύμου έχουν τον ίδιο συντελεστή ή και ίδιες μεταβλητές, κοινό παράγοντα όπως λέμε τότε αυτό μετατρέπεται σε γινόμενο με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας. Έτσι αν έχουμε την παράσταση $\alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha\delta$ παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της έχουν κοινό παράγοντα τον α . Επομένως βγάζουμε κοινό παράγοντα τον α και γράφουμε $\alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha\delta = \alpha(\beta - \gamma + \delta)$.

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες φροντίζοντας ώστε:

- κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα
- οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες

$$\begin{array}{ccccccc} \text{↑} & & \text{↑} & & & & \text{↑} \\ kx + ky + \lambda x + \lambda y & = & k(x + y) + \lambda(x + y) & = & (x + y)(k + \lambda) \\ \text{↑} & & \text{↑} & & \text{↑} \\ \text{κοινός} & & \text{κοινός} & & \text{κοινός} \\ \text{παράγοντας} & & \text{παράγοντας} & & \text{παράγοντας} \end{array}$$

γ. Διαφορά τετραγώνων

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στην ταυτότητα

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Αν το πολυώνυμο γράφεται σε μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο μονωνύμων τότε μετατρέπεται σε γινόμενο αθροίσματος μονωνύμων επί την διαφορά τους.

δ. Ανάπτυγμα τετραγώνου (τέλειο τετράγωνο)

Αν το πολυώνυμο γράφεται σε μια από τις μορφές $a^2 + 2ab + b^2$ ή $a^2 - 2ab + b^2$ τότε μετατρέπεται σε τετράγωνο αθροίσματος ή τετράγωνο διαφοράς

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

ε. Τριώνυμο

Το πολυώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού.

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου όταν $a=1$ δηλαδή $x^2 + bx + \gamma$ γίνεται ως εξής:

κάνουμε τον πολλαπλασιασμό των πολωνύμων $x + \kappa$, $x + \lambda$ και έχουμε:

$$(x + \kappa)(x + \lambda) = x^2 + \lambda x + \kappa x + \kappa \lambda = x^2 + (\lambda + \kappa)x + \kappa \lambda$$

οπότε πρέπει $\lambda + \kappa = b$ και $\kappa \cdot \lambda = \gamma$. Δηλαδή για να παραγοντοποιήσουμε το $x^2 + bx + \gamma$ αναζητούμε δύο αριθμούς που να έχουν γινόμενο γ και άθροισμα b .



1. Αν η παράσταση που μας δίνεται έχει δύο όρους δίχως κοινό παράγοντα θα προσέχουμε μήπως είναι διαφορά ή άθροισμα τετραγώνων. Στην περίπτωση που είναι άθροισμα τετραγώνων προσθαφαιρούμε κατάλληλο όρο.

2. Αν η παράσταση που μας δίνεται έχει τρεις όρους θα προσέχουμε αν :

α. είναι ανάπτυγμα τετραγώνου

β. είναι τριώνυμο

γ. μπορούμε να διασπάσουμε κάποιον όρο και στη συνέχεια να ομαδοποιήσουμε

3. Αν η παράσταση που μας δίνεται έχει τέσσερις όρους θα προσέχουμε αν:
- α. μπορούμε να ομαδοποιήσουμε ανά δύο
 - β. μπορούμε να δημιουργήσουμε μία ομάδα τριών όρων που να αποτελούν τέλειο τετράγωνο το οποίο σε συνδυασμό με τον όρο που απομένει να μπορεί να παραγοντοποιηθεί.



1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $5x + 5y$

β. $4x + 4$

γ. $16 - 8x$

δ. $x^3 - x^2y$

ε. $6x^2 - 4x$

στ. $3a^2xy - 12a^3x^2y$

ζ. $xy^2 - x^2y$

η. $\alpha\beta^2\gamma^3 - \alpha^2\beta\gamma^2$

θ. $-\kappa\lambda - 3\kappa$

ι. $\sqrt{2}x - \sqrt{6}y$

Λύση

α. $5x + 5y = 5(x + y)$

β. $4x + 4 = 4(x + 1)$

γ. $16 - 8x = 8(2 - x)$

δ. $x^3 - x^2y = x^2(x - y)$

ε. $6x^2 - 4x = 2x(3x - 2)$

στ. $3a^2xy - 12a^3x^2y = 3a^2xy(1 - 4ax)$

ζ. $xy^2 - x^2y = xy(y - x)$

η. $\alpha\beta^2\gamma^3 - \alpha^2\beta\gamma^2 = \alpha\beta\gamma^2(\beta\gamma - \alpha)$

θ. $-\kappa\lambda - 3\kappa = -\kappa(\lambda + 3)$

ι. $\sqrt{2}x - \sqrt{6}y = \sqrt{2}x - \sqrt{3 \cdot 2}y = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}y = \sqrt{2}(x - \sqrt{3}y)$

2 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $2x(x - y) + 5y(x - y)$

β. $10(x + y) + 2a(x + y)$

γ. $\mu(x - y) - x + y$

δ. $\rho(a - \beta) - 2(\beta - \alpha)$

ε. $4\omega(a + \beta) - \alpha - \beta$

στ. $2x(x - 1) - x + 1$

ζ. $5x(a - 1)^3 + (a - 1)^2$

η. $\gamma(a - 1)^2 - (1 - \alpha)$

θ. $(2x + 3) \cdot (3x - 5) + (4x + 5) \cdot (5 - 3x)$

Λύση

α. $2x(x - y) + 5y(x - y) = (x - y) \cdot (2x + 5y)$

β. $10(x + y) + 2a(x + y) = 2(x + y) \cdot (5 + a)$

$$\gamma. \mu(x-y) - x + y = \mu(x-y) - (x-y) = (x-y) \cdot (\mu-1)$$

$$\delta. \rho(\alpha-\beta) - 2(\beta-\alpha) = \rho(\alpha-\beta) + 2(\alpha-\beta) = (\alpha-\beta) \cdot (\rho+2)$$

$$\varepsilon. 4\omega(\alpha+\beta) - \alpha - \beta = 4\omega(\alpha+\beta) - (\alpha+\beta) = (\alpha+\beta) \cdot (4\omega-1)$$

$$\sigma\tau. 2x(x-1) - x + 1 = 2x(x-1) - (x-1) = (x-1) \cdot (2x-1)$$

$$\zeta. 5x(\alpha-1)^3 + (\alpha-1)^2 = (\alpha-1)^2 [5x(\alpha-1) + 1]$$

$$\eta. \gamma(\alpha-1)^2 - (1-\alpha) = \gamma(\alpha-1)^2 + (\alpha-1) = (\alpha-1) [\gamma(\alpha-1) + 1]$$

$$\theta. (2x+3) \cdot (3x-5) + (4x+5) \cdot (5-3x) = (2x+3) \cdot (3x-5) - (4x+5) \cdot (3x-5) = \\ = (3x-5)(2x+3-4x+5) = (3x-5) \cdot (-2x+8)$$

3 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha. \beta x - \alpha \beta + x^2 - \alpha x$$

$$\beta. x + y - \alpha x - \alpha y$$

$$\gamma. 3\alpha x - \alpha y - 3\beta x + \beta y$$

$$\delta. xy^2 + x\omega - y^2z - \omega z$$

$$\varepsilon. 6x^2 - 4\alpha x - 9\beta x + 6\alpha\beta$$

$$\sigma\tau. 5\gamma x - 8\gamma y + 5\beta x - 8\beta y$$

$$\zeta. x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

$$\eta. \alpha^3 + 15 + 5\alpha^2 + 3\alpha$$

$$\theta. x^3 - 5x^2 + 2x - 10$$

$$\iota. \alpha x^3 + \alpha y^2 x + \beta x^3 + \beta y^2 x$$

Λύση

$$\alpha. \beta x - \alpha \beta + x^2 - \alpha x = \beta(x-\alpha) + x(x-\alpha) = (x-\alpha) \cdot (\beta+x)$$

$$\beta. x + y - \alpha x - \alpha y = x - \alpha x + y - \alpha y = x(1-\alpha) + y(1-\alpha) = (1-\alpha) \cdot (x+y)$$

$$\gamma. 3\alpha x - \alpha y - 3\beta x + \beta y = 3\alpha x - 3\beta x + \beta y - \alpha y = 3x(\alpha-\beta) - y(\alpha-\beta) = (\alpha-\beta) \cdot (3x-y)$$

$$\delta. xy^2 + x\omega - y^2z - \omega z = x(y^2 + \omega) - z(y^2 + \omega) = (y^2 + \omega) \cdot (x-z)$$

$$\varepsilon. 6x^2 - 4\alpha x - 9\beta x + 6\alpha\beta = 2x(3x-2\alpha) - 3\beta(3x-2\alpha) = (3x-2\alpha) \cdot (2x-3\beta)$$

$$\sigma\tau. 5\gamma x - 8\gamma y + 5\beta x - 8\beta y = 5\gamma x + 5\beta x - 8\gamma y - 8\beta y = 5x(\gamma+\beta) - 8y(\gamma+\beta) = \\ = (\gamma+\beta) \cdot (5x-8y)$$

$$\zeta. x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x+y) + y^2(x+y) = (x+y) \cdot (x^2+y^2)$$

$$\eta. \alpha^3 + 15 + 5\alpha^2 + 3\alpha = \alpha^3 + 3\alpha + 15 + 5\alpha^2 = \alpha(\alpha^2+3) + 5(\alpha^2+3) = (\alpha^2+3) \cdot (\alpha+5)$$

$$\theta. x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = x^2(x-5) + 2(x-5) = (x-5) \cdot (x^2+2)$$

$$\iota. \alpha x^3 + \alpha y^2 x + \beta x^3 + \beta y^2 x = \alpha x(x^2 + y^2) + \beta x(x^2 + y^2) = x(x^2 + y^2) \cdot (\alpha + \beta)$$

4 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha. y^2 - \alpha^2$$

$$\beta. 25\alpha^2 - 1$$

$$\gamma. \alpha^2 - 16\beta^2$$

$$\delta. 1 - 4x^2$$

$$\epsilon. 16\alpha^2 - 9\beta^2$$

$$\sigma\tau. 4x^2 - 25$$

$$\zeta. 25\alpha^2 x^2 - 36\beta^2 \gamma^4$$

$$\eta. 36 - (x+4)^2$$

$$\theta. x^{2\mu} - x^{2\nu}$$

$$\iota. \alpha^2 - 36\beta^2 \gamma^4$$

Λύση

$$\alpha. y^2 - \alpha^2 = (y - \alpha) \cdot (y + \alpha)$$

$$\beta. 25\alpha^2 - 1 = (5\alpha)^2 - 1^2 = (5\alpha - 1) \cdot (5\alpha + 1)$$

$$\gamma. \alpha^2 - 16\beta^2 = \alpha^2 - (4\beta)^2 = (\alpha - 4\beta) \cdot (\alpha + 4\beta)$$

$$\delta. 1 - 4x^2 = 1^2 - (2x)^2 = (1 - 2x) \cdot (1 + 2x)$$

$$\epsilon. 16\alpha^2 - 9\beta^2 = (4\alpha)^2 - (3\beta)^2 = (4\alpha - 3\beta) \cdot (4\alpha + 3\beta)$$

$$\sigma\tau. 4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5) \cdot (2x + 5)$$

$$\zeta. 25\alpha^2 x^2 - 36\beta^2 \gamma^4 = (5\alpha x)^2 - (6\beta \gamma^2)^2 = (5\alpha x - 6\beta \gamma^2) \cdot (5\alpha x + 6\beta \gamma^2)$$

$$\eta. 36 - (x+4)^2 = 6^2 - (x+4)^2 = (6+x+4) \cdot (6-x-4)$$

$$\theta. x^{2\mu} - x^{2\nu} = (x^\mu)^2 - (x^\nu)^2 = (x^\mu - x^\nu) \cdot (x^\mu + x^\nu)$$

$$\iota. \alpha^2 - 36\beta^2 \gamma^4 = \alpha^2 - (6\beta \gamma^2)^2 = (\alpha - 6\beta \gamma^2) \cdot (\alpha + 6\beta \gamma^2)$$

5 Να γραφούν ως γινόμενο οι παραστάσεις:

$$\alpha. \alpha^2 - 10\alpha + 25$$

$$\beta. x^2 + 8x + 16$$

$$\gamma. 9x^2 y^2 - 12xy + 4$$

$$\delta. 9\alpha^4 - 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4$$

$$\epsilon. (x+y)^2 - 2(x+y) + 1$$

$$\sigma\tau. \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{\beta^2}{9}$$

$$\zeta. (x-y)^2 + 8(x-y) + 16$$

$$\eta. 16x^2 - 24xy + 9y^2$$

$$\theta. x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$$

$$\iota. x^4 - 2x^2 y^2 + y^4$$

Λύση

$$\alpha. \alpha^2 - 10\alpha + 25 = \alpha^2 - 2 \cdot 5 \cdot \alpha + 5^2 = (\alpha - 5)^2$$

$$\beta. x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 = (x + 4)^2$$

$$\gamma. 9x^2y^2 - 12xy + 4 = (3xy)^2 - 2 \cdot 3xy \cdot 2 + 2^2 = (3xy - 2)^2$$

$$\delta. 9\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (3\alpha^2)^2 - 2 \cdot 3\alpha^2 \cdot \beta^2 + (\beta^2)^2 = (3\alpha^2 - \beta^2)^2$$

$$\epsilon. (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y)^2 - 2(x + y) + 1^2 = (x + y - 1)^2$$

$$\sigma\tau. \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{\beta^2}{9} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{3} + \left(\frac{\beta}{3}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3}\right)^2$$

$$\zeta. (x - y)^2 + 8(x - y) + 16 = (x - y)^2 + 2 \cdot 4(x - y) + 4^2 = (x - y + 4)^2$$

$$\eta. 16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = (4x - 3y)^2$$

$$\theta. x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2$$

$$\iota. x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2$$

6 Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

$$\alpha. x^2 - 8x + 15$$

$$\beta. x^2 - 2x - 15$$

$$\gamma. 14 - 5x - x^2$$

$$\delta. x^2 + 9x + 20$$

$$\epsilon. x^2 + x - 30$$

Λύση

$$\alpha. x^2 - 8x + 15 = (x - 3) \cdot (x - 5), \text{ διότι } (-3) \cdot (-5) = 15 \text{ και } -3 + (-5) = -8$$

$$\beta. x^2 - 2x - 15 = (x + 3) \cdot (x - 5), \text{ διότι } 3 \cdot (-5) = -15 \text{ και } 3 + (-5) = -2$$

$$\gamma. 14 - 5x - x^2 = -(x^2 + 5x - 14) = -(x - 2) \cdot (x + 7), \text{ διότι } -2 \cdot 7 = -14 \text{ και } -2 + 7 = 5$$

$$\delta. x^2 + 9x + 20 = (x + 5) \cdot (x + 4), \text{ διότι } 4 \cdot 5 = 20 \text{ και } 5 + 4 = 9$$

$$\epsilon. x^2 + x - 30 = (x + 6) \cdot (x - 5), \text{ διότι } 6 \cdot (-5) = -30 \text{ και } 6 + (-5) = 1$$

7 Να γραφούν σε μορφή γινομένου οι παραστάσεις:

$$\alpha. x^2 - 2x - y^2 + 1$$

$$\beta. x^2 - 6x + 9 - y^2$$

$$\gamma. y^2 - x^2 - 10y + 25$$

$$\delta. 9x^2 - 36y^2 - 30x + 25$$

$$\varepsilon. \omega^2 - x^2 - 6x - 9$$

$$\sigma\tau. x^2 - y^2 - 4x + 4$$

$$\zeta. x^2 - y^2 - 4yz - 4z^2$$

$$\eta. x^2 + 6\alpha x - 9y^2 + 9\alpha^2$$

Λύση

$$\alpha. x^2 - 2x - y^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 - y^2 = (x-1)^2 - y^2 = (x-1+y) \cdot (x-1-y)$$

$$\beta. x^2 - 6x + 9 - y^2 = (x^2 - 6x + 9) - y^2 = (x-3)^2 - y^2 = (x-3+y) \cdot (x-3-y)$$

$$\gamma. y^2 - x^2 - 10y + 25 = y^2 - 10y + 25 - x^2 = (y-5)^2 - x^2 = (y-5+x) \cdot (y-5-x)$$

$$\delta. 9x^2 - 36y^2 - 30x + 25 = 9x^2 - 30x + 25 - 36y^2 = (3x-5)^2 - (6y)^2 = \\ = (3x-5+6y) \cdot (3x-5-6y)$$

$$\varepsilon. \omega^2 - x^2 - 6x - 9 = \omega^2 - (x^2 + 6x + 9) = \omega^2 - (x+3)^2 = (\omega+x+3) \cdot (\omega-x-3)$$

$$\sigma\tau. x^2 - y^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x-2)^2 - y^2 = (x-2+y) \cdot (x-2-y)$$

$$\zeta. x^2 - y^2 - 4yz - 4z^2 = x^2 - (y^2 + 4yz + 4z^2) = x^2 - (y+2z)^2 = \\ = (x+y+2z) \cdot (x-y-2z)$$

$$\eta. x^2 + 6\alpha x - 9y^2 + 9\alpha^2 = x^2 + 6\alpha x + 9\alpha^2 - 9y^2 = (x+3\alpha)^2 - (3y)^2 = \\ = (x+3\alpha+3y) \cdot (x+3\alpha-3y)$$



1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $x^3 - 16x$

β. $x^4 - 9x^2$

γ. $4x^3 - 36x$

δ. $3x^2 - 27$

ε. $64a^2b^4 - (2ab)^2$

2. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $(x^2 + 4)^2 - 16x^2$

β. $(17x^2 - 1)^2 - 64x^4$

γ. $(4x^2 + 12x + 9)^2 - 1$

δ. $(13x^2 - 5\psi^2)^2 - (12x^2 + 4\psi^2)^2$

ε. $x^2(-4x + 7) \cdot (8x + 1)$

3. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $8a(2a - \beta) \cdot (2a + \beta)$

β. $(x - 6) \cdot (x + 5)^2$

γ. $7(x + 11y) \cdot (x - y)$

δ. $(4x + 3) \cdot (8x - 9)$

4. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $\alpha^4 - \beta^4 + 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)$

β. $x^2 - 4 - 3(3x - 2) \cdot (x + 2)^2$

γ. $(x^2 + 2x + 1) - x^4$

δ. $(x + \psi)^2 - 1 - x\psi(x + \psi + 1)$

ε. $4a^2 - 4a\beta + \beta^2 - 9a^2\beta^2$

στ. $x^7 - x^5 - x^3 + x$

5. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $x^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta$

β. $\alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta^3$

γ. $x^2 - \psi^2 + 4x + 4$

δ. $(\alpha^2 + 9) \cdot (x^2 + 4) - (\alpha x + 6)^2$

ε. $x^4 - 22x^2 + 121$

στ. $x(x + 2) - \psi(\psi + 2)$

6. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $4x\psi(x - \psi) - 6x(x - \psi)^2 + 2x(x^2 - \psi^2)$

$$\beta. 3x(2+3x)^2 - (2+3x)^2 - (4-9x^2)^2$$

$$\delta. (x^2-9)^2 - (x+5) \cdot (x-3)^2$$

$$\sigma\tau. 5\alpha x^2 \psi^2 - 10\alpha x \psi + 5\alpha$$

$$\eta. \alpha^2 x + \alpha \beta x + \alpha \beta \psi + \beta^2 \psi - \alpha \gamma - \beta \gamma$$

$$\gamma. (\alpha^2 + 4) \cdot (\beta^2 + 1) - (\alpha + 2\beta)^2$$

$$\epsilon. (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$$

$$\zeta. \alpha \beta (x^2 + \psi^2) + x \psi (\alpha^2 + \beta^2)$$

7. Όμοια τις παραστάσεις:

$$\alpha. 8x^2 - 32$$

$$\gamma. (x + \psi)^4 - (x + \psi)^2$$

$$\epsilon. (x + \psi)^3 - (x + \psi) \cdot (x - \psi)^2$$

$$\beta. 16 - (3x - 2\psi)^2$$

$$\delta. x^3 - x^2 + 4 - 4x$$

$$\sigma\tau. \alpha^2 - \beta^2 + \alpha - \beta$$

8. Όμοια τις παραστάσεις:

$$\alpha. x^4 + x^3 \psi - x \psi^3 - \psi^4$$

$$\gamma. \alpha^4 + 6\alpha^2 \beta^2 + 8\beta^4$$

$$\epsilon. (x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2$$

$$\zeta. \alpha^2 \gamma^2 + \beta \gamma - \alpha^2 \gamma - \beta$$

$$\beta. x^2 \psi^2 - x^2 \omega^2 - \psi^2 \omega^2 + \omega^4$$

$$\delta. 3x^2 + 4x\psi + \psi^2$$

$$\sigma\tau. x^7 - x^3 + 8x^4 - 8$$

$$\eta. \alpha \beta (x^2 + 1) + x (\alpha^2 + \beta^2)$$

9. Όμοια τις παραστάσεις:

$$\alpha. (x-2)^2 \cdot (2x+1) - (2-x)^2 \cdot (2x-5)$$

$$\gamma. 9(2x-1)^2 - 25(x-3)^2$$

$$\epsilon. (x-5)^2 + x^2 - 25 + (x-5) \cdot (2x+1)$$

$$\zeta. (17x^2 - 10\psi^2)^2 - (6\psi^2 - 8x^2)^2$$

$$\beta. x(x-6) \cdot (x+4) + 9x + 36$$

$$\delta. (8x-6) \cdot (2x-4) - (6x+3) \cdot (4-2x)$$

$$\sigma\tau. (\alpha^2 - 9)^2 - (\alpha + 3)^2$$

$$\eta. (2x+5) \cdot (7-x) + 4x^2 - 25$$

10. Όμοια τις παραστάσεις:

$$\alpha. \alpha^2 x^2 + 2\alpha^2 x \psi + \alpha^2 \psi^2 - (\alpha + \beta)^2$$

$$\gamma. x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \beta$$

$$\beta. (x - 2\psi)^2 - 2(x - 2\psi) + 1$$

$$\delta. 3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \frac{1}{3}\beta^2$$

11. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $(x-4)^2 + x^2 - 16 + (x-4) \cdot (2x+1)$

β. $(x+2) \cdot (2x+1)^2 - 16x - 32$

γ. $3(x^2-9) \cdot (x+1) - 2(x+3) \cdot (x+1)$

δ. $(x^2-1) \cdot (x+2) - (x^2-4) \cdot (x+1)$

ε. $x^3 + 2x^2 - x - 2$

στ. $x^3 - 5x^2 + 4$

ζ. $x^3 - 2x^2 - x + 2$

η. $x^2 - x\psi + \psi - 1$

12. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $121x^3 - 49x$

β. $9x^2 - 6x\psi + \psi^2 - 25$

γ. $x^2 + \alpha^2 - \psi^2 + 2\alpha x$

δ. $x^4 + \alpha x^2 - \beta x^2 - \alpha\beta$

ε. $9x^2 + 12x\psi + 4\psi^2 - 81x^2\psi^2$

στ. $(x^2-9)^2 + 8(x-1) \cdot (x+3)^2$

13. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2$

β. $\psi^2 + 2x - x^2 - 1$

γ. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta$

δ. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$

ε. $(\alpha^2 + 1)^2 - 4\alpha^2$

στ. $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$

ζ. $x^4 + 5x^2\psi^2 + 9\psi^4$

η. $\alpha^4 + 4\beta^4 - 13\alpha^2\beta^2$

θ. $x^4 + 4x^2 + 16$

ι. $\alpha^4 + 4\beta^4$

14. Όμοια τις παραστάσεις:

α. $x^2 - 3x + 2$

β. $2x^2 - 4x + 2$

γ. $9x^2 + 12x + 4$

δ. $x^2 - 7x + 6$

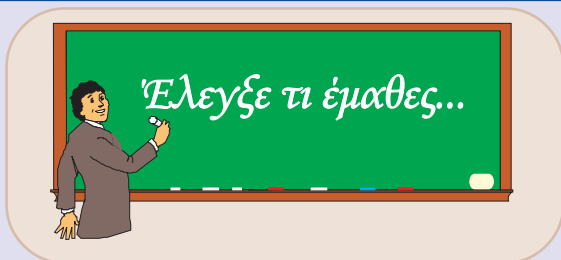
ε. $x^2 + 6x + 5$

στ. $3x^2 - 21x + 30$

ζ. $2x^2 - x - 1$

η. $3x^2 - 5x + 2$

θ. $2x^2 + 3x - 5$



Ερώτηση 1

Να παραγοντοποιήσετε ρις παραστάσεις:

α. $(x^2 - 6x + 3)^2 - (x - 9)^2$

β. $\alpha(x - \alpha)^2 + \beta(x^2 - \alpha^2)$

Ερώτηση 2

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε καθένα από τα παρακάτω τριώνυμα να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο

α. $x^2 + \alpha x - 6$

β. $x^2 + \alpha x + 8$

Ερώτηση 3

Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις της στήλης Α με τις ίσες τους παραστάσεις της στήλης Β.

Στήλη Α

α. $(x + y) \cdot (\alpha - 2\beta) - 3(\alpha - 2\beta)$

β. $\alpha(x + y) - 3\beta x - 3\beta y$

γ. $5x(\alpha - \beta) - \alpha + \beta$

δ. $4\alpha^2\beta^2 - 4$

ε. $\alpha^4 - 4\alpha^2\beta^2 + 4\beta^4$

Στήλη Β

1. $(\alpha^2 - 2\beta^2)^2$

2. $(\alpha - 2\beta) \cdot (x + y - 3)$

3. $(x + y) \cdot (\alpha - 3\beta)$

4. $(\alpha - \beta) \cdot (5x - 1)$

5. $4(\alpha\beta + 1) \cdot (\alpha\beta - 1)$