**ΚΡΟΥΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Β**

*Στις παρακάτω ερωτήσεις να δικαιολογείτε πάντα τις απαντήσεις σας.*

**1**. Σώμα Σ1 μάζας m που κινείται προς τα δεξιά στη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου u συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ2 διπλάσιας μάζας.
Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ1 κατά την κρούση έχει αλγεβρική τιμή:

α) . β) . γ) .

**2**. Ένα σώμα Α που έχει μάζα m και ταχύτητα  συγκρούεται με άλλο σώμα Β που έχει διπλάσια μάζα και ταχύτητα , αντίρροπη της . Από την κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα που παραμένει ακίνητο στο σημείο της σύγκρουσης. Ο λόγος  των μέτρων των ταχυτήτων των δύο σωμάτων πριν από την κρούση, είναι:

α) . β) . γ) .

**3**. Δύο σώματα Α και Β, με μάζες  και  αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Δίνουμε στο σώμα Α αρχική ταχύτητα  έτσι ώστε να κινηθεί προς τη θετική φορά και να συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα Β. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Β μετά την κρούση είναι:

α) . β) . γ) .

**4**. Σώμα Σ1 μάζας  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ένα δεύτερο ακίνητο σώμα Σ2 μάζας . Αν  είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ1 και  είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ2 λόγω της ελαστικής κρούσης, τότε ισχύει:

α) . β) . γ) .

**5**. Σώμα Σ1 μάζας  που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο ακίνητο σώμα Σ2 μάζας . Η ποσότητα της κινητικής ενέργειας που έχει μεταφερθεί από τo σώμα Σ1 στo σώμα Σ2 μετά την κρούση γίνεται μέγιστη όταν:

α) . β) . γ) .

**6**. Δύο σώματα με μάζες  και , εκ των οποίων η  κινείται με ταχύτητα που έχει αλγεβρική τιμή  ενώ η  είναι ακίνητη, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας  του σώματος  θα δίνεται από τη σχέση:

α) . β) . 

**7**. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι είναι δυνατόν η αρχική ορμή ενός συστήματος δύο σωμάτων που συγκρούονται ελαστικά να είναι μηδέν, και μετά την κρούση η τελική ορμή του συστήματος να είναι μηδέν ενώ η κινητική ενέργεια του συστήματος να είναι διάφορη του μηδενός. Ο παραπάνω ισχυρισμός:

α) Είναι ψευδής. β) Είναι αληθής.

**8**. Σώμα μάζας  κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου  σε ακίνητη σφαίρα (2) μάζας  και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Μετά την κρούση η (1) κινείται με ταχύτητα μέτρου αλλά αντίθετης φοράς από την . Η μάζα του σώματος  είναι:

α) . β) . γ) .

**9**. Σε μία ανελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων  και , εκ των οποίων το  είναι αρχικά ακίνητο, το ποσοστό της μεταβιβαζόμενης ενέργειας από το  στο  δίνεται από τη σχέση:

α) %%. β) %%. γ) %%

όπου  η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του πρώτου σώματος,  η κινητική ενέργεια του δεύτερου σώματος και  η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

**10**. Κατά την μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων  και  εκ των οποίων η  είναι ακίνητη το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της  (επί της αρχικής κινητικής ενέργειάς της) είναι %. O λόγος  είναι:

α)  ή . β) ή  γ) ή .

**11**. Το βλήμα μάζας  του σχήματος κινείται παράλληλα με το οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται πλαστικά με το κιβώτιο μάζας που ισορροπεί με τη βοήθεια μικρού εμποδίου πάνω σε λείο ακλόνητο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης 

Αν η ταχύτητα του βλήματος έχει μέτρο υ, τότε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση θα είναι:

α) . β) . γ)

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Γ1**.Σώμα Σ1 με μάζα **m1 = 2Kg** και ταχύτητα μέτρου **u1 = 20m/s** , κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, προς τη θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ1 συγκρούεται με σώμα Σ2 μάζας **m2 = 3Kg**  που αρχικά είναι ακίνητο. Η κρούση οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.
β) την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.
γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ2.
δ) τη μεταβολή της ορμής του σώματος Σ1.

**Γ2**. Σώμα μάζας **m1 = 0,9Kg**  που είναι προσδεμένο στο άκρο τεντωμένου νήματος μήκους **L=2m** , αφήνεται ελεύθερο από ύψος**h**, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το νήμα βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου **u1 = 2m/s**   και συγκρούεται πλαστικά με βλήμα μάζας **m2 = 0,1Kg**  και ταχύτητας μέτρου  **u2 = 48m/s**   με φορά προς το σώμα. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.
Να υπολογίσετε:
α) το ύψος **h**  από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας **m1**.
β) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.

γ) το ύψος **h΄** στο οποίο θα φτάσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

δ) τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση. Σε τι μορφή ενέργειας μετατράπηκε αυτή;
Δίνεται: g =10m/s2 .

**Γ3**. Σώμα Σ1 μάζας  **m1** κινούμενο προς τη θετική φορά σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου  **u1 = 8m/s** κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας  **m2**. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας  **m1** κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου **u1’= 4m/s** . Να υπολογίσετε:

α) το λόγο των μαζών  **m1**/ **m2**.
β) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας **m2** αμέσως μετά την κρούση.
γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας **m1** που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας **m2** λόγω της κρούσης.
δ) την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής των δύο σωμάτων, αν **m2 = 2Kg** . Τι παρατηρείτε;
 Δίνεται  g =10m/s2  .

**Γ4**. Το σώμα μάζας **m1 = 2Kg**  του παρακάτω σχήματος βάλλεται με αρχική ταχύτητα μέτρου **u0 = 10m/s**  πάνω σε οριζόντιο δάπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής **μ=0,2** . Αφού διανύσει απόσταση **s=9m** συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας **m2 = 6Kg**  που είναι αρχικά ακίνητο.
Να βρείτε:
α) την ταχύτητα του σώματος μάζας **m1** λίγο πριν την κρούση.
β) τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
γ) το ποσοστό της ενέργειας του σώματος **m1** που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας **m2**.
δ) το διάστημα  που θα διανύσει το σώμα μάζας **m2** μέχρι να σταματήσει.
 Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g =10m/s2 .

|  |  |
| --- | --- |
| **Γ5**. Ένας ξύλινος κύβος μάζας **M =0,9 Kg** ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα μικρό βλήμα μάζας **m =0,1 Kg**  το οποίο, λίγο πριν να συγκρουστεί, κινείται με ταχύτητα μέτρου **u0 = 50m/s**  , σχηματίζοντας με τον ορίζοντα γωνία **φ**, σφηνώνεται στον κύβο. Να υπολογίσετε: | Vlima |

α) την ταχύτητα V του συσσωματώματος.
β) τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την κρούση.
γ) το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του βλήματος το οποίο μεταφέρθηκε στον κύβο.
δ) τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση.
Δίνονται: ημφ =0,6 , συνφ=0,8.

**Γ6**. Ένας ξύλινος κύβος μάζας **M =4,5 Kg**  είναι δεμένος στο άκρο ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους **L =0,2m**, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε οροφή. Ο κύβος ηρεμεί με το νήμα κατακόρυφο. Ένα βλήμα μάζας **m =0,5 Kg**  κινείται οριζόντια με ταχύτητα **u0 = 20m/s**    και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με τον κύβο. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
β) το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται κατά την κρούση των σωμάτων.
γ) τη μέγιστη ανύψωση που επιτυγχάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
δ) την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.
Δίνεται g =10m/s2  .

**Γ7**. Μικρή σφαίρα **Σ1** ,μάζας **m1 = 2Kg**  που κινείται πάνω σε λείο επίπεδο με ταχύτητα **u1=10m/s**  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα **Σ2** μάζας **m1 = 2Kg** . Να υπολογίσετε:

α) τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.
β) τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας καθώς και τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών.
γ) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος **Σ1**.
δ) το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας **Σ1** που μεταφέρθηκε κατά την κρούση στη σφαίρα **Σ2**.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

**Δ1**. Σφαίρα Σ1 μάζας  κινείται με ταχύτητα μέτρου  και συγκρούεται με άλλη σφαίρα Σ2 μάζας , που είναι αρχικά ακίνητη. Η κρούση είναι έκκεντρη και ελαστική και η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Μετά την κρούση, η σφαίρα Σ1 κινείται με ταχύτητα  που έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της . Να υπολογιστεί:

α) το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας  της σφαίρας Σ2, μετά την κρούση.
β) το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ1, μετά την κρούση.
γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας  που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας  λόγω της κρούσης.
δ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ1 κατά τη κρούση, αν .

Δίνεται η μαθηματική ιδιότητα .

**Δ2**. Σώμα Σ2 μάζας  βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα δεύτερο σώμα Σ1 μάζας  κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου  και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το Σ2.

Να υπολογίσετε:

α) τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.
β) το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ2.
γ) το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ2.
δ) τη μέγιστη συσπείρωση  του ελατηρίου.
 Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου .

**Δ3**. Το σώμα μάζας  του παρακάτω σχήματος, ακουμπάει χωρίς να έχει προσδεθεί στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς . Το ελατήριο είναι συμπιεσμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος κατά  με τη βοήθεια νήματος. Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα μάζας  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας . Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. To  μετά την κρούση κινείται σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  που παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής ολίσθησης .



Α. Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος  λίγο πριν την κρούση του με το σώμα .
β) τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την ελαστική τους κρούση.
γ) το διάστημα που θα διανύσει το  μέχρι να σταματήσει.

Β. Θα επιστρέψει το  στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, αν υποτεθεί ότι το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι αρκετά μεγάλο για την κίνηση του σώματος;
Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας .

**Δ4**. Ένα σώμα μάζας  ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Κάποια στιγμή ένα βλήμα μάζας  βάλλεται από απόσταση  κάτω από το σώμα Μ με αρχική ταχύτητα μέτρου  και με φορά προς τα πάνω και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας Μ. Να υπολογίσετε:
α) Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος λίγο πριν την κρούση.
β) Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
γ) Τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την διάρκεια της κρούσης.
δ) Τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου από την αρχική του θέση.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας .

**Δ5.** Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα  και ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου μη εκτατού νήματος μήκους . Σώμα μάζας  κινείται με ταχύτητα  και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M. Να υπολογίσετε:

α) Την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα  ώστε μετά την πλαστική τους κρούση, το συσσωμάτωμα να διαγράψει μία πλήρη κυκλική τροχιά (να κάνει ανακύκλωση).
β) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της μάζας  πριν και μετά την κρούση.
γ) Την τάση  του νήματος πριν την κρούση.
δ) Την τάση  του νήματος αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας .

**Δ6**. Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k, έχει το κάτω άκρο του δεμένο στο έδαφος και στο άνω άκρο του έχουμε δέσει μικρό σώμα  μάζας . Το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά . Στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα του ελατηρίου και σε ύψος  πάνω από  αφήνουμε ένα μικρό σώμα  μάζας . Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.

β) Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς του ελατηρίου και την περίοδο ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

γ) Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας θετική φορά κατακόρυφη προς τα επάνω και λαμβάνοντας ως χρονική στιγμή t=0 τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται: 

**ΚΡΟΥΣΕΙΣ 2**

**ΘΕΜΑ Β**

*Στις παρακάτω ερωτήσεις να δικαιολογείτε πάντα τις απαντήσεις σας.*

**Β1**.Ένα βλήμα διαπερνά ένα ακίνητο κιβώτιο και η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του βλήματος είναι 100J. Εάν η ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι 50J τότε η κινητική ενέργεια του κιβωτίου μετά την κρούση είναι:
α) . β) . γ) .

**Β2.** Σώμα Σ1 κινούμενο προς ακίνητο σώμα Σ2, ίσης μάζας με το Σ1, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με αυτό. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του Σ1 που έγινε θερμότητα κατά την κρούση είναι:
α) . β) %. γ) %.

**Β3**. Σώμα Α μάζας  προσπίπτει με ταχύτητα  σε ακίνητο σώμα Β μάζας , με το οποίο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση το σώμα Α γυρίζει πίσω με ταχύτητα μέτρου ίσου με το  της αρχικής του τιμής. Ο λόγος των μαζών  είναι:

α) . β) . γ) .

**Β4**. Μεταλλική συμπαγής σφαίρα Σ1 κινούμενη προς ακίνητη μεταλλική συμπαγή σφαίρα Σ2, τριπλάσιας μάζας από τη Σ1, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με αυτή. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της Σ1 που μεταβιβάζεται στη Σ2 κατά την κρούση είναι:
α) %. β) %. γ) %.

**Β5**. Τρεις μικρές σφαίρες Σ1 , Σ2 και Σ3 βρίσκονται ακίνητες πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Οι σφαίρες έχουν μάζες ,  και  αντίστοιχα. Δίνουμε στη σφαίρα Σ1 ταχύτητα μέτρου  και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη δεύτερη ακίνητη σφαίρα Σ2. Στη συνέχεια η δεύτερη σφαίρα Σ2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την τρίτη ακίνητη σφαίρα Σ3. Η τρίτη σφαίρα αποκτά τότε ταχύτητα μέτρου . Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων  είναι:

α) . β) . γ) .

**Β6**. Ένα σώμα μάζας  κινείται με ταχύτητα μέτρου  και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα που είναι αρχικά ακίνητο. Είναι δυνατόν μετά την κρούση η ταχύτητα του 1ου σώματος να έχει μέτρο  ίδιας φοράς με την αρχική του ταχύτητα και η ταχύτητα του 2ου σώματος να έχει μέτρο ;
α) Ναι. β) Όχι. γ) Μόνο αν τα σώματα έχουν ίδιες μάζες.

**Β7**. Σε μία κρούση μεταξύ δύο σωμάτων ισχύει πάντα:
α)  β)  γ) 
όπου  η μεταβολή της ορμής του 1ου σώματος και  η μεταβολή της ορμής του 2ου σώματος.

**Β8**. Σε μία ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων ισχύει πάντα:
α)  β)  γ) 
όπου  η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του 1ου σώματος και  η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του 2ου σώματος.

**Β9**. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι είναι δυνατόν η αρχική ορμή ενός συστήματος δύο σωμάτων που συγκρούονται πλαστικά να είναι μηδέν, και μετά την κρούση η τελική ορμή του συστήματος να είναι μηδέν ενώ η κινητική ενέργεια του συστήματος να είναι διάφορη του μηδενός. Ο παραπάνω ισχυρισμός:
α) είναι ψευδής. β) είναι αληθής.

**Β10**.Σώμα μάζας  κινείται οριζόντια με ταχύτητα . Στην πορεία του συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας . Η απόλυτη τιμή της μεταβολής της ορμής  και της κινητικής ενέργειας ΔΚολ του συστήματος είναι αντίστοιχα:
α) , . β) , .

γ) , . δ) , .

**Β11.** Ένα σώμα μάζας  συγκρούεται μετωπικά με δεύτερο ακίνητο σώμα μάζας . Aν η σύγκρουση θεωρηθεί ελαστική και η αρχική κινητική ενέργεια του  είναι , η κινητική ενέργεια που χάνει το  είναι:
α) . β) .γ) .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Γ1.**Σώμα μάζας  ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα μέτρου  και μάζας , διαπερνά το σώμα χάνοντας το % της κινητικής του ενέργειας και εξέρχεται με ταχύτητα . Να υπολογιστεί:

α) το μέτρο της ταχύτητας  του βλήματος και της ταχύτητας  του σώματος αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος.

β) Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που μεταφέρθηκε στο σώμα κατά την κρούση.

γ) Η μεταβολή της ορμής του βλήματος και του σώματος από τη στιγμή που ηρεμούσε το σώμα μέχρι την έξοδο του βλήματος.

δ) Η μέση δύναμη που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της διέλευσης του βλήματος, αν αυτή διαρκεί .

**Γ2.** Σώμα Σ1 μάζας  κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου  με κατεύθυνση κάθετη σε κατακόρυφο τοίχο και συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ2 μάζας  που κινείται παράλληλα προς τον τοίχο με οριζόντια ταχύτητα . Το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα . Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα συγκρούεται ελαστικά με τον κατακόρυφο τοίχο. Μετά την ελαστική κρούση αποκτά ταχύτητα μέτρου , η διεύθυνση της οποίας είναι κάθετη με τη . Οι κινήσεις των σωμάτων Σ1, Σ2 και του συσσωματώματος γίνονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας .
β) το μέτρο της ταχύτητας .
γ) τη μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος εξαιτίας της ελαστικής κρούσης με τον τοίχο.
δ) το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκήθηκε στο συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της κρούσης, αν η χρονική διάρκεια της κρούσης του συσσωματώματος με τον τοίχο είναι .

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας .

**Γ3**. Ένα ξύλινο σώμα μάζας  είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα βλήμα μάζας  κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου  και σφηνώνεται στο σώμα, σε βάθος . Να υπολογιστεί:

α) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος μετά την κρούση.
β) το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα (να θεωρήσετε ότι όλη η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος γίνεται θερμότητα και ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το οριζόντιο επίπεδο).
γ) η μέση δύναμη που ασκεί η σφαίρα στο ξύλο καθώς εισχωρεί σε αυτό.
δ) η μετατόπιση του συστήματος ξύλο-βλήμα μέχρι να σφηνωθεί το βλήμα στο ξύλο.

**Γ4**. Δυο σφαίρες Σ1 και Σ2, που έχουν μάζες  και  αντίστοιχα, κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά μήκος της ίδιας ευθείας και πλησιάζουν η μια την άλλη με ταχύτητες μέτρων  και , αντίστοιχα. Οι δυο σφαίρες συγκρούονται μετωπικά. Μετά την κρούση η σφαίρα Σ1 αλλάζει κατεύθυνση κινούμενη με ταχύτητα μέτρου .
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας  της σφαίρας Σ2 μετά την κρούση.
β) Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική.
γ) Να υπολογίσετε:
   1) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας κατά την κρούση. Τι παρατηρείτε;
   2) τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας κατά την κρούση. Τι παρατηρείτε;

**Γ5**.Τρεις μικρές σφαίρες Σ1, Σ2 και Σ3 βρίσκονται ακίνητες πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως στο σχήμα. Οι σφαίρες έχουν μάζες ,  και  αντίστοιχα. Δίνουμε στη σφαίρα Σ1 ταχύτητα μέτρου . Όλες οι κρούσεις που ακολουθούν ανάμεσα στις σφαίρες είναι κεντρικές και ελαστικές. Να βρεθούν:

α) ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν συνολικά.
Αφού ολοκληρωθούν όλες οι κρούσεις των σφαιρών μεταξύ τους, να υπολογισθεί:
β) η τελική ταχύτητα κάθε σφαίρας.
γ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής της πρώτης σφαίρας.
δ) το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ1 που μεταφέρθηκε στη τρίτη σφαίρα Σ3.

Δίνονται: η μάζα  και .

**Γ6**. Μια σφαίρα Σ1 μάζας  κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα  και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ2 μάζας  (). Μετά την κρούση η σφαίρα Σ2 συγκρούεται ελαστικά με κατακόρυφο επίπεδο τοίχο, που είναι κάθετος στη διεύθυνση της κίνησης των δυο σφαιρών.

α) Αν ο λόγος των μαζών των δυο σφαιρών είναι  να εκφράσετε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών Σ1 και Σ2σε συνάρτηση με το  και το μέτρο της ταχύτητας .

Να βρεθεί:
β) για ποιες τιμές του  η σφαίρα Σ1 μετά την κρούση της με τη σφαίρα Σ2 κινείται προς τα αριστερά.
γ) για ποια τιμή του , η σφαίρα Σ2, μετά τη κρούση της με τον τοίχο θα διατηρεί σταθερή απόσταση από την σφαίρα Σ1.

Με βάση την παραπάνω τιμή του , να υπολογισθεί:
δ) ο λόγος της τελικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ2, που έχει μετά την κρούση της με τον τοίχο, προς την αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ1.

**Γ7**. Σώμα μάζας  ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης . Μια μικρή μπάλα μάζας  κινούμενη οριζόντια προς τα δεξιά, με ταχύτητα μέτρου , συγκρούεται με το σώμα και επιστρέφει με ταχύτητα μέτρου . Να υπολογιστεί:

α) το μέτρο της ταχύτητας  του σώματος Μ αμέσως μετά την κρούση.

β) η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων κατά την κρούση. Σε ποιες μορφές ενέργειας μετατράπηκε;

γ) η μετατόπιση του σώματος μάζας Μ μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής του με το επίπεδο.

δ) ο λόγος  των μαζών των δύο σωμάτων, αν η κρούση ήταν ελαστική.

Δίνεται: .

**Γ8**. Δύο τελείως ελαστικές σφαίρες με μάζες  και  αντίστοιχα, κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και πλησιάζουν η μία την άλλη με ταχύτητες μέτρου . Να βρείτε:
α) Τις ταχύτητές των μαζών μετά την κρούση.
β) Τη μεταβολή της ορμής της .
γ) Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας .
δ) Τη μέση δύναμη που ασκήθηκε στη σφαίρα  κατά την κρούση αν αυτή διαρκεί χρόνο .

**Γ9**. Σώμα Α μάζας  αφήνεται να γλιστρήσει από απόσταση  από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης . Ταυτόχρονα δεύτερο σώμα Β μάζας  βάλλεται με αρχική ταχύτητα  από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά.
Να υπολογίσετε:
α) τις ταχύτητες των σωμάτων λίγο πριν την κρούση.
β) την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
γ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Α κατά τη διάρκεια της κρούσης.
δ) την ταχύτητα με την οποία το συσσωμάτωμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας: .

**Γ10**. Ένα σώμα μάζας  εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους  πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στην άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς . Τη χρονική στιγμή  που το σώμα βρίσκεται στη θέση  και κινείται από τη θέση ισορροπίας προς τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης συγκρούεται ελαστικά με δεύτερο σώμα μάζας  που κινείται με ταχύτητα μέτρου  αντίθετης φοράς από αυτή της .
Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος  ελάχιστα πριν την κρούση.
β) τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την ελαστική κρούση.
γ) το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σώματος .
δ) το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του  όταν αυτό βρίσκεται στη νέα ακραία θέση της ταλάντωσής του.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

**Δ1.** Από την κορυφή (A) ενός κεκλιμένου επιπέδου μεγάλου μήκους και γωνίας κλίσης  αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί ένα σώμα Σ1μάζας  το οποίο εμφανίζει με το κεκλιμένο επίπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης . Αφού διανύσει διάστημα  κινούμενο στο κεκλιμένο επίπεδο, συναντά ακίνητο σώμα Σ2 μάζας , με το οποίο συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά (σημείο Γ). Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση των δύο σωμάτων διανύει διάστημα  και φτάνει στη βάση (Β) του κεκλιμένου επιπέδου. Να υπολογίσετε:
α) την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
β) τη συνολική θερμότητα λόγω τριβών που παράχθηκε από τη στιγμή που αφήσαμε ελεύθερο το σώμα μάζας  μέχρι τη στιγμή που το συσσωμάτωμα έφτασε στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
γ) την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο μαζών κατά τη κρούση.
δ) το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας των σωμάτων Σ1 και Σ2 που έγινε θερμότητα μέχρι το συσσωμάτωμα να φτάσει στη βάση (Β) του κεκλιμένου επιπέδου.

Να θεωρηθεί:
(i) Το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας ταυτίζεται με το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
(ii) Όλη η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση γίνεται θερμότητα.
(iii) Το έργο που καταναλώνει η τριβή μετατρέπεται σε θερμότητα.
(iv) Τα σώματα έχουν αμελητέες διαστάσεις.
(v) Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης πριν και μετά την κρούση παραμένει ίδιος.
Δίνονται: ,  και η επιτάχυνση της βαρύτητας .

**Δ2**. Ένα πρωτόνιο Π1 μάζας  κινούμενο με ταχύτητα μέτρου  αλληλεπιδρά (συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά) με ένα άλλο ακίνητο πρωτόνιο Π2 μάζας . Μετά την κρούση το πρωτόνιο Π1 κινείται σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία  σε σχέση με την αρχική του πορεία.

Α. Να υπολογισθεί αμέσως μετά τη κρούση:

α) το μέτρο της ταχύτητας του πρωτονίου Π1.
β) η ταχύτητα του πρωτονίου Π2.

Β. Να βρεθεί το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του πρωτονίου Π1 που μεταφέρεται στο πρωτόνιο Π2.
γ) στην παραπάνω κρούση.
δ) αν η κρούση ήταν κεντρική.

**Δ3.** Ένα σώμα μάζας  ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς . Δεύτερο σώμα μάζας , βάλλεται από το έδαφος από το σημείο Κ με αρχική ταχύτητα  και μετά από χρόνο  συγκρούεται ανελαστικά με το . Μετά την κρούση το σώμα  εξέρχεται από το  με ταχύτητα μέτρου . Το σώμα Μ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος  ελάχιστα πριν την κρούση.

β) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος  αμέσως μετά την κρούση.

γ) το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα μάζας .

δ) την αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος ελατήριο – σώμα μάζας  – σώμα μάζας  θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Κ.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας .

**Δ4**. Στο κάτω άκρο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης  είναι στερεωμένο ιδανικό ελατήριο σταθεράς . Στο πάνω ελεύθερο άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα μάζας  που ισορροπεί. Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου και από απόσταση  από το , βάλλεται προς τα κάτω δεύτερο σώμα  με αρχική ταχύτητα  και με κατεύθυνση τον άξονα του ελατηρίου που συγκρούεται κεντρικά με το . Μετά την κρούση η κίνηση του  αντιστρέφεται, και διανύοντας απόσταση  σταματάει. Το  εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Α. Να υπολογίσετε:
α) την ταχύτητα του σώματος   ελάχιστα πριν την κρούση.
β) τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
γ) τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου από την αρχική του θέση.
δ) τη μέγιστη δυναμική ελαστική ενέργεια του ελατηρίου κατά την απλή αρμονική ταλάντωση του .

Β. Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική.
Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας .

**Δ5**. Στο σχήμα το σώμα μάζας  συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με το σώμα μάζας . Αν είναι γνωστό ότι το ιδανικό ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό μήκος του, ότι η μάζα του σώματος  είναι , η σταθερά του ελατηρίου είναι , ο συντελεστής τριβής μεταξύ σωμάτων και επιπέδου είναι  και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι , να υπολογίσετε:

α) τη μέγιστη επιτρεπτή παραμόρφωση του ελατηρίου ώστε να μην κινηθεί το .
β) τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει το  ώστε να μην κινηθεί το .
γ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής του  στη διάρκεια της κρούσης.
δ) τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια του φαινομένου του ερωτήματος α.

**Δ6**. Αρχικά η σφαίρα  βρίσκεται ακίνητη και το νήμα σε κατακόρυφη θέση.
Εκτρέπουμε τη σφαίρα μάζας  από την αρχική της θέση ώστε το νήμα μήκους  να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία  και την αφήνουμε ελεύθερη. Όταν αυτή περάσει από την αρχική της θέση ισορροπίας συγκρούεται ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας  που βρισκόταν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με τριβές. Το σώμα  μετά την κρούση, αφού διανύσει διάστημα  σταματάει. Να βρεθούν:

α) Το μέτρο της ταχύτητας  του σώματος μάζας  ελάχιστα πριν την κρούση.
β) Το συνημίτονο της τελικής γωνίας απόκλισης  που θα σχηματίσει το νήμα με την κατακόρυφο μετά την ελαστική κρούση.
γ) Το διάστημα  μέχρι να σταματήσει το σώμα .
δ) Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του  κατά την κρούση.

Δίνονται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου  και η επιτάχυνση της βαρύτητας .

**Δ7**. Το σώμα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα  και ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους . Κάποια χρονική στιγμή βλήμα μάζας  σφηνώνεται στο σώμα μάζας  και το συσσωμάτωμα που προκύπτει, εκτελώντας κυκλική κίνηση, φτάνει σε θέση όπου το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία  τέτοια ώστε  και σταματά στιγμιαία.

Να υπολογίσετε:
α) Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
β) Την αρχική ταχύτητα  του βλήματος.
γ) Την τάση του νήματος πριν την κρούση.
δ) Την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση.
ε) Τη μηχανική ενέργεια, που μετατράπηκε σε θερμότητα στην πλαστική κρούση.
Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας .

**Δ8**. Ένα βλήμα μάζας , βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου  και διαπερνά ένα κιβώτιο μάζας  που ήταν αρχικά ακίνητο στη θέση  μη λείου οριζόντιου δαπέδου. Το βλήμα εξέρχεται από το κιβώτιο με ταχύτητα . Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ δαπέδου και κιβωτίου είναι , όπου  η θέση του κιβωτίου στο (S.I.), να υπολογίσετε:

α) Την ταχύτητα του κιβωτίου αμέσως μετά την κρούση.
β) Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του βλήματος κατά τη διάρκεια της κρούσης.
γ) Το διάστημα που θα διανύσει το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει.
δ) Το μέτρο του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής της ορμής του κιβωτίου στη θέση .
ε) Τη συνολική θερμότητα που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον στη διάρκεια του φαινομένου.
Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας .

**Δ9**. Ένα βλήμα μάζας  σφηνώνεται με ταχύτητα  σε ακίνητο κιβώτιο μάζας  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το κιβώτιο μπορεί να ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Αν η δύναμη αντίστασης που εμφανίζεται μεταξύ βλήματος και κιβωτίου κατά την κρούση θεωρηθεί σταθερού μέτρου , να υπολογίσετε:

α) Την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος.
β) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος (βλήμα – κιβώτιο) κατά τη διάρκεια της κρούσης.
γ) Το χρόνο που διαρκεί η κίνηση του βλήματος σε σχέση με το κιβώτιο.
δ) Πόσο βαθιά εισχωρεί το βλήμα στο κιβώτιο.

**Δ10.** Το υλικό σημείο μάζας  αφήνεται να κινηθεί από το σημείο Α ενός λείου κατακόρυφου οδηγού σε σχήμα τεταρτοκυκλίου ακτίνας . Όταν το υλικό σημείο φτάσει στο σημείο Β συγκρούεται ανελαστικά με μία λεπτή ομογενή κατακόρυφη ράβδο μάζας M=9 kg και μήκους  που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το αρθρωμένο άκρο της Ο. Μετά την κρούση το υλικό σημείο αποκτά ταχύτητα μέτρου ίσου με το μισό από αυτό που είχε ελάχιστα πριν την κρούση και αντίθετης φοράς.
Αν δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της  και η επιτάχυνση της βαρύτητας , να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου ελάχιστα πριν την κρούση.
β) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
γ) τη μέγιστη γωνία εκτροπής που θα σχηματίσει η ράβδος με την κατακόρυφο.
δ) την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου σε εκείνο το σημείο.

**Δ11**. Η ομογενής ράβδος μάζας  και μήκους  του διπλανού σχήματος αφήνεται από την οριζόντια θέση να κινηθεί στο κατακόρυφο επίπεδο. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το αρθρωμένο άκρο της Ο. Όταν διέρχεται από την κατακόρυφη θέση συγκρούεται με ακίνητο υλικό σημείο μάζας  που βρίσκεται στο κατώτερο σημείο Α ενός λείου κατακόρυφου οδηγού σε σχήμα τεταρτοκυκλίου ακτίνας . Μετά την κρούση η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα μέτρου ίσου με το μισό από αυτό που είχε ελάχιστα πριν την κρούση και ίδιας φοράς.
Αν δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της  και η επιτάχυνση της βαρύτητας , να υπολογίσετε:

α) τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ελάχιστα πριν την κρούση.
β) την ταχύτητα του υλικού σημείου αμέσως μετά την κρούση.
γ) τη στιγμιαία ισχύ της ροπής του βάρους της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
δ) την απώλεια της Μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.