ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \Delta .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $\mathbf{G(x) = F(x) + c}$, $c \in \mathbb{R}$, **είναι παράγουσες της f στο Δ**

  και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: $\mathbf{G(x) = F(x) + c}$, $c \in \mathbb{R}$.

με απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \blacksquare$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΚΑΠΟΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α/Α	Συνάρτηση	Παράγουσες όπου $c \in R$ σταθερά
1	$f(x)=0$	$G(x)=c$, $c \in R$
2	$f(x)=1$	$G(x)=x+c$
3	$f(x)=\frac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c$
4	$f(x)=x^{\alpha}$	$G(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
5	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c$
7	$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x)=\varepsilon\varphi x+c$
8	$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x)=-\sigma\varphi x+c$
9	$f(x)=e^x$	$G(x)=e^x+c$
10	$f(x)=\alpha^x$	$G(x)=\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c$
11	$f(x)=e^x$	$G(x)=e^x+c$
12	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$G(x)=2\sqrt{x}+c$
13	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$G(x)=-\frac{1}{x}+c$

Σημείωση:

Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Παράγουσες Σύνθετων Συναρτήσεων

Συνάρτηση g	**Παράγουσα** G
$f(x)^{\nu} \cdot f'(x)$ $\nu \neq -1$	$\dfrac{f(x)^{\nu+1}}{\nu+1} + c$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)} + c$
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{f(x)} + c$
$\alpha^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\dfrac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha} + c$
$\sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$	$\eta\mu f(x) + c$
$\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$	$-\sigma\upsilon\nu f(x) + c$

Αναλόγως σκεφτόμαστε για οποιαδήποτε άλλη σύνθετη βασίζεται στον προηγούμενο πίνακα.

Ιδιότητες παραγουσών

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

i) Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ και

ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

- Όπως σκεφτόμαστε την παραγώγιση αντίστροφα, το ίδιο κάνουμε και με τους κανόνες της. Συνεπώς, αν :

$$\mathbf{f(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}$$

τότε, οι παράγουσες της f είναι της μορφής :

$$\mathbf{F(x) = g(x) \cdot h(x) + c}$$

- Αναλόγως, αν :

$$\mathbf{f(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}}$$

τότε, οι παράγουσες της f είναι της μορφής :

$$\mathbf{F(x) = \frac{g(x)}{h(x)} + c}$$

- Από τις εφαρμογές του Θ.Μ.Τ. θυμίζουμε ότι, αν :

$$\mathbf{f'(x) = g'(x)}$$

για κάθε $x \in \Delta$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in \Delta$:

$$\mathbf{f(x) = g(x) + c}$$

<u>ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</u> $\boxed{f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}}$

1) ***Αν ο βαθμός του P(x) είναι μικρότερος από τον βαθμό του Q(x)***

i) ***εξετάζουμε αν f(x) είναι της μορφής*** $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ οπότε θα έχει παράγουσες τις συναρτήσεις: $F(x)= \ln|g(x)|+c$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Αν $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+10}$ τότε $f(x)=\frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+10}=\frac{1}{2}\frac{(x^2+2x+10)'}{x^2+2x+10}$ οπότε θα έχει παράγουσες τις συναρτήσεις: $F(x) =\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+10|+c$.

ii) ***Αν*** το **Q(x) έχει την μορφή $Q(x)=\alpha(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$** , τότε το κλάσμα γράφεται :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\rho_1)}+\frac{B}{(x-\rho_2)}+\cdots+\frac{K}{(x-\rho_\nu)}$$

Το κλάσμα τότε μετατρέπεται σε άθροισμα κλασμάτων των οποίων οι παράγουσες υπολογίζονται όπως στο ***παράδειγμα:***

(ι) $$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$$

Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{2,3\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}.$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε να ισχύει

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{2,3\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε τελικά:

$$(A+B-2)x=3A+2B+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{2,3\}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2,3\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A+B-2=0 \\ 3A+2B+1=0 \end{cases} \text{ ή, ισοδύναμα, } \begin{cases} A=-5 \\ B=\ \ 7 \end{cases}.$$

Επομένως,

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}$$

και $F(x)=-5\ln|x-2|+7\ln|x-3|+c$.

2) ***Αν ο βαθμός του P(x) είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του Q(x)*** τότε κάνουμε την διαίρεση P(x):Q(x) και αν π(x) είναι το πηλίκο και υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης, γράφουμε:

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\pi(x)+\dfrac{\upsilon(x)}{Q(x)}$, οπότε υπολογίζουμε τις παράγουσες των π(χ) και $\dfrac{\upsilon(x)}{Q(x)}$.

Οι παράγουσες της $\varphi(\chi)=\dfrac{\upsilon(x)}{Q(x)}$ υπολογίζονται όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

(ΙΙ) $f(x)=\dfrac{\boldsymbol{x^2-3x+7}}{\boldsymbol{x^2-5x+6}}$

Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου x^2-3x+7 με το πολυώνυμο x^2-5x+6, βρίσκουμε ότι

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}=1+\frac{2x+1}{x^2-5x+6}.$$

Επομένως,

$$f(x)=\frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}=1+\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=1+\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3} \qquad \text{(λόγω του (Ι))}.$$

και $F(x)=x-5\ln|x-2|+7\ln|x-3|+c$