Γθετ-οικ

Ασκήσεις

1) Να λυθεί η ανίσωση : $x^3+x<2-\ln x$.

2) Αν η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η ανίσωση :

$$2\left(x^2-3x+2\right)>\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right].$$

3) Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1{,}6)$ και $\mathrm{B}(2{,}3)$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x^2-17)-4\right)<3$.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x-1$

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων : $g(x)=\ln f(x)$ και $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

iv. Να δείξετε ότι $xf(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$.

v. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(x+5)>f(x+3)+f(x+7)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. Αν f,g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

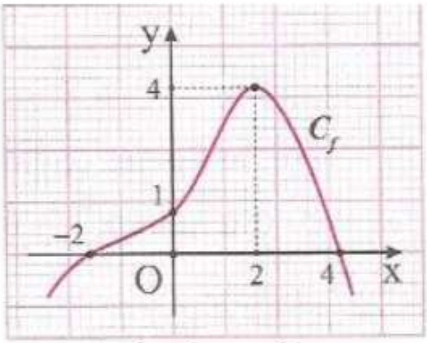
ii. Αν f,g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσες.

6) Έστω δυο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα , να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=f(-2x+3)$.

7) Δίνεται η συνάρτηση : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+e^{f(x)}+x-1=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ του παρακάτω σχήματος.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
ii. Να βρείτε τα ακρότατα.
iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας.
iv. Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)\geq 0$.
v. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.
vi. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
vii. Να δείξετε ότι : $f(x)\leq 4$ για κάθε $x\in\Re$.
viii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=4$ και την ανίσωση : $f(x)<4$.
ix. Να λύσετε την εξίσωση : $4+(x-2)^2=f(x)$
x. Να λύσετε την εξίσωση : $f(\alpha)+f(e^{\beta})=8$.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2f(x)=3e^{2-x}-5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι είναι «1-1».

10) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
$f^3(x)+f(f(x))=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3+x)-f(4-x)=0$.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει :
$f^3(x)+3f(x)+x-2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨
ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

12) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2, & x\le 1 \\ 3-2x, & x>1 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^5+x+3$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}\left(f(x^2-3)-4\right)>0$

14) Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ισχύει $(f\circ g)(x)=x$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. να δείξετε ότι η g είναι «1-1»
ii. να λύσετε την εξίσωση $g(x+1)=g(x^2+1)$.

15) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+e^x-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την εξίσωση : $e^x=1-x$.
iii. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $g(x)+e^{g(x)}=2x+1$.

   Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
iv. Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$.
v. Να λύσετε την ανίσωση $(g\circ f)(x)>0$.