

## ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### ΟΡΙΣΜΟΣ 1<sup>ος</sup>:

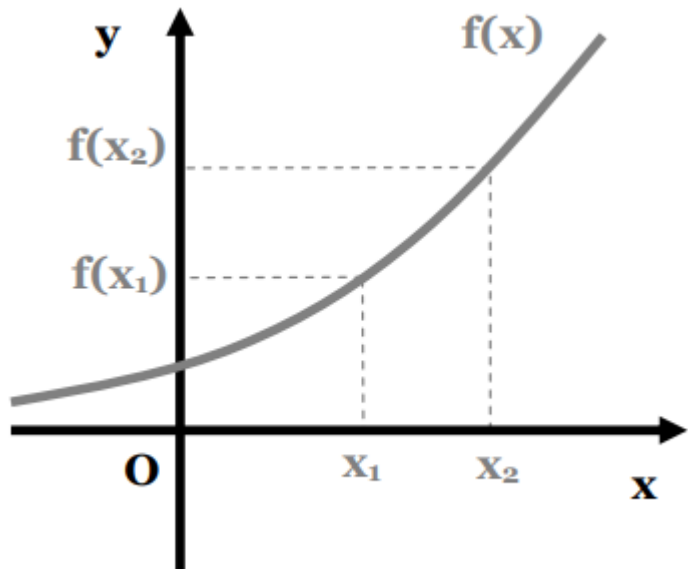
Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) < f(x_2)$

**ΣΧΟΛΙΟ:** Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση συμβολίζεται για συντομία ↗

Αυτό που, με απλά λόγια, συμβαίνει σε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι ότι οι τιμές του  $x$ , καθώς κι εκείνες της  $f(x)$ , μεταβάλλονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο:

Καθώς αυξάνονται οι τιμές του  $x$  αυξάνονται και οι αντίστοιχες τιμές του  $y = f(x)$  ή καθώς μειώνεται το ένα, μειώνεται και τ' άλλο.



### ΟΡΙΣΜΟΣ 2<sup>ος</sup>:

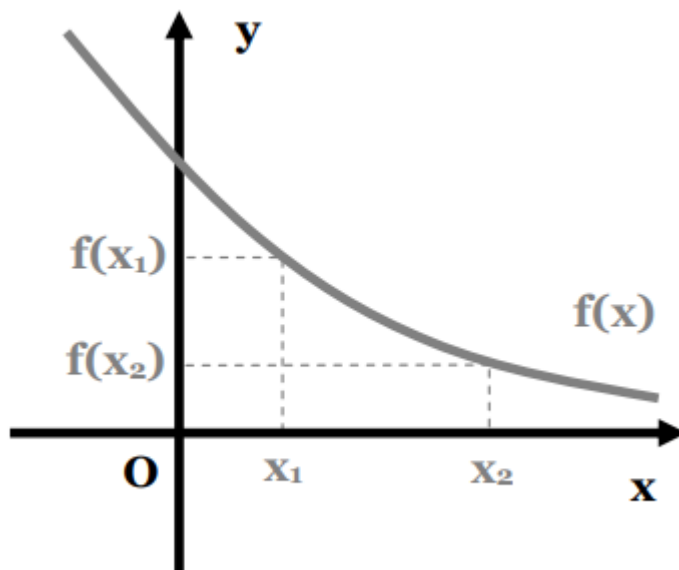
Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) > f(x_2)$

**ΣΧΟΛΙΟ:** Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση συμβολίζεται για συντομία ↘

Αυτό που, με απλά λόγια, συμβαίνει σε μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι ότι οι τιμές του  $x$ , καθώς κι εκείνες της  $f(x)$ , μεταβάλλονται με ακριβώς αντίστροφο τρόπο:

Καθώς αυξάνονται οι τιμές του  $x$  ελαττώνονται και οι αντίστοιχες τιμές του  $y = f(x)$  ή καθώς μειώνεται το ένα, αυξάνεται και τ' άλλο.



## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

### 1. Μελέτη Μονοτονίας με τον ορισμό

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ .
- Με κατάλληλες πράξεις πρέπει να «κατασκευάσουμε», βήμα-βήμα, και στα δύο μέλη τον τύπο της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων. Δηλ. κατασκευάζουμε την ανισότητα μεταξύ των  $f(x_1)$  και  $f(x_2)$
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα  $f(x_1) < f(x_2)$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα  $f(x_1) > f(x_2)$  τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

❖ Για **παράδειγμα**, η  $f(x) = -2x + 5$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Πράγματι: Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , με  $x_1 < x_2$ . Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

❖ Επίσης η συνάρτηση  $f(x) = 5x - 9$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , με  $x_1 < x_2$ . Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \Rightarrow 5x_1 - 9 < 5x_2 - 9 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

## ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενικά γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax + \beta$  είναι μια ευθεία.

Για τη μονοτονία της συνάρτησης αυτής ισχύει ότι :

- Αν  $\alpha > 0$  η  $f(x) = ax + \beta$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$
- Αν  $\alpha < 0$  η  $f(x) = ax + \beta$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$
- Αν  $\alpha = 0$  η  $f(x) = 0x + \beta \Leftrightarrow f(x) = \beta$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$

### ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Αν πρόκειται για την παραβολή  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ , με κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$  τότε:

- Αν  $\alpha > 0$  :

$f(x)$   $\searrow$  στο διάστημα  $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$  και  $\nearrow$  στο  $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ .

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η συνάρτηση «στρέφει τα κοίλα άνω».

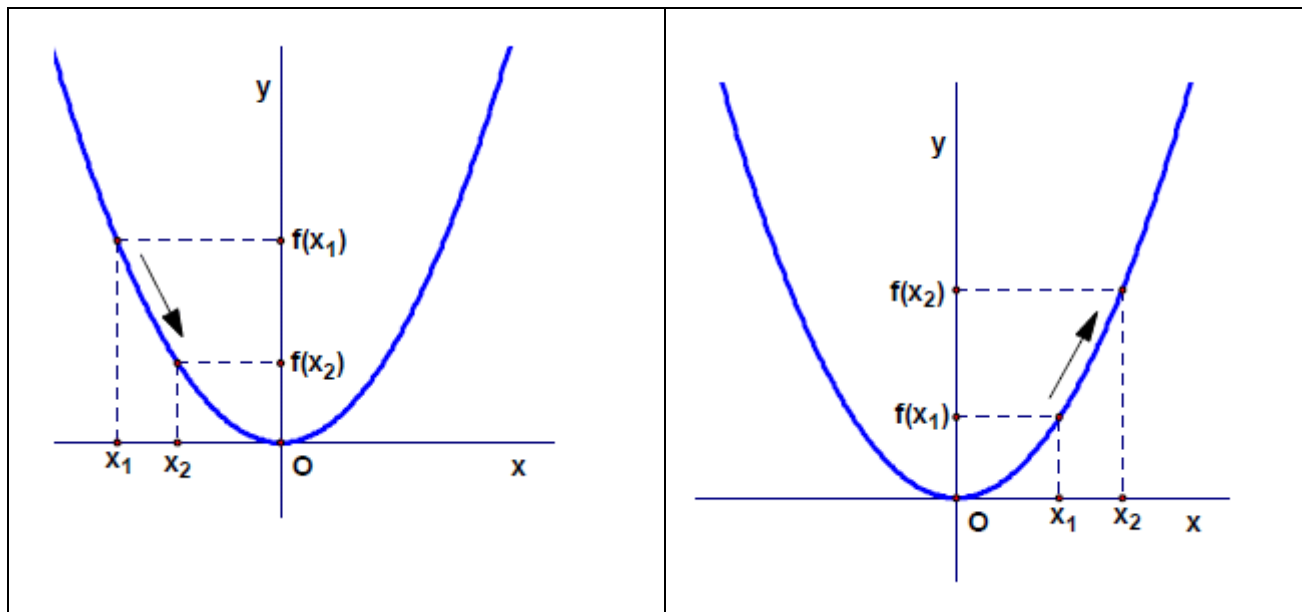
- Αν  $\alpha < 0$  :

$f(x)$   $\nearrow$  στο διάστημα  $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$  και  $\searrow$  στο  $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ .

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η συνάρτηση «στρέφει τα κοίλα κάτω».

## ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Γραφική παράσταση των  $f(x) = x^2$  και διαστήματα μονοτονίας.



### ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

#### ΟΡΙΣΜΟΣ 1<sup>ος</sup>:

Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ , λέμε ότι παρουσιάζει **στο  $x_0 \in A$**  (ολικό) **μέγιστο** όταν, για κάθε  $x \in A$ :  $f(x) \leq f(x_0)$ .

#### ΟΡΙΣΜΟΣ 2<sup>ος</sup>:

Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ , λέμε ότι παρουσιάζει **στο  $x_0 \in A$**  (ολικό) **ελάχιστο** όταν, για κάθε  $x \in A$ :  $f(x) \geq f(x_0)$ .

**ΣΧΟΛΙΟ:** Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης ονομάζονται, με μια λέξη, (ολικά) **ακρότατα** της συνάρτησης.

#### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

Για την εύρεση (εφόσον υπάρχει) της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης, ένας τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από μια ανισοτική σχέση, η οποία είναι προφανής (πχ.  $x^2 \geq 0$ ) και στη συνέχεια να «κατασκευάσουμε», βήμα-βήμα, σ' ένα απ' τα δύο μέλη τον τύπο της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

## ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ειδικά:

Αν πρόκειται για την παραβολή  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ , με κορυφή το σημείο με συντεταγμένες  $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$  τότε:

- Αν  $\alpha > 0$ :

Η  $f(x)$  παρουσιάζει (ολικό) **ελάχιστο** στο σημείο  $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$

το  $f(x_0) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ .

- Αν  $\alpha < 0$ :

Η  $f(x)$  παρουσιάζει (ολικό) **μέγιστο** στο σημείο  $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$  το

$f(x_0) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ .

