

**5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ**

1. Ο  $n^{\text{ος}}$  όρος μιας ακολουθίας είναι:  $a_n = 3^{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ . Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τους  $a_1$  και  $\lambda$ .
2. Έστω η ακολουθία  $(a_n)$  με  $a_1 = 2$  και ισχύει  $a_{n+1} = 3a_n$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ . Να δείξετε ότι η ακολουθία  $(a_n)$  είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το λόγο.
3. Στις παρακάτω γεωμετρικές προόδους να βρείτε τον  $n^{\text{o}}$  και τον  $5^{\text{o}}$  όρο.
  - i. 2, -6, 18, .....
  - ii. -4, 2, -1, .....
4. Αν μια γεωμετρική πρόοδος έχει  $1^{\text{o}}$  όρο το  $-\frac{2}{3}$  και  $4^{\text{o}}$  όρο το 18, να βρείτε τον λόγο της προόδου και τον  $a_8$ .
5. Να βρείτε τον όρο της γεωμετρικής προόδου: 2, -16, 18, ..... που είναι ίσος με -486.
6. Να βρείτε τον τελευταίο όρο της γεωμετρικής προόδου: -486, -162, -54, ..... που δεν υπερβαίνει το -1.
7. Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου: 18, 6, 2, ..... που είναι μικρότερος του  $\frac{2}{81}$ .
8. Να βρείτε το  $x$  ώστε οι αριθμοί:  $5x - 9$ ,  $2x + 3$ ,  $3x - 1$  να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
9. Αν οι αριθμοί:  $3x - 2$ ,  $2 - 3x$ ,  $x - 1$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να βρείτε το  $x$ .
10. Να δείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  οι αριθμοί:  $x + 2$ ,  $2x + 1$ ,  $x - 5$  δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
11. Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων των προόδων:
  - i. 2, 6, 18, .....
  - ii.  $-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$  .....
12. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
  - i.  $-80 + 40 - 20 + \dots + \frac{5}{8}$
  - ii.  $18 - 6 + 2 - \dots + \frac{2}{81}$
13. Στη γεωμετρική πρόοδο: -2, 6, -18, ..... να βρείτε το πλήθος των πρώτων όρων που έχουν άθροισμα -122.
14. Να λυθεί η εξίσωση:  $1 - x + x^2 - \dots - x^{11} = 0$ .
15. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι  $a_1 = 5$ ,  $\lambda = 2$  και  $S_n = 315$  να βρείτε το  $n$  και τον  $a_n$ .
16. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι  $a_n = -54$ ,  $\lambda = -3$  και  $S_n = -40$  να βρείτε τους  $a_1$  και  $n$ .
17. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
  - i.  $S = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^3 + \dots + 100 \cdot 4^{99}$
  - ii.  $S = 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \dots + 49 \cdot 4^{24}$
18. Να βρείτε 3 αριθμούς ώστε να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα -3.
19. Μεταξύ των αριθμών 1 και 256 να παρεμβάλετε 3 άλλους αριθμούς ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

## Κεφάλαιο 5ο - Πρόοδοι

20. Ένας αγόρασε έναν υπολογιστή αξίας 1.500€. Έδωσε προκαταβολή 719€ και το υπόλοιπο ποσό συμφώνησε να το εξοφλήσει σε 5 δόσεις όπου το ποσόν της κάθε δόσης θα είναι τα  $\frac{4}{3}$  του ποσού της προηγούμενης δόσης. Να βρείτε το ποσό της 4<sup>ης</sup> δόσης.
21. Ένα μπαλάκι του τένις πέφτει από ένα τραπέζι που έχει ύψος 64cm και αναπηδά στο δάπεδο χάνοντας κάθε φορά το  $\frac{1}{4}$  του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης.
- Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει μετά την 3<sup>η</sup> αναπήδηση.
  - Να βρείτε την πρώτη αναπήδηση που το μπαλάκι δεν θα ξεπεράσει την απόσταση  $\frac{9781}{16}$  cm από το τραπέζι.
22. Ένας ξεκίνησε να διαβάζει ένα βιβλίο την Δευτέρα και το τελείωσε μέσα σε έξι μέρες το Σάββατο. Την Δευτέρα και την Τρίτη διάβασε 15 σελίδες την ημέρα. Την Τετάρτη 32 σελίδες και κάθε επόμενη μέρα τα  $\frac{3}{2}$  της προηγούμενης μέρας.
- Πόσες σελίδες διάβασε το Σάββατο;
  - Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο;
23. Ένα μηχάνημα κοστίζει σήμερα 200.000€. Αν μετά από κάθε χρόνο χάνει το  $\frac{1}{10}$  της αξίας που είχε τον προηγούμενο χρόνο να βρείτε:
- Την αξία του μηχανήματος μετά από ένα χρόνο.
  - Την αξία του μηχανήματος μετά από πέντε χρόνια.
24. Μια κοινωνία βακτηριδίων υποδιπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 2.048 βακτηρίδια να βρείτε πόσα θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες.
25. Παρατηρήθηκε ότι η ποσότητα του πετρελαίου που διαρρέει προς τη θάλασσα από ένα βυθισμένο δεξαμενόπλοιο διπλασιάζεται κάθε μέρα (λόγω αύξησης του ρήγματος που προκάλεσε η διαρροή). Το πετρέλαιο που διέρρευσε κατά τη διάρκεια της πρώτης μέρας ήταν 20 τόνοι.
- Πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν κατά τη διάρκεια της 7<sup>ης</sup> ημέρας;
  - Πόσοι τόνοι θα διαρρεύσουν συνολικά κατά τις 7 πρώτες ημέρες;
  - Αν η διαρροή σταματήσει στο τέλος της 7<sup>ης</sup> ημέρας και το κόστος καθαρισμού του πετρελαίου είναι 3.000€ ανά τόνο, πόσο θα στοιχίσει ο καθαρισμός της θάλασσας από τη ρύπανση που προκάλεσε το δεξαμενόπλοιο;