

34493. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

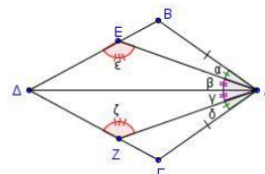
β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

34511. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να

αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες



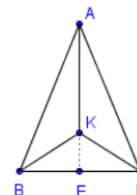
34773. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα BAK και KAG είναι ίσα.

ii. η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$.

γ) Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.



36099. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ παίρνουμε

αντίστοιχα τμήματα $AL = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα BL και GE είναι ίσα.

β) τα τρίγωνα BLM και $ME\Gamma$ είναι ίσα.

γ) το τρίγωνο LEM είναι ισοσκελές.

36100. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $AL = BM$. Να αποδείξετε ότι:

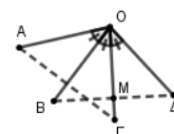
α) το τρίγωνο KLM είναι ισοσκελές.

β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου KLM .

36104. Δίνεται γωνία $\chi O \gamma$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες $O\chi$ και $O\gamma$ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MA = MB$

β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB .



36110. Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι $\hat{A}\hat{O}B = \hat{B}\hat{O}\Gamma = \hat{\Gamma}\hat{O}\Delta$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $A\Gamma = B\Delta$

β) το M είναι μέσο του $B\Delta$, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$.

36170. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AE = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$

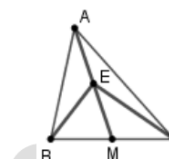
β) $B\Delta = \Gamma E$

γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$

36333. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2BE$, να αποδείξετε ότι:

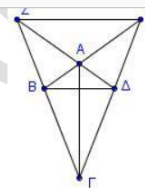
α) $A\hat{E}B = E\hat{M}\Gamma$.

β) $AB = E\Gamma$.



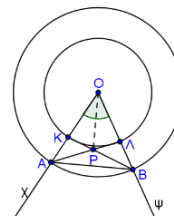
14880. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB , να αποδείξετε ότι:

- α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.
- β) $\Gamma Z = \Gamma E$.
- γ) $EZ \parallel B\Delta$.



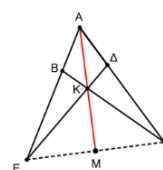
37095. Δίνεται οξεία γωνία $xO\psi$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την $O\psi$ στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $A\Lambda = BK$.
- β) Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των $A\Lambda, BK$.
- γ) Η OP διχοτομεί τη γωνία $xO\psi$.



37124. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = \Delta E$.
- β) $BK = K\Delta$.
- γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .
- δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

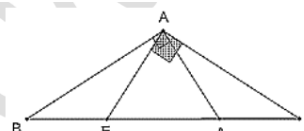


12069. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε στην πλευρά AB σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 2A\Delta$, και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E , ώστε $E\Gamma = 2AE$. Το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τμήματα ΔB και $E\Gamma$ είναι ίσα.
 - ii. Το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- β) Αν P το σημείο τομής των τμημάτων BE και $\Gamma\Delta$ να δείξετε ότι:
 - i. Οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες.
 - ii. Το τμήμα PM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{P}\Gamma$.

13533. Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
- β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- γ) $BE = \Gamma\Delta$.



34496. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
- β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

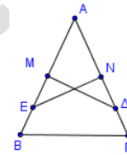
34497. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
- β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

36329. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

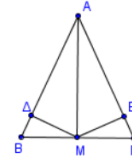
Να αποδείξετε ότι:

- α)** Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$.



36330. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

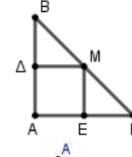
- α)** Αν είναι $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.
β) Αν είναι $AB = A\Gamma$ και M το μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.



36331. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

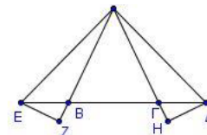
Να αποδείξετε ότι:

- α)** Αν $M\Delta = ME$ τότε:
i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα.
ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.



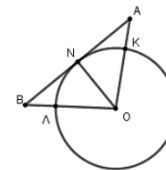
36332. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $A\Delta = AE$ **β)** $EZ = \Delta H$



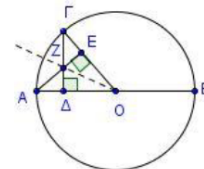
36344. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.
β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.



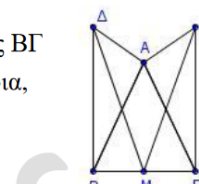
36345. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.
β) Η OZ διχοτομεί τη γωνία $AO\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου $A\Gamma$.

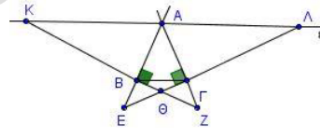


37012. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$ τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α)** τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα.
β) $A\Delta = AE$.



1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στη πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στη πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E .

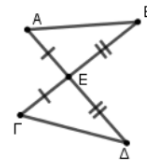


α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ = AE$ ii. $AK = AL$

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ, EL . Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

13839. Τα ευθύγραμμα τμήματα AD και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E έτσι ώστε $AE = GE$ και $BE = ED$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΓDE είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EH και $E\Theta$ του σημείου E από τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, είναι ίσες.

γ) Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Gamma\Delta$ προς τα A και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

37094. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

34424. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

β) Οι γωνίες $A\hat{I}B$ και $A\hat{I}\Gamma$ είναι ίσες.

γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

34503. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο DE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

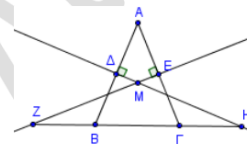
α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

34507. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα H και Z .

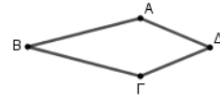
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $E\Gamma Z$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.



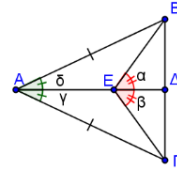
34514. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι:

- α) $BA\Gamma = B\Gamma A$.
- β) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.



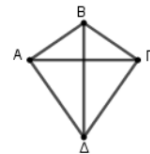
34516. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

- α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.
- β) Το τρίγωνο $ΓEB$ είναι ισοσκελές.
- γ) Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.



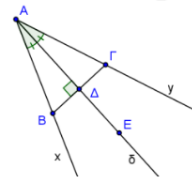
36102. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.
- β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.



36341. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

- α) $AB = A\Gamma$.
- β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .



13854. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE των γωνιών B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο O .

- α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- β) Από τα σημεία E και Δ φέρνουμε κάθετες $ΕΛ$ και ΔK στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι: $\Delta K = ΕΛ$.
- γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ που η απόστασή του από το σημείο E να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και K αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



37823. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A\Gamma = B\Gamma$). Η μεσοκάθετη ϵ της $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του B) στο σημείο M και την $A\Gamma$ στο Z . Στην προέκταση της $M\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = BM$.

- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β) Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $\Gamma B M$ είναι ίσα.
- γ) Να δειχτεί ότι το τρίγωνο $A M E$ είναι ισοσκελές.

