**ΜΑΘΗΜΑΤΙΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

2024-2025

**ΘΕΩΡΙΑ Γ λυκείου**

**Γκουντρουμάνης Αλέξανδρος**

**ΑΝΑΛΥΣΗ**

1. **Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση**

Έστω *Α* ένα υποσύνολο τουR. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το *Α***μια διαδικασία (κανόνα) *f* , με την οποία κάθε στοιχείο  αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό *y*. Το *y* ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x***και συμβολίζεται με .

1. **Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f;**

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της *f* σε όλα τα , λέγεται **σύνολο τιμών** της *f* και συμβολίζεται με . Είναι δηλαδή:  για κάποιο .

1. **Τι ονομάζεται Γραφική παράσταση συνάρτησης**

Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *Α* και  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων  για τα οποία ισχύει , δηλαδή το σύνολο των σημείων , , λέγεται **γραφική παράσταση** της *f* και συμβολίζεται συνήθως με .

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).



Όταν δίνεται η γραφική παράσταση  μιας συνάρτησης *f*, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της *f* είναι το σύνολο *Α* των τετμημένων των σημείων της .

β) Το σύνολο τιμών της *f* είναι το σύνολο  των τεταγμένων των σημείων της .

γ) Η τιμή της *f* στο  είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας  και της  (Σχ. 8).



Όταν δίνεται η γραφική παράσταση , μιας συνάρτησης *f* μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  και .



α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης  είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα , της γραφικής παράστασης της *f*, γιατί αποτελείται από τα σημεία  που είναι συμμετρικά των , ως προς τον άξονα . (Σχ. 9).

β) Η γ.π της f(x)+c είναι μετατοπισμένη η γ.π της f(x) κατά c μονάδες προς τα πάνω στον άξονα y΄y. Ενώ Η γ.π της f(x)-c είναι μετατοπισμένη η γ.π της f(x) κατά c μονάδες προς τα κάτω στον άξονα y΄y.

γ) Η γ.π της f(x+c) είναι μετατοπισμένη η γ.π της f(x) κατά c μονάδες προς τα αριστερά στον άξονα x΄x. Η γ.π της f(x-c) είναι μετατοπισμένη η γ.π της f(x) κατά c μονάδες προς τα δεξιά στον άξονα x΄x.



δ) Η γραφική παράσταση της  αποτελείται από τα τμήματα της  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα , των τμημάτων της  που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).

***Μερικές βασικές συναρτήσεις***

Οι γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων, τις οποίες γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.

**Η πολυωνυμική συνάρτηση **

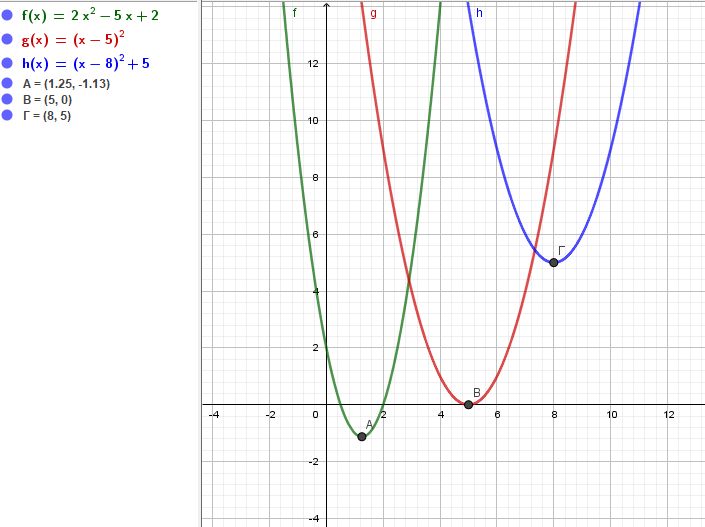


**Η πολυωνυμική συνάρτηση , .**

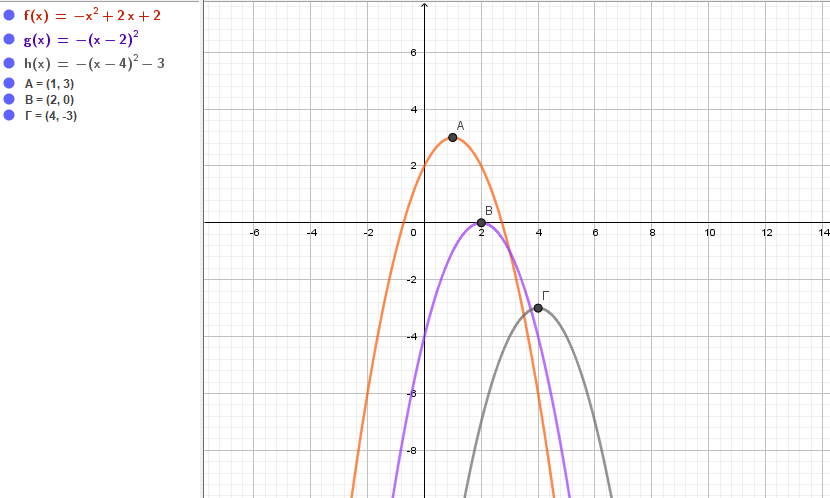


**Η πολυωνυμική συνάρτησηf(x)=αx2+βx+γ, .**

Όταν α>0 η γραφική παράσταση έχει ελάχιστο στο σημείο A(-β/2α ,-Δ/4α).



Όταν α>0 η γραφική παράσταση έχει μέγιστο στο σημείο A(-β/2α ,-Δ/4α).



**Η πολυωνυμική συνάρτηση , .**



**Η ρητή συνάρτηση , .**



**Οι συναρτήσεις , .**



Επειδή , η γραφική παράσταση της  αποτελείται από δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της  και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα .

**Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις : , , **



Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις  και  είναι περιοδικές με περίοδο , ενώ η συνάρτηση  είναι περιοδική με περίοδο .

**Η εκθετική συνάρτηση , .**



Υπενθυμίζουμε ότι:

**αν , τότε:**

ενώ

**αν , τότε:** .

**Η λογαριθμική συνάρτηση , **



Υπενθυμίζουμε ότι:

**1)  4) **

**2)  και  5) **

**3)  και  6) **

**7) αν , τότε: **

ενώ

**αν , τότε :.**

**8) , αφού .**

1. **Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες.**

Δύο συναρτήσεις *f* και *g* λέγονται **ίσες** όταν:

• έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού *Α* και

• για κάθε  ισχύει .

1. **Ορίζουμε ως άθροισμα , διαφορά , γινόμενο  και πηλίκο  δύο συναρτήσεων *f*, *g* τις συναρτήσεις με τύπους**







.

**Το πεδίο ορισμού** των ,  και  είναι η **τομή** των πεδίων ορισμού *Α* και *Β* των συναρτήσεων *f* και *g* αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της  είναι το **, εξαιρουμένων των τιμών του *x* που μηδενίζουν τον παρονομαστή **, δηλαδή το σύνολο και , με .

1. **Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g.**

*Αν f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  *Α*, *Β* αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της *f* με την *g***, και τη συμβολίζουμε με , τη συνάρτηση με τύπο



****

**Το πεδίο ορισμού της ** αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της *f* για τα οποία το  ανήκει στο πεδίο ορισμού της *g*. Δηλαδή είναι το σύνολο

.

Είναι φανερό ότι η  ορίζεται αν , δηλαδή αν .

ΣΧΟΛΙΑ

**•**Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε **ότι **. Γενικά, αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  και , τότε αυτές *δ ε ν ε ί ν α ι υ π ο χ ρ ε ω τ ι κά* ίσες.

• Αν  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η , τότε ορίζεται και η  και ισχύει.

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των *f*, *g* και *h* και τη συμβολίζουμε με . Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

1. **Πότε μια συνάρτηση λέγεται ‘γνησίως αύξουσα συνάρτηση” και πότε “γνησίως φθίνουσα συνάρτηση” .**

Μια συνάρτηση *f* λέγεται[[1]](#footnote-2)(1) :

**• γνησίως αύξουσα** σ’ ένα *δ ι ά σ τ η μ αΔ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  με  ισχύει:  (Σχ. α)

**• γνησίως φθίνουσα** σ’ ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  με  ισχύει:  (Σχ. β)



1. **Τι ονομάζουμε “μέγιστο”, “ελάχιστο”, συνάρτησης**

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού *Α* θα λέμε ότι:

• Παρουσιάζει στο  (ολικό) **μέγιστο**, το , όταν

 για κάθε  (Σχ. 27α)

• Παρουσιάζει στο  (ολικό) **ελάχιστο**, το , όταν

 για κάθε  (Σχ. 27β).



1. **Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1**

Μια συνάρτηση  λέγεται **συνάρτηση **, όταν για οποιαδήποτε  ισχύει η συνεπαγωγή:

αν , τότε .

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση  είναι **συνάρτηση **, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  ισχύει η συνεπαγωγή:

αν , τότε .

ΣΧΟΛΙΑ

• Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση *f* είναι , αν και μόνο αν:

* Για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών της η εξίσωση  έχει ακριβώς μια λύση ως προς *x*.
* Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της *f* το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).
*  
* 
* • Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση . Έτσι, οι συναρτήσεις , , , , ,  και , , είναι συναρτήσεις . Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι  αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση  (Σχ. 34).

1. **Αντίστροφη συνάρτηση**

**Ορισμός**

Έστω μια συνάρτηση . Τότε για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών, f(A) της fυπάρχει μοναδικό στοιχείο *x* του πεδίου ορισμού της *Α* για το οποίο ισχύει . Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση  με την οποία κάθε  αντιστοιχίζεται στο μοναδικό  για το οποίο ισχύει . Η *g* λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται μεf-1.Επομένως έχουμε



Οπότε ισχύουν και .

**Για παράδειγμα**, έστω η εκθετική συνάρτηση . Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι  με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το . Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  της f. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

* έχει πεδίο ορισμού το 
* έχει σύνολο τιμών τοRκαι
* αντιστοιχίζει κάθε  στο μοναδικό για το οποίο ισχύει . Επειδή όμως

****

θα είναι . Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης , , είναι η λογαριθμική συνάρτηση . Συνεπώς

**και **

1. **Όριο συνάρτησης στο xo.**

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό , καθώς το *x* προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό , τότε γράφουμεκαι διαβάζουμε

“το όριο της , όταν το *x* τείνει στο , είναι ” ή

“το όριο της  στο  είναι ”.

****

**ΣΧΟΛΙΟ**

**Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:**

Για να αναζητήσουμε το όριο της *f* στο , πρέπει η *f* να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο ”, δηλαδή η *f* να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής** ή  ή .**

**Το xoμπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ’ αυτό (Σχ. 39γ).**

Η τιμή τηςf στο**xo** όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο**xo** (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

ΟΡΙΣΜΟΣ\*

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής . Θα λέμε ότι η *f* έχει στο  όριο, όταν για κάθε  υπάρχει  τέτοιος, ώστε για κάθε , με , να ισχύει:

Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

|  |
| --- |
| (α)  (β) |

Αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής , τότε ισχύει η ισοδυναμία:

****

***Όριο και διάταξη***

Για το όριο και τη διάταξη αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο**

1. Αν , τότε  κοντά στο  (Σχ. 48α)
2. Αν , τότε  κοντά στο  (Σχ. 48β)

****

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο**

Αν οι συναρτήσεις  έχουν όριο στο  και ισχύει  κοντά στο , τότε



****

# Όρια και πράξεις

Τα δύο βασικά όρια , και το θεώρημα που ακολουθεί διευκολύνουν τον υπολογισμό των ορίων.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

**Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων *f* και *g* στοxo τότε:**

1. 

2. , για κάθε σταθερά 

3. 

4. , εφόσον 

5. 

6. , εφόσον  κοντά στο .

Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι: και  όπου .

# Κριτήριο παρεμβολής

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω οι συναρτήσεις . Αν

       • κοντά στο  και

       •,Τότε.

Για παράδειγμα, .Πράγματι, για  έχουμε

, Δηλαδή .

Επειδή , σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε:

.

***Tριγωνομετρικά όρια***

Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι:

|  |
| --- |
| , για κάθε xεR  (η ισότητα ισχύει μόνο όταν ) |

Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας και του κριτηρίου παρεμβολής θα αποδείξουμε ότι:

|  |
| --- |
| •   • |

**1.**

|  |
| --- |
| • α)  •β) |

**2.**

## Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέραμε μέχρι τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το , της σύνθετης συνάρτησης  στο σημείο , τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε .

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το .

Αποδεικνύεται ότι, αν  κοντά στο , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με , δηλαδή ισχύει:.

**Μη πεπερασμένο όριο στο xo**

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που **ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής ,** ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:



.

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

•Αν , τότε  κοντά στο , ενώ

αν , τότε  κοντά στο .

•Αν , τότε  , ενώ

αν , τότε .

•Αν  ή , τότε .

•Αν  και  κοντά στο , τότε , ενώ αν  και  κοντά στο , τότε .

•Αν  ή , τότε .

•Αν , τότε .

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

 και γενικά , νε Ν

 και γενικά ,νε Ν

 και γενικά , νε Ν

**Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα** παρακάτω θεωρήματα:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Αν στο *x*0∈R |  |  |  |  |  |  |
| το όριο της *f* είναι: | *α*∈R | *α*∈R |  | -∞ |  | -∞ |
| και το όριο της *g* είναι: |  | -∞ |  | -∞ | -∞ |  |
| τότε το όριο της  είναι: |  | -∞ |  | -∞ | ; | ; |

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Αν στο *x*0∈R, |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| το όριο της *f*  είναι: | *α>*0 | *α*<0 | *α*>0 | *α*<0 | 0 | 0 | +∞ | +∞ | -∞ | -∞ |
| και το όριο της *g*  είναι: | +∞ | +∞ | -∞ | -∞ | +∞ | -∞ | +∞ | -∞ | +∞ | -∞ |
| τότε το όριο της  *fg* είναι: | +∞ | -∞ | -∞ | +∞ | ; | ; | +∞ | -∞ | -∞ | +∞ |

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε.

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή**, απροσδιόριστες μορφές** για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

 και .

Επειδή  και , απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

,  και , .

**Όρια Συνάρτησης στο +∞**

και           , 

        και, .

****

## Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

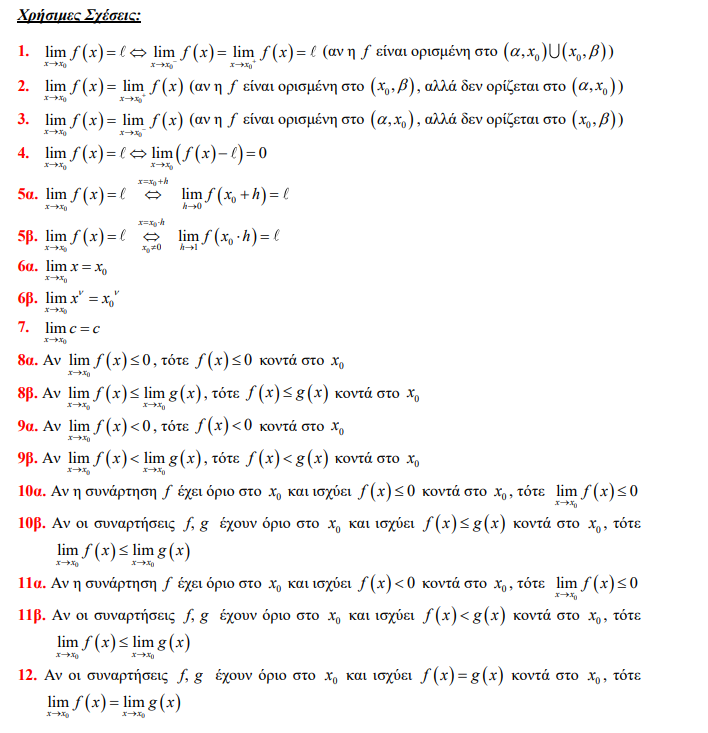
• Αν  (Σχ. 60), τότε

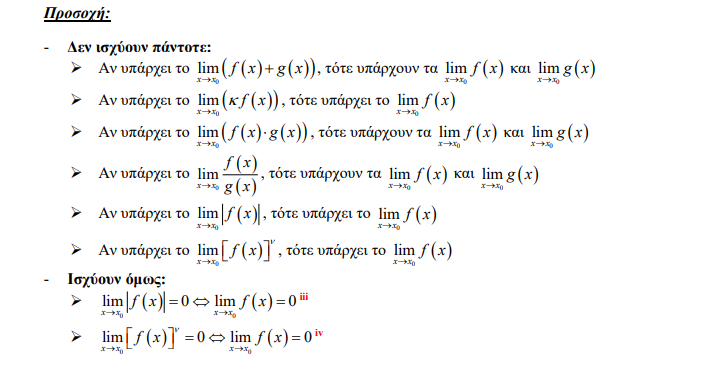
****

|  |
| --- |
| ,  , |

• Αν  (Σχ. 61), τότε

|  |
| --- |
| ,  , |

****

****

1. **Τι ονομάζουμε ακολουθία**

**Ακολουθία** ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση .

1. **Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στοxo**

Έστω μια συνάρτηση *f* και  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η *f* είναι **συνεχής στο **, όταν

#### Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο  και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν οι συναρτήσεις *f* και *g* είναι συνεχείς στο , τότε είναι συνεχείς στο **xo**και οι συναρτήσεις:, ,(cε R), , , και 

**με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει τοxο.**

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν η συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο **xo** και η συνάρτηση *g* είναι συνεχής στο , τότε η σύνθεσή τους  είναι συνεχής στο**xo.**

****

*Για παράδειγμα*, η συνάρτηση  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων  και .

1. **Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο Αf**

Μια συνάρτηση *f* θα λέμε ότι είναι **συνεχής** στο πεδίο ορισμού της , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Αf.

1. **Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α,β)**

Μια συνάρτηση *f* θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα**όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του .

1. **Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β]**

Μια συνάρτηση *f* θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα**όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  και επιπλέον

 και 

1. **Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano**

Έστω μια συνάρτηση *f* , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα . Αν:

* η *f* είναι συνεχής στο  και, επιπλέον, ισχύει
* ,

**τότε** υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  τέτοιο, ώστε .

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης  στο ανοικτό διάστημα .

1. **Να εξηγήσετε γεωμετρικά το Θ. Bolzano**

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης *f* στο .

Επειδή τα σημεία  και 



βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα ,

η γραφική παράσταση της *f* τέμνει τον άξονα

σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**ΣΧΟΛΙΟ**

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

* Αν μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ* και δε μηδενίζεται σ’ αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  ή είναι αρνητική για κάθε , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα *Δ*. (Σχ. 65)

****

* Μια συνεχής συνάρτηση *f* διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της *f* χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

****

Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της *f* για τις διάφορες τιμές του *x*. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της *f*.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της *f* στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της *f* στο αντίστοιχο διάστημα.

**19. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.**

Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα . Αν:

• η *f* είναι συνεχής στο  και

•

**τότε**, για κάθε αριθμό η μεταξύ των  και **υπάρχει** ένας, τουλάχιστον  τέτοιος, ώστε

1. **Να εξηγήσετε γεωμετρικά το Θ. Ενδιάμεσων Τιμών**

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης *f* στο .

****

Επειδή τα σημεία  και 

έχουν διαφορετικές εικόνες, θα υπάρχει μια ευθεία η, που ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης [f(α),f(β)], που θα τέμνει τουλάχιστον μια φορά την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

**• Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:**

**Η εικόνα  ενός διαστήματος *Δ* μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης *f* είναι διάστημα.**

****

****

Στην ειδική περίπτωση που το *Δ* είναι ένα κλειστό διάστημα , ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

1. **Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής**

Αν *f* είναι συνεχής συνάρτηση στο , τότε η *f* παίρνει στο  μια μέγιστη τιμή *Μ* και μια ελάχιστη τιμή *m*.

Δηλαδή, υπάρχουν  τέτοια, ώστε, αν  και , να ισχύει **, για κάθε** .

**ΣΧΟΛΙΟ**

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης *f* με πεδίο ορισμού το  είναι το κλειστό διάστημα , όπου *m* η ελάχιστη τιμή και *Μ* η μέγιστη τιμή της.

• Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Aν μια συνάρτηση *f* είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα , όπου

 και .

Αν, όμως, η *f* είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα 

**ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

1. **Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της στο σημείο της Α;**

Έστω *f* μια συνάρτηση και  ένα σημείο της . Αν υπάρχει το  και είναι ένας πραγματικός αριθμός *λ*, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της  στο σημείο της *Α*, την ευθεία *ε* που διέρχεται από το *Α* και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο**επαφής** είναι.

1. **Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.**

**Μια συνάρτηση *f* λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο  του πεδίου ορισμού της,** αν υπάρχει τοκαι είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της *f* στο**  και συμβολίζεται με . Δηλαδή:.

1. **Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α;**

H *f* είναι παραγωγίσιμη στο *Α* ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο .

1. **Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα ;**

Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο .

1. **Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  ;**

Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο  και επιπλέον ισχύει

 και.

1. **Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f;**

Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α καιΑ1τo σύνολο των σημείων του Αστα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε στο , ορίζουμε τη συνάρτηση η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της *f*** ή απλά **παράγωγος της *f.***

1. **Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y=f(x), τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο**

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  συνδέονται με τη σχέση , όταν *f* είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του *y* ως προς το *x* στο σημείο **την παράγωγο.

1. **Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να το εξηγήσετε γεωμετρικά**

Αν μια συνάρτηση *f* είναι:

• συνεχής στο κλειστό διάστημα 

• παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  και

•

**τότε** υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  τέτοιο, ώστε:



**Γεωμετρικά**, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  στο  να είναι παράλληλη στον άξονα των *x*.

1. **Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής και να το εξηγήσετε γεωμετρικά**

Αν μια συνάρτηση *f* είναι:

• συνεχής στο κλειστό διάστημα  και

• παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα 

**τότε** υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  τέτοιο, ώστε:



**Γεωμετρικά**, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* στο σημείο  να είναι **παράλληλη** της ευθείας *ΑΒ*.

1. **Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει στο xo τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο.**

# ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *Α*,θα λέμε ότι παρουσιάζει στο **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει , τέτοιο ώστεγια κάθε

.Το  λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το **τοπικό μέγιστο της *f***.

# ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *Α*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει , τέτοιο ώστε, για κάθε .

Το  λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το **τοπικό ελάχιστο της *f***.

# ΣΧΟΛΙΑ

* Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



* Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β).
* Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

1. **Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ**

•Η συνάρτηση f λέμε ότι είναι **κυρτή ή ότι στρέφει τα κοίλα άνω** σ’ ένα διάστημα Δ όταν είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και η  είναι γνησίως αύξουσα στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ.

• Η συνάρτηση f λέμε ότι είναι**κοίλη** ή ότι στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** στο Δ, αν είναι συνεχής στο Δ και η  είναι γνησίως φθίνουσα στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ.

**Σχόλιο**

α) Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  (αντιστοίχως κοίλη χρησιμοποιούμε ).

β) Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ’ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “**κάτω**” (αντιστοίχως “**πάνω**”) από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

**12.** Η **μελέτη** μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με τη βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού κυρτής και κοίλης συνάρτησης και του θεωρήματος μονοτονίας.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

* Αν f ʹʹ(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
* Αν f ʹʹ(x) < 0 για κάθε εσωτερικό  σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Για παράδειγμα, η συνάρτηση f(x) = x3   (Σχ. 41), |  | | Εικόνα | |
| — είναι κοίλη στο  (−∞,0] , αφού  f ʹʹ = 6x < 0, για x ϵ (−∞,0) και η f είναι συνεχής στο  (−∞,0] ενώ, |
| — είναι κυρτή στο [0,+∞) , αφού  f ʹʹ = 6x > 0, για x ϵ (0,+∞) και η f είναι συνεχής στο [0,+∞). |
| **ΣΧΟΛΙΟ**  Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση  f(x) = x4  (Σχ. 42). Επειδή η f ʹ(x) = 4x3 είναι γνησίως αύξουσα στο **R**, η f(x) = x4 είναι κυρτή στο **R**. Εντούτοις, η f ʹʹ(x) δεν είναι θετική στο **R**, αφού f ʹʹ(0) = 0. | |  | | Εικόνα | |
|  | |

1. **Πότε το σημείο Α(xo,f(xo)) λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης.**

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του .Το σημείο  ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f, όταν:

• η f είναι κυρτή στο  και κοίλη στο , ή αντιστρόφως, και

• η  έχει εφαπτομένη στο σημείο .

**Σχόλιο**

* Όταν το  είναι σημείο καμπής της , τότε λέμε ότι η **fπαρουσιάζει στο  καμπή** και το  λέγεται **θέση σημείου καμπής**.
* **Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της**  **“διαπερνά” την καμπύλη.**

**14. Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης f;**

Αν το **είναι σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε**.**

*Σχόλιο*

*Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f ʹʹ είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής.*

**15. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;**

i)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η μηδενίζεται.**

ii)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η **.

|  |
| --- |
| Εικόνα |
|

**Μέθοδος-Κριτήριο**

**16. Πώς καταλήγουμε στο ποιες από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f αποτελούν τελικά σημεία καμπής τη**

Έστω μια συνάρτηση foρισμένη σ’ ένα διάστημα  και . Αν

• η  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του  και

• ορίζεται εφαπτομένη της  στο ,

**τότε** το  είναι σημείο καμπής της .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | *Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση* |  | *Εικόνα* | | *Εικόνα* | | *Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο****R****−{1} με* | | *Εικόνα* | |

|  |  |
| --- | --- |
| *Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:*   |  | | --- | | *Εικόνα* |   *Επειδή η f ʹʹ μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1,*  *οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2.*  *Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2*  *δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα,*  *ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο Ο(0,0) υπάρχει εφαπτομένη της Cf*  *και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα.*  *Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής*  *είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η f ʹʹ αλλάζει πρόσημο.* |

**17. Πότε λέμε ότι η ευθεία x=xoείναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf;**

Η ευθεία λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της Cf, αν ένα τουλάχιστον από τα όρια ,  είναι  ή .

**18. Πότε η ευθεία y=l λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο +∞,**

**(-∞)**

Η ευθεία  λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της Cf στο  (αντιστοίχως στο ), όταν  (αντιστοίχως .

**19. Πότε η ευθεία  λέγεται ασύμπτωτη της Cf στο , αντιστοίχως στο **

Η ευθεία  λέγεται **ασύμπτωτη** της Cf στο  (αντιστοίχως στο ), αν  (αντιστοίχως αν ).

**20. Με ποιες σχέσεις(τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής **

Η ευθεία  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο , αντιστοίχως στο , αν και μόνο αν και , αντιστοίχως: και .

**Χρήσιμα σχόλια**

1. Αποδεικνύεται ότι:

* ***Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.***
* ***Οι ρητές συναρτήσεις*** ***, με βαθμό του αριθμητή***  ***μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες****.*

1. **Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:**

* ***Στα άκρα των διαστημάτων*** *του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.(Κ.Α)*
* *Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f****δεν είναι συνεχής****.(Κ.Α)*
* *Στο* *,* *, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής* *, αντιστοίχως* *.(Π.Α-Ο.Α)*

**21.Να διατυπώσετε τους κανόνες deL’Hospital.**

**1oς Κανόνας:**

Αν , , ,σε περιοχή του με εξαίρεση ίσως το  και υπάρχει το  (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: .

**2oς Κανόνας:**

Αν , , , σε περιοχή του  με εξαίρεση ίσως το  και υπάρχει το  (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:.

**Σχόλια:**

*Ο 2ος κανόνας ισχύει και για τις μορφές , , . Οι παραπάνω κανόνες ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.*

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**22. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;**

**Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα** της **f**στο **Δ**  ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:, για κάθε .

**23. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα .**



Έστω μια συνάρτηση f**συνεχής** στο . Με τα σημεία  χωρίζουμε το διάστημα  σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους . Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα , για κάθε, και σχηματίζουμε το άθροισμα το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: . Το όριο του αθροίσματος , δηλαδή το  υπάρχει στο  και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων . Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με  και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β”. Δηλαδή, .

**Σχόλιο:**

* Το σύμβολο οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο ολοκλήρωσης**. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα).
* Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια της ολοκλήρωσης**.
* Η έννοια “όρια” εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου.
* Στην έκφραση  το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις ,  συμβολίζουν το **ίδιο** ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι **πραγματικός αριθμός**, σε αντίθεση με το  που είναι ένα **σύνολο συναρτήσεων**.

**Γεωμετρική ερμηνεία (ορισμένου ολοκληρώματος)**



Αν για κάθε , τότε το ολοκλήρωμα  δίνει το εμβαδόν  του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα  και τις ευθείες  και  (Σχ. 11). Δηλαδή,

|  |
| --- |
|  |

Αν , τότε .

**24. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος .**

**α)** Ισχύει ότι:

•

•

•Αν για κάθε , τότε .

**β)** Έστω **συνεχείς** συναρτήσεις στο  και . Τότε ισχύουν:

•

•και γενικά

•

**γ)**Αν η f είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ και , τότε ισχύει 



Σημείωση: Αν  και  (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι: 

**δ)**Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα . Αν  για κάθε  και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε.

**1.Όριο πολυωνυμικής στο x0∈**ℝ

Αν P(x) = ανxν + αν−1xν−1 + ... + α1x + α0 είναι πολυώνυμο του x και x0∈ℝ, τότε

**Απόδειξη**

 = 

= 

= 

= 

= P(x0)

**2.Όριο ρητής στο x0∈**ℝ

Έστω η ρητή συνάρτηση , όπου ,  πολυώνυμα του *x* και  με . Τότε,

**Απόδειξη**

 =  =  = 

**3.Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών και να το αποδείξετε**

Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα . Αν:

• η *f* είναι συνεχής στο  και

•

**τότε**, για κάθε αριθμό η μεταξύ των  και **υπάρχει** ένας, τουλάχιστον  τέτοιος, ώστε

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Ας υποθέσουμε ότι . Τότε θα ισχύει  . Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση , , παρατηρούμε ότι:

• η *g* είναι συνεχής στο  και

****

•,

αφού και.Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει  τέτοιο, ώστε , οπότε .

**4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f-1 είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί την τις γωνίες xοy και x΄ο y΄**

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Ας πάρουμε τώρα μια  συνάρτηση *f* και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις *C* και  των *f* και της  στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή,αν ένα σημείο  ανήκει στη γραφική παράσταση *C* της *f* , τότε το σημείο  θα ανήκει στη γραφική παράσταση  της  και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες  και .



Έτσι, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  και , , είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία .

**5. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.**

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για  έχουμε,

Οπότε,

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στοxo. Επομένως, , δηλαδή η *f* είναι συνεχής στοxo.

6.**Εστω η σταθερή συνάρτηση ,. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο και ισχύει , δηλαδή (c)΄=0**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, αν  είναι ένα σημείο του R, τότε για  ισχύει:

.Επομένως,,

δηλαδή .

1. **Έστω η συνάρτηση f(x)=x. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f΄(x)=1, δηλαδή (x)΄=1**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, αν  είναι ένα σημείο του R, τότε για  ισχύει:

.

Επομένως,,

δηλαδή .

1. **Έστω η συνάρτηση ,. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει , δηλαδή **

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, αν  είναι ένα σημείο του R, τότε για  ισχύει:

,

Οπότε,

δηλαδή .

1. **Έστω η συνάρτηση . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο και ισχύει , δηλαδή** 

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, αν  είναι ένα σημείο του , τότε για  ισχύει:,

Οπότε,

δηλαδή .

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

1. **Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο , τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο και ισχύει:** 

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Για , ισχύει:.

Επειδή οι συναρτήσεις  είναι παραγωγίσιμες στο , έχουμε:

Δηλαδή.

1. **Έστω η συνάρτηση , . Η συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει , δηλαδή **

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, για κάθε  έχουμε:.

1. **Έστω η συνάρτήση . Η συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη στο  και ισχύει , δηλαδή**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, για κάθε έχουμε:

.

1. **Η συνάρτηση ,  είναι παραγωγίσιμη στο  και ισχύει , δηλαδή **

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, αν  και θέσουμε , τότε έχουμε . Επομένως, .

1. **Η συνάρτηση ,  είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει , δηλαδή **

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, αν  και θέσουμε , τότε έχουμε . Επομένως,.

1. **Η συνάρτηση ,  είναι παραγωγίσιμη στο  και ισχύει **

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι.αν , τότε , ενώ αν , τότε ,οπότε, αν θέσουμε  και , έχουμε . Επομένως, και άρα .

1. **( 1η Συνέπεια Θ.Μ.Τ)**

**Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν**

**• η f είναι συνεχής στο Δ και**

**•f΄(x)=0 για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,**

**τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  ισχύει . Πράγματι

• Αν , τότε προφανώς .

• Αν , τότε στο διάστημα  η *f* ικανοποιεί τις υποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής.** Επομένως, υπάρχει  τέτοιο, ώστε (1)

Επειδή το *ξ* είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει ,οπότε, λόγω της (1), είναι .

Αν , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι . Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι .

1. **( 2η Συνέπεια Θ.Μ.Τ)**

**Έστω δυο συναρτήσεις f , g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν**

**• οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και**

**•f΄(x)=g΄(x) για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,**

**τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε να ισχύει:**

****

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**



Η συνάρτηση  είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο  ισχύει.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση  είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε  να ισχύει , οπότε .

**ΣΧΟΛΙΟ**

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και **όχι σε ένωση διαστημάτων.**

*Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση*

|  |
| --- |
| *Εικόνα* |

*Παρατηρούμε ότι, αν  f ʹ(x) = 0 και για κάθε  x ϵ (−∞,0) ∪ (0,+∞), εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο (−∞,0) ∪ (0,+∞).*

1. **( 3η Συνέπεια Θ.Μ.Τ)**

**Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.**

**• Αν  σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**

**• Αν  σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι .

Έστω  με . Θα δείξουμε ότι . Πράγματι, στο διάστημα  η *f***ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ**. Επομένως, υπάρχει  τέτοιο, ώστε , οπότε έχουμε

Επειδή  και , έχουμε , οπότε .

Στην περίπτωση που είναι  εργαζόμαστε αναλόγως.

1. **Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε:**

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ’ ένα διάστημα *Δ* και  ένα **εσωτερικό**σημείο του *Δ*. Αν η *f* παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο  και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:



**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Ας υποθέσουμε ότι η *f* παρουσιάζει στο  τοπικό μέγιστο. Επειδή το  είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η *f* παρουσιάζει σ’ αυτό **τοπικό μέγιστο**, υπάρχει  τέτοιο, ώστε και, για κάθε . (1).

Επειδή, επιπλέον, η *f***είναι παραγωγίσιμη στο ,** ισχύει.

Επομένως, αν , τότε, λόγω της (1), θα είναι οπότε θα έχουμε (2) αν , τότε, λόγω της (1), θα είναι , οπότε θα έχουμε (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε .

**ΣΧΟΛΙΟ**

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του *Δ*, στα οποία η  είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30, οι ***π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς τ ων τ ο π ι κ ώ ν α κ ρ ο τ ά τ ω ν***μιας συνάρτησης *f* σ’ ένα διάστημα *Δ* είναι:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Εικόνα   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  | Εικόνα |
|  |  |  |

**1. Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η παράγωγος της*f* μηδενίζεται.**

**2. Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η *f* δεν παραγωγίζεται.**

3. **Τα άκρα του *Δ*** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *ε σ ω τ ε ρ ι κ ά* σημεία του *Δ* στα οποία η *f* δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της *f* στο διάστημα*Δ*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση |  | Εικόνα | | Εικόνα | | Η f είναι συνεχής στο **R** και παραγωγίσιμη στο **R**−{1}  με | | Εικόνα | | Οι ρίζες της  f ʹ(x) = 0  είναι οι 0 και 2. | |

|  |
| --- |
| ***Eπειδή η f ʹ μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι οί αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώτο σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.*** |

1. **ΘΕΩΡΗΜΑ (κριτήριο τοπικών ακροτάτων)**

Έστω μια συνάρτηση *f* παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του , στο οποίο όμως η *f* είναι **συνεχής**.

1.Αν στο και στο, τότε το είναι τοπικό μέγιστο της *f*. (Σχ. 35α)

2.Αν στο  και στο, τότε το είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.(Σχ. 35β).

3.Aν η διατηρεί πρόσημο στο , τότε το δεν είναι τοπικό ακρότατο και η *f* είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). (Σχ. 35γ).

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

#### 1. Eπειδή για κάθε και η f είναι συνεχής στο , ηf είναι γνησίως αύξουσα στο . Έτσι , για κάθε .(1)

#### Επειδή για κάθε και ηf είναι συνεχής στο , ηf είναι γνησίως φθίνουσα στο . Έτσι έχουμε:, για κάθε (2)



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:, για κάθε  που σημαίνει ότι το  είναι μέγιστο της *f* στο  και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

2.Εργαζόμαστε αναλόγως.



**3. Έστω ότι , για κάθε .**



Επειδή η *f* είναι συνεχής στο  θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  και . Επομένως, για  ισχύει . Άρα το  δεν είναι τοπικό ακρότατο της *f*.

**Θα δείξουμε, τώρα, ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο .**

Πράγματι, έστω  με .

Αν , επειδή η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο , θα ισχύει .

Αν , επειδή η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο , θα ισχύει .

Αν , τότε όπως είδαμε .

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει , οπότε η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο .

Ομοίως, αν  για κάθε .

1. **Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:**

**• Όλες οι συναρτήσεις της μορφής , , είναι παράγουσες της f στο Δ .**

**• Κάθε άλλη παράγουσα  της f στο Δ παίρνει τη μορφή , .**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

• Κάθε συνάρτηση της μορφής , όπου , είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού , για κάθε .

• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε , για κάθε  ισχύουν οι σχέσεις  και , οπότε:, για κάθε . Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε , για κάθε .

**Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού**

1. **Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα** **. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο** **, να αποδείξετε ότι:**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση  είναι μια παράγουσα της f στο . Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο , θα υπάρχει  τέτοιο, ώστε  (1)

Από την (1), για , έχουμε , οπότε .

Επομένως, , οπότε, για , έχουμεκαι άρα .

1. **Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

**α)** Ισχύει ότι:,όπου  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο .

**β)**Ισχύει ότι: , όπου  είναι συνεχείς συναρτήσεις, ,  και , .

1. **Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες** **,**  **και τον άξονα** **, όταν**  **για κάθε**  **και η συνάρτηση** **είναι συνεχής .**



**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα  και  για κάθε , τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες ,  και τον άξονα  είναι .

1. **Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των**  **τις ευθείες** **,** **, όταν**  **για κάθε**  **και οι συναρτήσεις** **, g είναι συνεχείς.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις f και g, στο διάστημα  με  για κάθε  και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  και τις ευθείες  και  (Σχ. 18α).



Παρατηρούμε ότι .

Επομένως, .

1. **Να αποδείξετε ότι  αν για τις συναρτήσεις** **είναι**  **για κάθε** **, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των**  **και τις ευθείες**  **,** **δίνεται από τον τύπο:****.**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Επειδή οι συναρτήσεις  είναι συνεχείς στο , θα υπάρχει αριθμός  τέτοιος, ώστε , για κάθε . Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο .

Επομένως, θα έχουμε: . Άρα .

1. **Να αποδείξετε ότι όταν η διαφορά**  **δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο** **, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των**  **και τις ευθείες**  **και**  **είναι ίσο με** **.**



**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Όταν η διαφορά  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο , όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  και τις ευθείες  και  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων  και . Δηλαδή,





Επομένως, 

**Σχόλιο**

Σύμφωνα με τα παραπάνω το  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  (Σχ. 25).

1. **Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα** **, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με**  **για κάθε**  **και τις ευθείες**  **και**  **είναι ίσο με:** 



**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Πράγματι, επειδή ο άξονας  είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης , έχουμε . Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει  για κάθε , τότε: 

1. (1) Μια συνάρτηση *f* λέγεται, απλώς,:

       • **αύξουσα** σ’ ένα διάστημα *Δ*, όταν για οποιαδήποτε  με  ισχύει

   .

       • **φθίνουσα** σ’ ένα διάστημα *Δ*, όταν για οποιαδήποτε  με  ισχύει

   . [↑](#footnote-ref-2)