

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 1
Συναρτήσεις

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Δημήτρης Τσορτανίδης

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 6

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

A4. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται $1-1$;

Μονάδες 3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.
- β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα.
- γ) Μία συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- δ) Μία συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν, κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f ακριβώς σε ένα σημείο.
- ε) Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι $1-1$ και η γραφική της παράσταση έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} που η γραφική της παράσταση διέρχεται επίσης από το σημείο A .

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 2

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Συναρτήσεις – Ιδιότητες Ορίων

Θέμα Α

A1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Μονάδες 5

A2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού τα σύνολα A, B αντίστοιχα, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$ τότε $f(x) \leq 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Για όλες τις συναρτήσεις f, g που έχουν όριο στο x_0 και είναι τέτοιες, ώστε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

δ) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

ε) Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε κατ' ανάγκη δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

στ) Ισχύει η σχέση $|\eta \mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ζ) Αν $u = g(x)$, $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ και $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$.

Μονάδες 14

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 3

Καθηγητής:

Δημήτριος Τσορτανίδης

Όρια

Θέμα Α

A1. Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Μονάδες 3

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$.

β) Αν για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x) < f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

στ) Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

ζ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$.

η) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = -\infty$.

θ) Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.

ι) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 1$.

ια) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$.

Μονάδες 22

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 4
Συνέχεια

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Δημήτρης Τσορτανίδης

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους, η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι και αυτή συνεχής στο x_0 .
- β) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) \geq 0$, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο διάστημα (α, β) .
- γ) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
- δ) Κάθε συνάρτηση f , η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, δεν παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.
- ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 5

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Συνέχεια

Θέμα Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Κάθε συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν, υπάρχει το όριό της στο x_0 αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$.
- β) Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.
- γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της.
- δ) Κάθε συνάρτηση f , η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, δεν έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό.
- ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός ανοιχτού διαστήματος $\Delta = (\alpha, \beta)$ μέσω κάθε συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι ανοιχτό διάστημα.
- στ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός ανοιχτού διαστήματος $\Delta = (\alpha, \beta)$ μέσω κάθε συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης f είναι ανοιχτό διάστημα.
- ζ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της σε αυτό είναι το ανοιχτό διάστημα (B, A) , όπου $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ και $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$.
- η) Υπάρχει συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, δεν είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών σε αυτό, το κλειστό διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$.

θ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $(\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της σε αυτό είναι το διάστημα $(A, B]$, όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

Μονάδες 18

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 6

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Η Έννοια της Παραγώγου

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν, υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

β) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

γ) Κάθε συνάρτηση f , η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, δεν είναι και συνεχής σε αυτό.

δ) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

ε) Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 7

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Παράγωγος Συνάρτηση

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

γ) Ισχύει $(\sin x)' = -\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Ισχύει $(\varepsilon\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

ε) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$, ισχύει $f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]'$.

Μονάδες 10

A5. Αν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις παραγωγίσης, να συμπληρώσετε τους παρακάτω κανόνες.

α) $(f \cdot g)'(x) = \dots\dots\dots$

β) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots\dots\dots$

γ) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \dots\dots\dots$

δ) $(f \circ g)'(x) = \dots\dots\dots$

Μονάδες 4

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 8

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Παράγωγος Συνάρτηση

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη σε αυτό και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Μονάδες 5

A2. Να αποδείξετε ότι $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Μονάδες 5

A3. Να αποδείξετε ότι $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Αν $\alpha > 0$, τότε $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}, x \in \mathbb{R}$.

β) Ισχύει $(\ln |x|)' = -\frac{1}{|x|}, x < 0$.

γ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

δ) Αν δύο μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

ε) Αν s είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού και α η συνάρτηση της επιτάχυνσής του, τότε $\alpha(t) = s''(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t .

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 9

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Θεωρήματα – Μονοτονία

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και τέτοια, ώστε $f(\alpha) \neq f(\beta)$, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
- β) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και τέτοια, ώστε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
- γ) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν αντιστρέφεται, τότε υπάρχει σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- δ) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) . Αν $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB .
- ε) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη και μη σταθερή σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

- στ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in A$, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in A$.
- ζ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 14

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Εξεταζόμενος-η: _____

Θεωρία 10

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Θεωρήματα – Μονοτονία

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.

β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) , υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $(\alpha - \beta)f'(\xi) + f(\alpha) = f(\beta)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει η ισοδυναμία $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και τέτοια, ώστε $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ .

στ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

ζ) Αν η παράγωγος συνάρτηση f' της f είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 14

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 11
Τοπικά Ακρότατα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Δημήτρης Τσορτανίδης

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 4

A3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Για κάθε συνάρτηση f που παρουσιάζει ολικό μέγιστο, αυτό είναι το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά της μέγιστα.
- β) Κάθε συνάρτηση f , η οποία παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα, παρουσιάζει και ολικό ελάχιστο που είναι το μικρότερο από όλα τα τοπικά της ελάχιστα.
- γ) Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ , στα οποία μία συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .
- δ) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- ε) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 12
Τοπικά Ακρότατα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Δημήτρης Τσορτανίδης

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 4

A3. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' μηδενίζεται και τα άκρα του Δ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.
- β) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, η μικρότερη από τις τιμές της στα κρίσιμα σημεία της και στα άκρα α, β είναι το ελάχιστο της σε αυτό το διάστημα.
- γ) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) . Αν οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε η f δεν έχει ακρότατα στο διάστημα αυτό.
- δ) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) . Αν η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα αυτό, τότε είναι 1 – 1.

ε) Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) . Αν η f'' είναι γνησίως μονότονη σε αυτό, τότε η f έχει το πολύ δύο ακρότατα.

Μονάδες 10

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 13

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Κυρτότητα, Σημεία Καμπής

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ; Να δώσετε την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία.

Μονάδες 3

A2. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 3

A3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

β) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της, τότε οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f δε βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση.

γ) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ .

δ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ε) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

- στ) Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.
- ζ) Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο διάστημα αυτό.
- η) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . Αν η ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 \in \Delta$ και η f' είναι γνησίως μονότονη στο Δ , τότε $f(x) \neq \lambda x + \beta$ για κάθε $x \in \Delta$ και $x \neq x_0$.

Μονάδες 16

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 14

Καθηγητής:

Δημήτρης Τσορτανίδης

Ασύμπτωτες, Κανόνες DLH

Θέμα Α

A1. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 3

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε τον Κανόνα De L' Hospital για όρια της μορφής $\frac{0}{0}$.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , αν και μόνο αν, και τα δύο όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι ίσα με $+\infty$ ή $-\infty$.

β) Η ευθεία $y = \beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$, αν και μόνο αν, ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta$.

γ) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, αν και μόνο αν, ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}.$$

δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δύο δεν έχουν ασύμπτωτες.

ε) Κάθε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει το πολύ δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες.

στ) Κάθε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει το πολύ δύο οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

ζ) Για κάθε συνάρτηση f , η γραφική της παράσταση δεν έχει κοινά σημεία με τις ασύμπτωτές της.

η) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ και δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε κατ' ανάγκη δεν υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 16

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 15
Ολοκληρώματα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Δημήτρης Τσορτανίδης

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 7

A2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα σε αυτό.

β) Κάθε συνάρτηση έχει το πολύ μία παράγουσα σε οποιοδήποτε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

γ) i. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$.

ii. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$.

δ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

στ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες με f', g' συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx.$$

ζ) Αν οι συναρτήσεις f, g' είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u) \, du,$$

όπου $u = g(x)$, $du = g'(x) \, dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Μονάδες 14

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 16
Ολοκληρώματα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Δημήτρης Τσορτανίδης

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

A2. Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- Υπάρχει συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν έχει παράγουσα σε αυτό.
- Όλες οι αρχικές της συνάρτησης f στο διάστημα Δ έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0 \in \Delta$.
- Ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx \right)' = 0$.
 - Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} c \, dx = c(\alpha - \beta)$.
- Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \, dx = f(\beta) - f(\alpha)$.

- ε) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τέτοια, ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx \geq 0$, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- στ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τέτοιες, ώστε $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ με $f \neq g$ στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \, dx$.

Μονάδες 12

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 17
Ολοκληρώματα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Δημήτρης Τσορτανίδης

Θέμα Α

- A1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Μονάδες 7

- A2. Έστω μία συνάρτηση g συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι

$$E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \, dx.$$

Μονάδες 6

- A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τέτοιες, ώστε $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, ισχύει

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x) \, dx \leq \int_{\beta}^{\alpha} g(x) \, dx.$$

β) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \neq 0$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx < 0.$$

γ) i. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει η ισοδυναμία

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

ii. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει η ισοδυναμία $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) \, dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

- δ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δεν μηδενίζεται παντού σε αυτό, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \neq 0$.
- ε) Για οποιεσδήποτε συνεχείς συναρτήσεις f, g σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι $E(\Omega) = \int_{\beta}^{\alpha} |f(x) - g(x)| dx$.
- στ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, στο διάστημα αυτό.

Μονάδες 12

Απαντήσεις _____