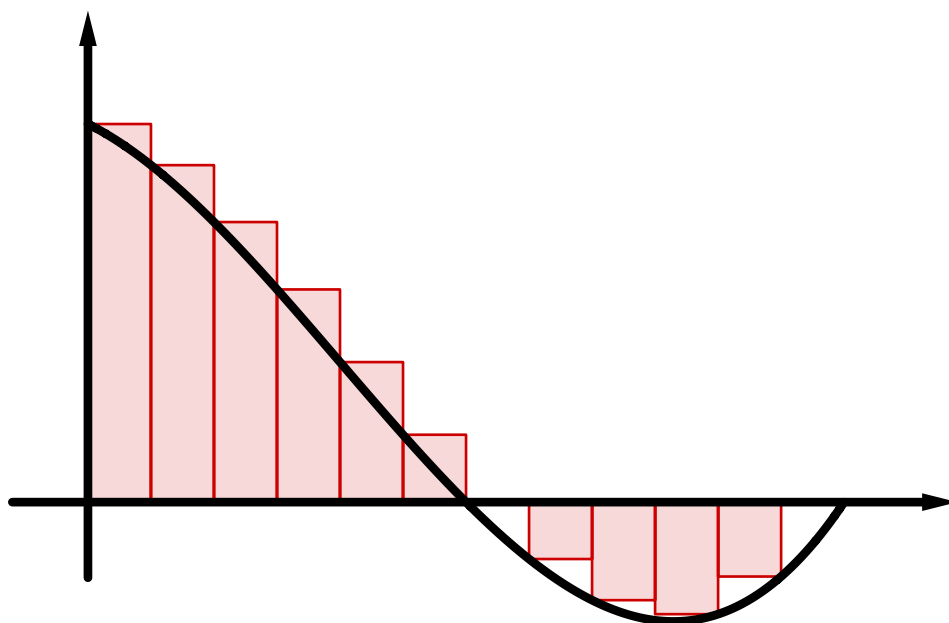

Ασκησιολόγιο Μαθηματικών

Γ' Λυκείου (Ο.Π.)



Επιμέλεια: Δημοσθένης Κ. Σταλίδης
Γυμνάσιο & Λ.Τ. Άρνισσας

1^η εκδοχή – Ιούνιος 2019

Περιεχόμενα

I	Συναρτήσεις, Όρια & Συνέχεια	7
1	Συναρτήσεις I: αρχικές έννοιες	9
1.1	Γενικά	9
1.2	Γραφική παράσταση	12
2	Συναρτήσεις II: σύνθεση συναρτήσεων	17
3	Συναρτήσεις III: μονοτονία & ακρότατα	21
4	Συναρτήσεις VI: 1-1 & αντιστροφή	27
5	Όρια I: όρια σε πραγματικό αριθμό	33
5.1	Υπολογισμός ορίων	33
5.2	Γενικές ασκήσεις	36
6	Όρια II: μη πεπερασμένα όρια	43
6.1	Υπολογισμός ορίων	43
6.2	Γενικές ασκήσεις	45
7	Όρια III: όρια στο άπειρο	49
7.1	Υπολογισμός ορίων	49
7.2	Γενικές ασκήσεις	53
8	Συνέχεια I: βασικές έννοιες	57
8.1	Συνέχεια σε σημείο	57
8.2	Συνέχεια στο πεδίο ορισμού	62
9	Συνέχεια II: βασικά θεωρήματα	65
II	Διαφορικός Λογισμός	75
10	Η έννοια της παραγώγου	77
11	Παράγωγος συνάρτηση	85
11.1	Ορισμός & κανόνες παραγωγίσης	85
11.2	Παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων	88
12	Εφαπτομένη	93

13 Ρυθμός μεταβολής	101
14 Θεώρημα Rolle	105
14.1 Γενικά	105
14.2 Εξισώσεις	108
15 Θεώρημα Μέσης Τιμής	111
15.1 Γενικά	111
15.2 Ανισότητες	114
16 Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής	117
16.1 Σταθερές συναρτήσεις & ισότητα παραγώγων	117
16.2 Μονοτονία με χρήση παραγώγων	125
17 Τοπικά ακρότατα με χρήση παραγώγων	131
17.1 Γενικές ασκήσεις	131
17.2 Ανισώσεις & εξισώσεις	138
17.3 Προβλήματα	140
18 Κυρτότητα & σημεία καμπής	143
19 Ασύμπτωτες	147
19.1 Υπολογισμός ασυμπτωτών	147
19.2 Γενικές ασκήσεις	148
20 Κανόνες De L' Hospital	151
20.1 Υπολογισμός ορίων	151
20.2 Γενικές ασκήσεις	153
21 Μελέτη & γραφική παράσταση	157
 III Ολοκληρωτικός Λογισμός	 161
22 Παράγουσα συνάρτησης	163
22.1 Υπολογισμός παράγουσας	163
22.2 Γενικές ασκήσεις	165
22.3 Προβλήματα	167
23 Ολοκλήρωμα I: βασικές ιδιότητες	169
24 Ολοκλήρωμα II: άμεση ολοκλήρωση	173
25 Ολοκλήρωμα III: ολοκλήρωση κατά παράγοντες	179
26 Ολοκλήρωμα IV: μέθοδος αντικατάστασης	183

27	Επιπλέον ασκήσεις υπολογισμού ολοκληρωμάτων	187
28	Εμβαδά επιπέδων χωρίων	189
IV	Ασκήσεις εφ' όλης της ύλης	195
29	Επαναληπτικές ασκήσεις I	197
30	Επαναληπτικές ασκήσεις II	209
31	Επαναληπτικές ασκήσεις III	221

Μέρος I

Συναρτήσεις, Όρια & Συνέχεια

1. Συναρτήσεις I: αρχικές έννοιες

1.1 Γενικά

Άσκηση 1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f όταν ο τύπος $f(x)$ είναι:

$$\begin{array}{lll} (1) \ f(x) = \frac{x-3}{3x^2-5x+2} & (2) \ f(x) = \sqrt{5x-30} & (3) \ f(x) = \sqrt[5]{x-1} \\ (4) \ f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3} & (5) \ f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} & (6) \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

Άσκηση 2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f όταν ο τύπος $f(x)$ είναι:

$$\begin{array}{lll} (1) \ f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} & (2) \ f(x) = \sqrt{x^2-4x+3} & (3) \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}} \\ (4) \ f(x) = \ln(x^2-4x+3) & (5) \ f(x) = \frac{1}{\ln(x^2-4x+3)} & (6) \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x^2-4x+3)}} \end{array}$$

Άσκηση 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f όταν ο τύπος $f(x)$ είναι:

$$\begin{array}{lll} (1) \ f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} & (2) \ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}} & (3) \ f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-2} \\ (4) \ f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)} & (5) \ f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} & (6) \ f(x) = \ln(e^{2x}-5e^x+6) \end{array}$$

Άσκηση 4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f όταν ο τύπος $f(x)$ είναι:

$$\begin{array}{lll} (1) \ f(x) = \frac{\sqrt{10-x^2}}{x-1} & (2) \ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-15}}{x^2-16} & (3) \ f(x) = \sqrt{x^2-9x} - \sqrt[3]{x+2} \\ (4) \ f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}} & (5) \ f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+3}} & (6) \ f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+3}} \end{array}$$

Άσκηση 5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f όταν ο τύπος $f(x)$ είναι:

$$\begin{array}{lll} (1) \ f(x) = \sqrt{\ln(x-1)} & (2) \ f(x) = 1 - \sqrt{2 - \ln x} & (3) \ f(x) = \ln(2 - \ln x) \\ (4) \ f(x) = \varepsilon\varphi \frac{x}{2} & (5) \ f(x) = \left(\sigma\varphi \frac{x}{2}\right)^{-1} & (6) \ f(x) = \frac{|x| - x + 2}{\sqrt{x} + |x| - 1} \end{array}$$

Άσκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 - 3x$. Να βρείτε το $f((-2, 4])$.

Άσκηση 7. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{(x+1)(x+\alpha)}{x^2+1}$. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$.

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 6}{x^2 - \alpha x + 4}$. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α , να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - \alpha x + 4} - x$.

Άσκηση 10. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις f, g στις παρακάτω περιπτώσεις. Αν $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$.

$$(1) \quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)^2}, \quad g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1} \quad (2) \quad f(x) = 2x, \quad g(x) = \frac{2x^3 + 4x}{x^2 + 2}$$

$$(3) \quad f(x) = (2-x)^2, \quad g(x) = x-2 \quad (4) \quad f(x) = \sqrt{x^2}, \quad g(x) = (\sqrt{x})^2$$

$$(5) \quad f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = 2 \ln x \quad (6) \quad f(x) = \ln x^3, \quad g(x) = 3 \ln x$$

Άσκηση 11. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{(\lambda+1)x-1}{x+\lambda^2-1}$, $g(x) = \frac{(1-2\lambda)x+1-\lambda}{\lambda-x-5}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες.

Άσκηση 12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x-\lambda-1}{x-\lambda+1}$ και $g(x) = \frac{x^2-2x+\lambda-1}{(x-\lambda^2+\lambda)^2}$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f = g$.

Άσκηση 13. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, fg , $\frac{f}{g}$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}, \quad g(x) = \frac{4x-3}{2-x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x-4}{2-x}, \quad g(x) = \frac{x^2-3x}{x-2}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{3-|x|}, \quad g(x) = \frac{|x|-2}{x^2-9} \quad (4) \quad f(x) = \frac{|x|}{3+|x|}, \quad g(x) = \frac{6-2|x|}{x^2-9}$$

$$(5) \quad f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad (6) \quad f(x) = \frac{1}{x^2-9}, \quad g(x) = \frac{x-3}{x}$$

Άσκηση 14. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία είναι ίσες οι συναρτήσεις f, g , όταν:

(1) $f(x) = |x - 1| + 2|x + 1| + x, \quad g(x) = 2x + 3$

(2) $f(x) = |x - 2| + 3|x|, \quad g(x) = 4x - 2$

Άσκηση 15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ και $g(x) = x^2 - 2x$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{1}{f}$ και $\frac{1}{g}$.

Άσκηση 16. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ και $g(x) = \frac{x-3}{x^2+5x+6}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f - g$ και fg .

Άσκηση 17. Για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ 1-2x, & 0 < x < 4 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} -2x, & -3 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

να βρείτε την fg και το σύνολο τιμών της.

Άσκηση 18. Για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1}, & x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|+1}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

να βρείτε την fg .

Άσκηση 19. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει η σχέση

$$f(2-x) + f(x) = x^3 + 3, \quad (*)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Γραφική παράσταση

Άσκηση 20. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = x^2 - 1 & (2) & f(x) = -x^2 + 3 & (3) & f(x) = (x - 2)^2 \\ (4) & f(x) = (x - 1)^2 + 2 & (5) & f(x) = x^2 - 6x + 8 & (6) & f(x) = -2(x - 1)(x - 3) \end{array}$$

Άσκηση 21. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = 1 + \frac{3}{x} & (2) & f(x) = \frac{x - 4}{x} & (3) & f(x) = \frac{1}{x + 2} \\ (4) & f(x) = -1 - \frac{2}{x - 2} & (5) & f(x) = \frac{x}{x - 1} & (6) & f(x) = \frac{1 - 2x}{x - 1} \end{array}$$

Άσκηση 22. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = |x - 2| & (2) & f(x) = \sqrt{9 - x^2} & (3) & f(x) = \sqrt{1 - 4x^2} \\ (4) & f(x) = |\ln x| & (5) & f(x) = |\eta\mu x| & (6) & f(x) = |\sigma\upsilon\nu x| \end{array}$$

Άσκηση 23. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και

$$f_1(x) = -f(x), \quad f_2(x) = f(-x), \quad f_3(x) = f(x) - 2, \quad f_4(x) = f(x - 2).$$

Άσκηση 24. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και

$$f_1(x) = -f(x), \quad f_2(x) = f(-x), \quad f_3(x) = f(x) + 1, \quad f_4(x) = f(x + 1).$$

Άσκηση 25. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{ll} (1) & f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases} & (2) & f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 2 \\ x^2 - 2, & x > 2 \end{cases} \\ (3) & f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} & (4) & f(x) = |x^2 - 1| + x^2 \\ (5) & f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases} & (6) & f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \leq e \\ x - 1, & x > e \end{cases} \end{array}$$

Άσκηση 26. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 1 \\ -x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} -x, & -2\pi \leq x < 0 \\ \eta\mu x, & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = |3x - 6| + (x + 1)^2$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{|x|e^x}{x}$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|} \ln x$$

$$(6) \quad f(x) = \frac{|x-2| + |x|}{|x|}$$

Άσκηση 27. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, όταν:

$$(1) \quad f(x) = x^3 - 5x + 4 \quad (2) \quad f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 \quad (3) \quad f(x) = \frac{3}{x-2}$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{x-4}{x-1} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x+3} \quad (6) \quad f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{3x-1}$$

Άσκηση 28. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, όταν:

$$(1) \quad f(x) = x - \sqrt{x} + 2 \quad (2) \quad f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4} \quad (3) \quad f(x) = \sqrt[4]{x-4} + 7$$

$$(4) \quad f(x) = 3 - \ln(x+2) \quad (5) \quad f(x) = \ln(x-2) - 3 \quad (6) \quad f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$$

Άσκηση 29. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, όταν:

$$(1) \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (2) \quad f(x) = 9^x + 3^x - 12 \quad (3) \quad f(x) = 25^x - 15^x - 10^x$$

$$(4) \quad f(x) = \sqrt{3} + 2\eta\mu x \quad (5) \quad f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x - \sqrt{2} \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{\frac{2x-4}{x^2+x}}$$

Άσκηση 30. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g , όταν:

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 - 4x, \quad g(x) = 2x^2 - 3 \quad (2) \quad f(x) = 5x^2 + x + 2, \quad g(x) = 3x^2$$

$$(3) \quad f(x) = 4x^3 + 5x, \quad g(x) = 12x^2 - 6 \quad (4) \quad f(x) = 8x^2 + 10x + 4, \quad g(x) = \frac{11}{2x}$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{x+3}{x}, \quad g(x) = \frac{2}{x-1} \quad (6) \quad f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = \frac{6}{x+1}$$

Άσκηση 31. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g , όταν:

$$(1) \quad f(x) = 4x, \quad g(x) = 2\sqrt{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2}{1 + 2x}, \quad g(x) = \frac{1}{x(1 + 2x)}$$

$$(3) \quad f(x) = -\sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 - 2 \quad (4) \quad f(x) = 2^x - 3, \quad g(x) = 2^{-x}$$

$$(5) \quad f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad g(x) = 2x + 1 \quad (6) \quad f(x) = \ln 2x, \quad g(x) = \ln(3 - 2x^2)$$

Άσκηση 32. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = x^2 - 5x + 4 \quad (2) \quad f(x) = \frac{2 + x}{2 - x} \quad (3) \quad f(x) = \frac{1 - e^x}{e^x}$$

Άσκηση 33. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = (3 - x)(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 3)$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{5 - x}{4 + x}$$

$$(3) \quad f(x) = \ln(x + 1) - 1$$

Άσκηση 34. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g , όταν:

$$(1) \quad f(x) = 1 - 2x - x^3, \quad g(x) = 1 - x^4$$

$$(2) \quad f(x) = x^3 + x + 2, \quad g(x) = 2 + x - x^2$$

$$(3) \quad f(x) = e^{2x} - e^x, \quad g(x) = 5e^x - 5$$

Άσκηση 35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x + 2| - |x - 2|}{|x + 2| + |x - 2|}$. Να παρασταθεί γραφικά και να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών της.

Άσκηση 36. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| \geq 1 \\ x|x|, & x < 1 \end{cases}.$$

Να παρασταθεί γραφικά και να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών της.

Άσκηση 37. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$ και στην συνέχεια, με την βοήθεια της, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Άσκηση 38. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ και στην συνέχεια, με την βοήθεια της, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Άσκηση 39. Για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < 1 \\ 2x - 3, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} -4x + 1, & x < 0 \\ 3x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$$

να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f - g$ και στην συνέχεια, με την βοήθεια της, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Άσκηση 40. Για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ και στην συνέχεια, με την βοήθεια της, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Άσκηση 41. Αν $f(x) = \alpha|x^2 - 1| - \beta|x + 3|$, να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(-1, 4)$.

Άσκηση 42. Αν $f(x) = (\alpha^2 - 5)x^2 + 2x + 3$ και $g(x) = x^2 + \beta x + 1$, να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι f, g να έχουν κοινά σημεία πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

Άσκηση 43. Αν $f(x) = 2x^2$ και $g(x) = 2x + \kappa$, να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g να διαθέτουν ακριβώς ένα κοινό σημείο. Ποιο είναι το σημείο αυτό;

Άσκηση 44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 13x^2 + \beta x + 1$.

(1) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία $A(2, 33)$ και $B(1, 0)$ να ανήκουν στην C_f .

(2) Να μετασχηματιστεί η συνάρτηση f σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

(3) Να βρεθούν τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + 12}{3x + \alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα σταθερά σημεία του επιπέδου, από τα οποία διέρχεται η γραφική παράσταση της f .

Άσκηση 46. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 5|x - 3| - 10$ και $g(x) = 4x - x^3$.

- (1) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- (2) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 47. Για $\alpha \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_\alpha(x) = x^6 + \alpha x^4 - \alpha$.

- (1) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f_0 και f_1 διαθέτουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.
- (2) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f_α , για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.

Άσκηση 48. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) - 3f^2(x) + 4f(x) = x^2 - x + 2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 49. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) - 2f^2(x) + 5f(x) = -x^2 + 3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 50. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = x^2 + \alpha x + 3\beta$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g να τέμνονται επί των ευθειών $x = 1$ και $x = 2$.

Άσκηση 51. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$$f(x) + 1 = g(x) + x^3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η σχετική θέση των C_f, C_g .

Άσκηση 52. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = \alpha x + 3 - \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της g διέρχεται από σταθερό σημείο.
- (2) Αποδείξτε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, οι γραφικές παραστάσεις των f και g διαθέτουν κοινά σημεία.
- (3) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α για τον οποίο οι γραφικές παραστάσεις των f και g εφάπτονται.

2. Συναρτήσεις II: σύνθεση συναρτήσεων

Άσκηση 53. Για τις συναρτήσεις f, g , να προσδιορίσετε τις $f \circ g$ και $g \circ f$, όταν:

- (1) $f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = -2x + 1$ (2) $f(x) = 3x^2 - 2, \quad g(x) = \eta\mu x$
(3) $f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = \sqrt{x} - 2$ (4) $f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = \frac{1}{x-3}$
(5) $f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$ (6) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x}{x+1}$

Άσκηση 54. Για τις συναρτήσεις f, g , να προσδιορίσετε τις $f \circ g$ και $g \circ f$, όταν:

- (1) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad g(x) = \frac{1}{2x}$ (2) $f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = \frac{1}{x}$
(3) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$ (4) $f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$
(5) $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x-2}$ (6) $f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

Άσκηση 55. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή τριών συναρτήσεων, όταν:

- (1) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(4x^2 + 1)$ (2) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$ (3) $f(x) = 2 \ln^4 \frac{3}{x}$
(4) $f(x) = \left(e^{x+x^2}\right)^3$ (5) $f(x) = \sqrt{\ln(e^x + 1)}$ (6) $f(x) = \sqrt[3]{1 - |x-2|}$

Άσκηση 56. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (1) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$
(2) $f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{x-2}$
(3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2, \quad g(x) = \ln x$
(4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = 3\sqrt{x} - 2$
(5) $f(x) = \ln(x-e), \quad g(x) = \sqrt{x-1}$
(6) $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x^2-1}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

Άσκηση 57. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, στο ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού A , αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

- | | |
|------------------------------|--|
| (1) $f(x+1) = 2x+1$ | (2) $f(x+1) = e^x + x + 1$ |
| (3) $f(e^x) = 2x+1$ | (4) $f^2(x) + x^2 e^{2x} = 2xe^x f(x)$ |
| (5) $f(2x-1) = x^2 - 2x + 3$ | (6) $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{x^2}{x^2+1}$ |

Άσκηση 58. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, στο ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού A , αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| (1) $xf(1-x) + f(x) = 1$ | (2) $5f(x) + f(2-x) = x$ |
| (3) $3f(1-x) + f(x) = 4 + x^2$ | (4) $f(x-2) - 4f(3-x) = 10x - 31$ |
| (5) $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ | (6) $xf^2(x)f(2-x) = 1$ |

Άσκηση 59. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sqrt{x}$. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ (g \circ h)$.

Άσκηση 60. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x} - 1$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g \circ h$ και $g \circ h \circ f$.

Άσκηση 61. Αν $f(x) = 4 - |x|$, να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$, να χαράξετε την γραφική της παράσταση και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

Άσκηση 62. Έστω f, h συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 2$ και $h(x) = x(x-1)$. Να βρείτε συνάρτηση g της οποίας ο τύπος έχει τη μορφή $g(x) = \alpha x + \beta$ και ισχύει $g \circ f = h$.

Άσκηση 63. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = 3x - 2$ και $f(x) = \alpha x + \beta$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $g \circ g = f$.

Άσκηση 64. Έστω συνάρτηση $f : [-4, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , με τύπο $g(x) = f(5 - x^2)$.

Άσκηση 65. Δίνονται οι συναρτήσεις $I(x) = x$ και $f(x) = \frac{\alpha x - \beta}{3x - \alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και I είναι ίσες στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\alpha}{3}\right\}$.

Άσκηση 66. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x + \beta$ και $g(x) = \gamma x + \delta$. Αποδείξτε ότι $f \circ g = g \circ f$ αν και μόνο αν $(\alpha - 1)\delta - (\gamma - 1)\beta = 0$.

Άσκηση 67. Θεωρούμε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για κάθε σταθερή συνάρτηση h ισχύει $f \circ h = g \circ h$, αποδείξτε ότι $f = g$.

Άσκηση 68. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για κάθε σταθερή συνάρτηση g ισχύει $g \circ f = -(f \circ g)$, αποδείξτε ότι $f(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 69. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $(f \circ f)(x) = 4x - 3$ και $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .

Άσκηση 70. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2^x$ και $h(x) = x^2$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $(f \circ g)^2 + 1 = f \circ h$.

Άσκηση 71. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση απόλυτης τιμής h , ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση g ώστε $f = g \circ h$.

Άσκηση 72. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^5(x) + x^5 = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f \circ f = I$, όπου $I(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 73. Έστω η συνάρτηση με f με τύπο $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$(f \circ f)(x) = x^2 + 1 \quad (*)$$

είναι αδύνατη.

Άσκηση 74. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x^2 + 6) + f(5x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο τουλάχιστον σημεία.

Άσκηση 75. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = x^2 - 2x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι $f(x^2 - 2x + 2) = f^2(x) - 2f(x) + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) Αν είναι η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

Άσκηση 76. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = x^2 - 8x + 20$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι $f(x^2 - 8x + 20) = f^2(x) - 8f(x) + 20$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) Αν είναι η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από το σημείο $A(4, 5)$, να υπολογίσετε την τιμή $f(4)$.

3. Συναρτήσεις ΙΙΙ: μονοτονία & ακρότατα

Άσκηση 77. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = x^3 + 2x - 3 \quad (2) \quad f(x) = 1 - 3x + \sqrt{2-x} \quad (3) \quad f(x) = 3e^{7-x} + 5$$
$$(4) \quad f(x) = 2 \ln(x-3) + 5 \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (6) \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3^x$$

Άσκηση 78. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f στο διάστημα Δ , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad \Delta = (-\infty, 2) \quad (2) \quad f(x) = -2x^3 + \frac{1}{x}, \quad \Delta = (0, +\infty)$$
$$(3) \quad f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{e^x}, \quad \Delta = [0, +\infty) \quad (4) \quad f(x) = (x-3)^2 + 1, \quad \Delta = [3, +\infty)$$
$$(5) \quad f(x) = x(x+4) - 4, \quad \Delta = (-\infty, -2] \quad (6) \quad f(x) = x(x+4) - 4, \quad \Delta = [-2, +\infty)$$

Άσκηση 79. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$
$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 5x - 1, & x < 2 \\ -2x + 3, & x \geq 2 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ 2x^4, & x > 0 \end{cases}$$
$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} x + 5, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (6) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 80. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = -3|x+1| + 2 \quad (2) \quad f(x) = 2|x-2| + 1$$
$$(3) \quad f(x) = -3\sqrt{x-1} + 2 \quad (4) \quad f(x) = 5\sqrt{x-2} + 7$$
$$(5) \quad f(x) = \sqrt{|x|} \quad (6) \quad f(x) = x^2 - |x|$$

Άσκηση 81. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 3, & 0 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$$

Άσκηση 82. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 - 4$. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f , καθώς και το σύνολο $f(\Delta)$, όταν:

$$(1) \quad \Delta = [2, 3] \quad (2) \quad \Delta = (-4, 1] \quad (3) \quad \Delta = (-2, 2) \quad (4) \quad \Delta = (5, +\infty) \\ (5) \quad \Delta = [0, +\infty) \quad (6) \quad \Delta = (-\infty, \frac{1}{2}) \quad (7) \quad \Delta = (-\infty, \frac{3}{2}] \quad (8) \quad \Delta = \mathbb{R}$$

Άσκηση 83. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αποδείξτε ότι η συνάρτηση f διαθέτει ολικό ακρότατο, το οποίο να βρείτε:

$$(1) \quad f(x) = 3|x-2| + 4 \quad (2) \quad f(x) = -\ln^2 x + 2 \\ (3) \quad f(x) = (x-1)^2 + 2(x-1)^4 - 3 \quad (4) \quad f(x) = -(x-5)^4 + 1 \\ (5) \quad f(x) = 2\sqrt{x+1} + 5 \quad (6) \quad f(x) = -2|x-1| - |x^2-1|$$

Άσκηση 84. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 5x + \alpha(1-x)$.

Άσκηση 85. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή συνάρτηση. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, αποδείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

Άσκηση 86. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια συνάρτηση. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, αποδείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

Άσκηση 87. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν $x < 0$.

Άσκηση 88. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 89. Έστω f, g δύο γνησίως μονότονες συναρτήσεις με το ίδιο είδος μονοτονίας. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f + g$ διαθέτει επίσης το ίδιο είδος μονοτονίας.

Άσκηση 90. Έστω f, g δύο γνησίως μονότονες συναρτήσεις, με διαφορετικό είδος μονοτονίας. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f - g$.

Άσκηση 91. Έστω f, g δύο μη αρνητικές και γνησίως μονότονες συναρτήσεις, με το ίδιο είδος μονοτονίας. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση fg διαθέτει επίσης το ίδιο είδος μονοτονίας.

Άσκηση 92. Έστω f, g δύο μη θετικές και γνησίως μονότονες συναρτήσεις, με το ίδιο είδος μονοτονίας. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση fg διαθέτει διαφορετικό είδος μονοτονίας.

Άσκηση 93. Έστω συναρτήσεις f, g , ορισμένες στα σύνολα A, B ώστε να ορίζεται η $g \circ f$. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι γνησίως μονότονες.

- (1) Αν οι f, g διαθέτουν το ίδιο είδος μονοτονίας, αποδείξτε ότι $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.
- (2) Αν οι f, g διαθέτουν διαφορετικό είδος μονοτονίας, αποδείξτε ότι $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 94. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h_1 = 3f - 2g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- (2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h_2 = -5f + 4g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- (3) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h_3 = (f \circ g) + (g \circ f)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- (4) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h_3 = (f \circ f) + (g \circ g)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 95. Να μελετήσετε ως προς μονοτονία τη συνάρτηση f στο διάστημα Δ , όταν:

- | | |
|---|--|
| (1) $f(x) = \sin x + \frac{1}{x}, \Delta = (0, \pi]$ | (2) $f(x) = \ln x + x^3, \Delta = (0, +\infty)$ |
| (3) $f(x) = x - \sin x, \Delta = (0, \pi)$ | (4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \Delta = (0, \frac{\pi}{2})$ |
| (5) $f(x) = x^3 \sin x, \Delta = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ | (6) $f(x) = -x^2 \sin x, \Delta = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ |

Άσκηση 96. Να μελετήσετε ως προς μονοτονία τη συνάρτηση f στο διάστημα Δ , όταν:

- | | |
|--|---|
| (1) $f(x) = 3(5 - 2x^3)^5 - 1, \Delta = \mathbb{R}$ | (2) $f(x) = 2 - (1 - x^5)^7, \Delta = \mathbb{R}$ |
| (3) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2-x}, \Delta = (0, 1)$ | (4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \Delta = [1, +\infty)$ |
| (5) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}, \Delta = [1, -\infty)$ | (6) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \Delta = [\frac{1}{2}, +\infty)$ |

Άσκηση 97. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{-x} + 1$ και $g(x) = 2 + 5 \sin x$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$.
- (2) Αποδείξτε ότι η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 2\kappa\pi$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- (3) Επιλύστε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Άσκηση 98. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 10$ και $g(x) = 3x^2 - 9x + \frac{29}{2}$.

- (1) Να βρείτε τα ακρότατα των f, g .
- (2) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
- (3) Να αποδείξετε ότι $\frac{4f(x)}{31} \geq \frac{31g(x)}{4}$.

Άσκηση 99. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = \kappa x^2 - 3\kappa x - \frac{13}{2}$ να είναι ο κ .

Άσκηση 100. Να βρεθεί ο θετικός αριθμός κ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^2 + \sqrt{\kappa}x + \kappa$ να διαθέτει ως ελάχιστο το 0.

Άσκηση 101. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = -\alpha^2 x^2 - 4\alpha^2 x - |\alpha|$ να διαθέτει ως μέγιστο το 3.

Άσκηση 102. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - (4\alpha - 1)x + 1$ να διαθέτει ως ελάχιστο το -1 .

Άσκηση 103. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το μέγιστο ή το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = \lambda x^2 - 2\lambda x + 4$.

Άσκηση 104. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$.
- (2) Να βρείτε για ποιο λ η παράσταση $\Pi = x_1(x_1 + 3x_2) + x_2(x_2 + 3x_1)$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή και ποια είναι αυτή.

Άσκηση 105. Έστω f γνησίως μονότονη συνάρτηση με πεδίο ορισμού Δ και $f(\Delta) \subseteq (-1, 1)$.

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)^2}$ διαθέτει ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Άσκηση 106. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού, που παρουσιάζουν μέγιστο (αντιστοίχως ελάχιστο) στο σημείο x_0 .

- (1) Αποδείξτε ότι η $f + g$ παρουσιάζει μέγιστο (αντιστοίχως ελάχιστο) στο σημείο x_0 .
- (2) Αν οι f, g είναι θετικές, αποδείξτε ότι η $f \cdot g$ παρουσιάζει μέγιστο (αντιστοίχως ελάχιστο) στο σημείο x_0 .

Άσκηση 107. Έστω $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Άσκηση 108. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) \cdot 2^{f(x)} = e^x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- (2) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 109. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$e^x \cdot 3^{f(x)} + f(x) = 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- (2) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 110. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , ορισμένη και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) + f(4x) > f(2x) + f(8x)$.

Άσκηση 111. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(2x) + f(4x) > f(3x) + f(5x)$.

Άσκηση 112. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Να επιλυθεί η εξίσωση $f(x^2) + f(x^5) = f(x^3) + f(x^6)$.

4. Συναρτήσεις VI: 1-1 & αντιστροφή

Άσκηση 113. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι 1-1, όταν:

- (1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ (2) $f(x) = x^3 + 1$ (3) $f(x) = 3^{3x+1} + 1$
(4) $f(x) = |x| + 1$ (5) $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1} + x^2$ (6) $f(x) = x^2 + x + 1$

Άσκηση 114. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι 1-1, όταν:

- (1) $f(x) = -x^2 + 2x$ (2) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ (3) $f(x) = x^2 - 6x + 2$
(4) $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$ (5) $f(x) = \frac{x - 1}{2x - 3}$ (6) $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$

Άσκηση 115. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι 1-1, όταν:

- (1) $f(x) = (x - 1)^{10}(x - 2)^8$ (2) $f(x) = \sqrt[3]{x - 3}$ (3) $f(x) = \sqrt[4]{|x + 2|}$
(4) $f(x) = |x| + x$ (5) $f(x) = \sin x + \eta\mu x$ (6) $f(x) = e^x - e^{-x}$

Άσκηση 116. Να προσδιορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης f , καθώς και το σύνολο τιμών της f , όταν:

- (1) $f(x) = -3x + 4$ (2) $f(x) = \frac{2}{x + 1}$ (3) $f(x) = \frac{x + 1}{3 - x}$
(4) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} + 1$ (5) $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x - 1}}$ (6) $f(x) = \ln(x - 2)$

Άσκηση 117. Να προσδιορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης f , καθώς και το σύνολο τιμών της f , όταν:

- (1) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$ (2) $g(x) = \ln(2 + e^x)$ (3) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
(4) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ (5) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$ (6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}$

Άσκηση 118. Να προσδιορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, καθώς και το σύνολο τιμών της f , όταν:

- (1) $f(x) = 4 - 3x^2$, $\Delta = (-\infty, 0]$ (2) $f(x) = 1 - x^4$, $\Delta = (0, +\infty)$
 (3) $f(x) = 4x^2 - 2$, $\Delta = (0, +\infty)$ (4) $f(x) = (x+1)^2 - 9$, $\Delta = (-1, +\infty)$
 (5) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $\Delta = [-2, +\infty)$ (6) $f(x) = x^6 - 2x^3 + 5$, $\Delta = [1, +\infty)$

Άσκηση 119. Να προσδιορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης f , καθώς και το σύνολο τιμών της f , όταν:

- (1) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ (3) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x-2, & x > 0 \end{cases}$

Άσκηση 120. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- (1) $(x^2-x)^5 + (x^2-x)^3 = (2x-2)^5 + (2x-2)^3$ (2) $x^7 + 2x^5 = 4 - x$
 (3) $e^{x-2} = 3 - x$ (4) $e^{e-x} = \ln x$
 (5) $\ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+5} = -2x+4$ (6) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^x$

Άσκηση 121. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 4x - x^2$ και να χαράξετε την γραφική παράσταση των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Άσκηση 122. Αποδείξτε ότι οι συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3^x} - 2x$ είναι 1-1 και έπειτα επιλύστε την εξίσωση $f(x^2 - 9) = f(x + 3)$.

Άσκηση 123. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+1) = f(x^2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν είναι αντιστρέψιμη.

Άσκηση 124. Έστω συνάρτηση f με $f(f(x)) = 2x - 1 + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1. Στη συνέχεια, εξετάστε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 125. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1, όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- (1) $f(f(x)) = 4x - 1$ (2) $f(f(x)) = x^9$ (3) $f(f(x)) = x^4$ (4) $f(f(x)) = 2$

Άσκηση 126. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Άσκηση 127. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 1$ και $g(x) = 3x - 2$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

$$(f \circ g)^{-1}, \quad (g \circ f)^{-1}, \quad g^{-1} \circ f^{-1}, \quad f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 128. Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι επίσης 1-1.

Άσκηση 129. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$.

- (1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- (2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (3) Να ορίσετε την f^{-1} .

Άσκηση 130. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$(g \circ g)(x) = \alpha g(x) + \beta f(x^5 + 2x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Αν η f είναι 1-1, αποδείξτε ότι η g είναι 1-1.

Άσκηση 131. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

- (1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (2) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- (3) Να ορίσετε την f^{-1} .
- (4) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$.

Άσκηση 132. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2 \ln x - 3}{5}$ και $g(x) = 1 + \ln x$.

- (1) Να βρείτε τις συναρτήσεις f^{-1} και g^{-1} .
- (2) Να βρείτε τις συναρτήσεις $F = f^{-1} \circ g$ και $G = g^{-1} \circ f$.
- (3) Αποδείξτε ότι $F^{-1} = G$.

Άσκηση 133. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$.

- (1) Να βρείτε την f^{-1} .
- (2) Να προσδιορίσετε τους α, β ώστε να ισχύει $f^{-1} = f$.

Άσκηση 134. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 και για την οποία ισχύει

$$(f \circ f \circ f)(x^3 - 1) = (f \circ f)(x + 1), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 135. Έστω η συνάρτηση f με $f(f(x)) = x^5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1.
- (2) Αποδείξτε ότι $f^5(x) = f(x^5)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x$.

Άσκηση 136. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(2f(x)) = x + 6 + f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- (2) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από το σημείο $A(-3, -6)$.
- (3) Για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f , αποδείξτε ότι $f(2x) - f^{-1}(x) = x + 6$.

Άσκηση 137. Θεωρούμε συναρτήσεις f, g με $g(\mathcal{D}_f) = \mathcal{D}_f$ ώστε οι g και $f \circ g$ να είναι γνησίως αύξουσες. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 138. Θεωρούμε συνάρτηση f , γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της A . Αποδείξτε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$.

Άσκηση 139. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{15} + 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- (2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική λύση.
- (3) Να βρείτε το πρόσημο της f .

Άσκηση 140. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^{21} + 5x - 7$, $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- (2) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- (3) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

Άσκηση 141. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$.

- (1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (2) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- (3) Να ορίσετε την f^{-1} .
- (4) Να επιλύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

Άσκηση 142. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$.

- (1) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .
- (2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ στον οποίο η συνάρτηση λαμβάνει τιμή 1.
- (3) Να λύσετε την ανίσωση $3x \cdot 2^x + 2^x < 1$.

Άσκηση 143. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln \left(\frac{x+2}{2-x} \right)$.

- (1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.
- (2) Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει $(h \circ g)(x) = x$.
- (3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

Άσκηση 144. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- (1) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .
- (2) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- (3) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$.
- (4) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$.

Άσκηση 145. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(2) = 5$.

- (1) Να βρείτε το $f(5)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- (3) Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.
- (4) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$.

Άσκηση 146. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$3f(x) + 2f^3(x) = 4x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .
- (2) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
- (3) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} , αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$.
- (4) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(2e^{x-1}) = f(3 - x)$.

Άσκηση 147. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

- (1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- (2) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
- (3) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- (4) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f \circ f \circ g$.

Άσκηση 148. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, για κάθε $x, y > 0$,
- η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική λύση.

- (1) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- (3) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(y) = f(xy)$, για κάθε $x, y > 0$.

Άσκηση 149. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της f διαθέτει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Άσκηση 150. Έστω f γνησίως μονότονη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f^{-1} διαθέτει το ίδιο είδος μονοτονίας.

Άσκηση 151. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha(x-1)}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι 1-1. Για τις τιμές αυτές, να βρεθεί η αντίστροφή της f .

5. Όρια Ι: όρια σε πραγματικό αριθμό

5.1 Υπολογισμός ορίων

Άσκηση 152. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 2}{x - 2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$$

Άσκηση 153. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + x - 1}{8x^2 - 2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4}{3x^2 - 6}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - 20}{x^2 - 16} + \frac{2}{x - 4} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 4x^2 - x - 2}{\frac{x}{2} + 1}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 4)^3 - 27}{(x + 6)^2 - 25}$$

Άσκηση 154. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{5 + x} - 1}{x^2 + 4x}$$

Άσκηση 155. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{16 - x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x^2 - 9}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{2\sqrt{x} - \sqrt{8}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{2x + 6}}{1 - \sqrt{x + 2}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3x^2 - 243}{x - \sqrt{x} - 6}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 4}$$

Άσκηση 156. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^4 - x - 1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \frac{9}{x}}{x^2 - \frac{27}{x}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{|x + 2|}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4 + 3|x|}{x - 1}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|4x - 2| - |x + 1|}{x^2 - 1}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2x + 2| - |x + 4|}{|x + 3| - |3x - 1|}$$

Άσκηση 157. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3 + 2x^2 + 3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x \eta\mu 5x}{(x - x^3)^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{1 + x \eta\mu x}}{x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi^2 x - \sin^2 x}{x^2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sigma\varphi^2 x$$

Άσκηση 158. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\epsilon\varphi \pi x}{x - 5}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu 2\pi x}{\eta\mu 4\pi x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu \pi x}{\sqrt{x+1} - 2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\eta\mu x - 1}{6x - \pi}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - \eta\mu x}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{16x^2 - \pi}{1 - \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu x}$$

Άσκηση 159. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{|x^2 - 4|}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + |x + 1| + 1}{x - |x + 1| + 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| - x + 2}{x + |x - 2| - 2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{-x - 2}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x-1})^2}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9 - |3 - x| + |x^2 - 3x|}{x - 3}$$

Άσκηση 160. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - |x + 1|}{\sqrt{-x - 1}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 2| + 3|x - 1| - 2x - 1}{2x - 8}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5|x + 2| + x^2 - 4}{3x + 9}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|2 - x| + 2|x + 3| - 4x}{x - 4}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x - 5| - |x - 2| - 3}{2x + 6}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 4| - |x^2 + 5x| + 1}{3x^2 - 3}$$

Άσκηση 161. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x| - 2|9 - x^2| + 8}{6 - 3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x^2 + 3|x|}{x^4 + 4x^2 - 3|x|}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{|x^3 - 3x^2 + 4|}{x^3 + 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{2x + 6}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - |x|}{x + |x|}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$$

Άσκηση 162. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + \sqrt{x}}{|x| - \sqrt{x}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|} - |x|}{\sqrt{|x|} + x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|} - x}{\sqrt{|x|} + x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}}{\sqrt{x + 7} - 3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$$

Άσκηση 163. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2x^2 + (1 - 2\alpha)x - \alpha}{x^2 - \alpha^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{x^4 - \alpha^4}{x^3 + \alpha^3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \alpha x}{x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\eta\mu x - \eta\mu \alpha}{x - \alpha}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\alpha}{2}} \left((2x - \alpha) \varepsilon\phi \left(\frac{\pi x}{\alpha} \right) \right)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 - x^2}{|x| - \alpha}$$

5.2 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 164. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{|x - 1|}$ και, με τη βοήθεια αυτής, να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Άσκηση 165. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και, με τη βοήθεια αυτής, να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 2, & x \leq 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2 \qquad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 3 \\ \frac{9}{x}, & x > 3 \end{cases}, \quad x_0 = 3$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad x_0 = 0 \qquad (4) \quad f(x) = \frac{|2 - x|}{-2 + x}, \quad x_0 = 2$$

$$(5) \quad f(x) = x - |1 - x|, \quad x_0 = 1 \qquad (6) \quad f(x) = |x - |x||, \quad x_0 = 0$$

Άσκηση 166. Να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το όριο της f στο $x_0 = -2$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} -5x + 6, & x \neq -2 \\ 16, & x = -2 \end{cases} \qquad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x < -2 \\ x + 19, & x \geq -2 \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq -2 \\ x + 3, & x > -2 \end{cases} \qquad (4) \quad f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq -2 \\ |x| - 8, & x > -2 \end{cases}$$

Άσκηση 167. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x \leq -1 \\ 2x + 6, & -1 < x \leq 2 \\ x^2, & 2 < x < 5 \end{cases}.$$

Να υπολογίσετε το όριο της f , αν υπάρχει, στα σημεία $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$, $x_7 = 6$.

Άσκηση 168. Έστω f, g συναρτήσεις με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x + 1} = 15$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g^2(x)}{f(x) - 5x}$.

Άσκηση 169. Έστω f, g συναρτήσεις με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{g(x)} = 6$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Άσκηση 170. Έστω f, g συναρτήσεις με $\lim_{x \rightarrow 0} (f^2(x) + g^2(x)) = 14$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (f^2(x) - g^2(x)) = 6$.
Να υπολογίσετε το όριο:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (f^4(x) - g^4(x)) \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (3f^6(x) + 5g^4(x))$$

Άσκηση 171. Έστω f συναρτήσεις με

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \eta \mu 2x - x^2 f(x)}{x^2} = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \eta \mu 2x + x^2 f(x)}{x^2} = -1.$$

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

Άσκηση 172. Έστω f συναρτήσεις με

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 f(x) + 3g(x)) = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)\sqrt{x^2 + 3}) = 3.$$

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Άσκηση 173. Έστω f συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x)}{x} = \alpha$.

Άσκηση 174. Έστω f περιττή συνάρτηση.

(1) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x-1) - f(1-x))$.

(2) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$.

Άσκηση 175. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \beta \\ 2(x + \alpha) + 1, & x > \beta \end{cases}.$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο β .

Άσκηση 176. Για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lambda(3 - 2\lambda)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στο 2.

Άσκηση 177. Έστω συναρτήσεις f, g και x_0 σημείο στο οποίο υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Άσκηση 178. Αν f είναι συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{5 - 3f(x)} = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Άσκηση 179. Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 9} = 5$. Να βρείτε τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x - 3}{x^2 - 9}$$

Άσκηση 180. Αν f είναι συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$, να βρείτε τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) + x - 1) \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f^2(x) - 7f(x) - 4}{f^2(x) - 16} \qquad (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{3f(x) - 12}$$

Άσκηση 181. Θεωρούμε συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = -2$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 f(x) - 18}{x - 3}$$

Άσκηση 182. Θεωρούμε συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - \eta\mu x}{x^2 - x} = 5$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} \qquad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3 - 5f(x)| - 2}{x^3 - x}$$

Άσκηση 183. Θεωρούμε συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (f(5x - 3) + x) \qquad (2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 f(-2x) + 5) \qquad (3) \lim_{x \rightarrow 5} (f(7 - x) + f(x - 3))$$

Άσκηση 184. Θεωρούμε συναρτήσεις f, g με

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x^2 - 3x + 2)) = 5.$$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$.

Άσκηση 185. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^5(x) + x^4 f(x) = 2x^5, \qquad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ακόμα υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και ισούται με $l \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και τον αριθμό l .

Άσκηση 186. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + x^6 f(x) = 2x^9, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ακόμα υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ και ισούται με $l \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και τον αριθμό l .

Άσκηση 187. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x + \alpha, & x < 2 \\ x + \alpha^2 - 2, & x > 2 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

Άσκηση 188. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x < -2 \\ \alpha^2 x + 3, & -1 \leq x < 0 \\ 3\alpha, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

- (1) Η f διαθέτει όριο στο -1 . Ποιο είναι το όριο αυτό;
- (2) Η f διαθέτει όριο στο -1 , όχι όμως στο 0 .

Άσκηση 189. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

- (1) Αποδείξτε ότι το όριο της f στο $x_0 = 1$ είναι ίσο με 2 .
- (2) Αν $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, $x \neq 1$, εξετάστε αν υπάρχει το όριο της g στο $x_0 = 1$.

Άσκηση 190. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \alpha + 1}{x - 1}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Να βρείτε τα α, β ώστε η f να έχει όριο στο 1 .

Άσκηση 191. Προσδιορίστε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{x + 1} = 4$.

Άσκηση 192. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

και η $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \eta \mu x + 2x}{3x} = 5$,
- $g(x + 3) = g(x) + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

- (1) Το κ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- (2) Τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

Άσκηση 193. Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2\sqrt{3x} \leq f(x) \leq x + 3, \quad (*)$$

για κάθε $x \geq 0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 6}{x - 3}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x}{x - 3}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x^2 + 3}{x^2 - 9}$

Άσκηση 194. Θεωρούμε συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$. Υποθέτουμε ότι

$$f(x) - f(x - 2) = 4, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x + 6) - f(x) = 12$.
- (2) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$.

Άσκηση 195. Θεωρούμε συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. Υποθέτουμε ότι

$$f(2x) = f(x) + 3x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(8x) = f(x) + 21x$.
- (2) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 16} f(x)$.

Άσκηση 196. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad x^2 - 2x + 3 \leq f(x) \leq 2x^2 - 4x + 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad \ln^2 x \leq f(x) \leq 3 \ln^2 x, \quad x > 0$$

Άσκηση 197. Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$|\eta\mu x - xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο της f στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 198. Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$10x - 50 \leq (x - 5)f(x) \leq x^2 - 25, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο της f στο $x_0 = 5$.

Άσκηση 199. Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 4 < x + 4f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2$.

Άσκηση 200. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\eta\mu \sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}}}$.

6. Όρια II: μη πεπερασμένα όρια

6.1 Υπολογισμός ορίων

Άσκηση 201. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2x-4}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2-4}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^4-16}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{8-x^3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2-3x+2}$$

Άσκηση 202. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x+3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x+3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{2-x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x^2-9}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^3+27}$$

Άσκηση 203. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x^2+x-6}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{-3x-x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7}{x^3+x^2-5x+3}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^2-3x|+x}{x+2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+2}}$$

Άσκηση 204. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^4-2x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(x-3)^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{(x-8)^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+4|}{|x+1|}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x^3-3x^2+3x-1}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+7}-2}$$

Άσκηση 205. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - 3}{(x - 2)^5}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2 - 3x}{ x - 2}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{ x - 1}$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ x } - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ | (6) $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3 - 3x^2 + 4}$ |

Άσκηση 206. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{ x^2 - 4x + 1 + 3 x - 2 }{ x - 1 - 2}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 1}{x - 5\sqrt{x} + 6}$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3\sqrt{x}} \right)$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 10}{x - 2\sqrt{2x} + 2}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{x^6}}$ |

Άσκηση 207. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{4x - 5}{\eta\mu x}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{4}{\eta\mu \pi x}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x}{1 - \sigma\upsilon\nu^3 x}$ | (4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - 2}{1 - \eta\mu x}$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{2 \epsilon\phi x - 3 \eta\mu x}{1 + \eta\mu x}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \eta\mu x + 1}{2 \eta\mu^2 x - 1}$ |

6.2 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 208. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε από αυτήν το όριο της f στο $x_0 = -1$.

Άσκηση 209. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 - 4}, & -2 < x < 2 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 2}{x - 3}, & 2 \leq x < 3 \end{cases}.$$

Υπολογίστε τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad (3) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

Άσκηση 210. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{(x+2)^3}, & x < -2 \\ \frac{\sqrt{x+2}}{x+2}, & x > -2 \end{cases}.$$

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο της f στο $x_0 = -2$.

Άσκηση 211. Να βρείτε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f(x) = \frac{1 + \eta\mu^2 x}{\sqrt{2x^2 - x + 5} - \sqrt{x + 9}}$ στο $x_0 = -1$.

Άσκηση 212. Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης f στο 1, όταν:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{f(x)} = +\infty \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x + 3} = -\infty \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 4)f(x) = +\infty$$

Άσκηση 213. Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης f στο 3, όταν:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 2}{f(x)} = +\infty \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = +\infty \quad (3) \lim_{x \rightarrow 3} (f(x)(x^2 - 3x + 1)) = -\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 f(x)) = +\infty \quad (5) \lim_{x \rightarrow 3} (2x - f(x)) = +\infty \quad (6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{(x-3)f(x)} = -\infty$$

Άσκηση 214. Έστω συναρτήσεις f, g με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x) - 1} = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

Άσκηση 215. Έστω συναρτήσεις f, g με

$$\lim_{x \rightarrow -3} (2f(x) - 3g(x)) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -3} (3f(x) + 2g(x)) = -1.$$

Υπολογίστε τα $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$.

Άσκηση 216. Έστω συναρτήσεις f, g με

$$f^2(x)g(x) = -4, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Άσκηση 217. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{f(x)} = 0$, υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f^2(x) - 12}{3 - f(x)}$.

Άσκηση 218. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{|x - 1|}$ και $g(x) = \frac{1}{|x^2 - 1|}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

- | | | |
|--|--|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ | (3) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)g(x))$ | (5) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$ | (6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}$ | (8) $\lim_{x \rightarrow 1} (f^2(x) + g^2(x))$ | (9) $\lim_{x \rightarrow 1} ((x^2 - 3x + 2)f(x))$ |

Άσκηση 219. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 5)^4}$ και $g(x) = \frac{2x}{(x - 5)^4}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

- | | | |
|--|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ | (3) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) + g(x))$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x)g(x))$ | (5) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) - g(x))$ | (6) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{g(x)}$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{g(x)}{f(x)}$ | (8) $\lim_{x \rightarrow 5} (f^2(x) - g^2(x))$ | (9) $\lim_{x \rightarrow 5} ((x^2 - 5x)f(x))$ |

Άσκηση 220. Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$. Υπολογίστε τα όρια:

- | | |
|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{f(x)}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 5f(x)}{3f^2(x) + 10}$ |
|---|--|

Άσκηση 221. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{\lambda x^2 + x - 6}{|x - 2|}$ στο $x_0 = 2$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 222. Να βρείτε τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - \kappa x - \lambda}$ να διαθέτει μη πεπερασμένα πλευρικά όρια στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = -3$.

Άσκηση 223. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, υπολογίστε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + \alpha}{|x - \beta|}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\alpha x^2 - 3x + \beta}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2 + \alpha}{x^2 - \beta}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \alpha x + \beta - 3}{x^2 - 4}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin x + 3 \eta \mu x - \beta}{x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2x - 6 + \alpha}{|x - \alpha|}$$

Άσκηση 224. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, υπολογίστε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} - \alpha}{|x| - \alpha}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 - 2}{|x - 1|}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + \alpha}{(x - 5)^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3\alpha}{|x - 3|}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5\alpha}{x - \alpha}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 - \alpha}{x^2 + \alpha}$$

Άσκηση 225. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι πραγματικός αριθμός το όριο:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \alpha x + 2}{x - 2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \alpha x + 2}{(x - 2)^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \alpha x + 2}{(x - 2)^3}$$

7. Όρια ΙΙΙ: όρια στο άπειρο

7.1 Υπολογισμός ορίων

Άσκηση 226. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3)$ | (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 3}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x)$ | (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 - 2x}$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 9)$ | (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(x - 3))$ |

Άσκηση 227. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 7x + 9)$ | (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^8 + 3x^2 + 6x)$ | (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 9x}$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - x)(x^2 - 3)}{2x^2 - 1}$ |

Άσκηση 228. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x + 2)$ | (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^2 + 3 - 4x^3)$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x^2 - 7x}$ | (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{3x^3 + 5x - 2}$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{-2x^4 + 3x^3}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 5x^4}{x^3 - 9x}$ |

Άσκηση 229. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|---|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2})$ | (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x^2 - x + 1}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^4 - x^3 + 1}$ | (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + 2}}$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x^2)$ | (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}} - \sqrt{\frac{x^2 + x}{x + 2}} \right)$ |

Άσκηση 230. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} - x \right) & (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{(x-1)(x-2)} + x \right) \\
 (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x^2 + 1}}{|x-3|} & (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 5 \right) \\
 (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^4 + 3} - 4\sqrt{x^4 + 4x + 2} \right) & (6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x} + 2x \right)
 \end{array}$$

Άσκηση 231. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2-x} + 2x}{x^2 - 1} & (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}} \\
 (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3-x^2)} \right) & (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt[3]{x^3+2x} - x} \\
 (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+4x^2+5} - x^2}{x+4} & (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2+5x+7} - 7}{x-1}
 \end{array}$$

Άσκηση 232. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \right) & (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{2x + 3\sqrt{x^2+1}} \\
 (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} & (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right) \\
 (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x-1} \right) & (6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - |x+1|}{\sqrt{1-x}}
 \end{array}$$

Άσκηση 233. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{16x^2 + 5x + 3} - 4x + 1 \right) & (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x - 2} + \sqrt{9x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 2x} + x - 3} \\
 (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x + 3}{\sqrt{9x^2 + x - 2} - \sqrt{9x^2 + 2}} & (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{(x-1)(3x+2)}} \\
 (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+3}{x} - \frac{x^2-4}{x-1}} & (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\sqrt{\frac{(1-2x)^2}{x^2} + 5} - 3 \right) \right)
 \end{array}$$

Άσκηση 234. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x+1| - 3)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x+1| - |x-1|)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + |-x+1|)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 3x| + x}{x+2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1| + x}{x+3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |1-x|}{2x-1}$$

Άσκηση 235. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x|x^3 - 1| + x^2 + 1)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} |x^3 - 3x + 2|$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-5| - |9-x^2| + 2}{3x-6}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x-1| - 3|4-2x| + 1}{5x^4 + 2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x^2+5} + \frac{1}{x-2} \right|$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)|x+2||x+3| + 1}{x^2 + 1}$$

Άσκηση 236. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{x+1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^x$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2^x + 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + x)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 2^{-x})$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x}{4^x + 5^x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^x}{4^x + 5^x}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right)^{x-1}$$

Άσκηση 237. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot 3^{\frac{3}{x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^2+1}{x-2}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2-x^3}{x^2+x}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - 4^x)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x - 10^x)$$

Άσκηση 238. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{5}{4} \right)^x - \left(\frac{3}{2} \right)^x \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{4}{9} \right)^x - \left(\frac{3}{4} \right)^x \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 2}{x^5 + 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 3}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 1}{2^{x+1} + 3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 2^x}{e^x + 2^{x+3}}$$

Άσκηση 239. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \ln^2 |x|}{4 - \ln^2 |x|}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x + 1}{\ln^2 x - \ln x + 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \ln 3x - \ln(x^2 + 1))$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \ln x - \ln(2x^2 - x + 1))$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x + \eta \mu x) - 2 \ln x)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(2 + e^{x+3}))$$

Άσκηση 240. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{-x}) - \sqrt{x})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 \ln(2x) - x^2)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\sqrt{x^2 + 1}) - x + 1)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^3 + 1)}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^3 - 5)(x^5 + 1) - 8 \ln |x|$$

Άσκηση 241. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \eta \mu x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3) \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \varepsilon \varphi \left(\frac{1}{x} + 2 \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \eta \mu \frac{1}{x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \eta \mu^4 \frac{1}{x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}} + \frac{1}{x} \right) \varepsilon \varphi \left(\frac{2}{x^2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

7.2 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 242. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} xg(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

Άσκηση 243. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$, όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x + 1} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 2}}{x + 1} \quad (3) \quad f(x) = \sqrt{9x^2 - x} - 3x$$

Άσκηση 244. Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - 1)f(x)}{x + 2} = \frac{4}{5}$. Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Άσκηση 245. Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3f^2(x) - 2f(x)}{f^2(x) + 4f(x) + 5}.$$

Άσκηση 246. Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) - 5) = 2$. Υπολογίστε τα όρια:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{f(x) - x^2}$$

Άσκηση 247. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + 2) - 2f(x + 1) + f(x)) = 0.$$

Άσκηση 248. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = ((\alpha - 1)x^4 + x^3 - 2x - 5) \quad (2) \quad f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + 2x + 3}{4x + 7}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{\alpha(x^2 + x) - (2x^2 + 1)}{\alpha^2 x^2 - 4x(x + 2) + 1} \quad (4) \quad f(x) = \frac{(\alpha - 2)x^3 + (\alpha + 3)x + 5}{(\alpha - 5)x^2 + x + 1}$$

$$(5) \quad f(x) = \alpha x + \sqrt{3 + 4x - x^2} \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - (\alpha - 1)x - 12$$

Άσκηση 249. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in (0, +\infty)$, υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{\alpha^x + 4}{2\alpha^x + 3} \quad (2) \quad f(x) = \frac{\alpha^x + 5 \cdot 3^x}{4\alpha^x + 3^{x+1}} \quad (3) \quad f(x) = \frac{2\alpha^x + 3 \cdot 2^x}{\alpha^x + 5^x}$$

Άσκηση 250. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^4 + (\alpha^2 - 1)x^3 + (\alpha + 1)x^2 + 2}{(\beta + 1)x^3 + 3x + 4}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) Να υπολογίσετε το όριο της f στο $+\infty$, για τις διάφορες τιμές των α, β .

(2) Να υπολογίσετε τα α, β ώστε το όριο της f στο $-\infty$ να ισούται με 0.

Άσκηση 251. Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = \frac{\alpha x^2 + 5x - 2}{\beta x^2 - 4}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Για τις διάφορες τιμές των α, β , να υπολογίσετε τα όρια:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Άσκηση 252. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, όταν:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} - (\alpha x + \beta) \right) = 3$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - (\alpha x + \beta) \right) = 2$

Άσκηση 253. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$ ημ α , όπου $\alpha \in [0, 2\pi]$.

(1) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) Βρείτε την τιμή του α ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Άσκηση 254. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + \alpha x + 1 \right)$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 255. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^4 + 3x^2 + 2} - \kappa x^2 + \lambda x - \mu$, όπου $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Προσδιορίστε τους κ, λ, μ ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{11}{4}$.

Άσκηση 256. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} - \kappa x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \lambda x}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Προσδιορίστε τους κ, λ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{6}$.

Άσκηση 257. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} + \alpha x - 2\beta \right) = 1.$$

Άσκηση 258. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{x+1} + e^x}{\alpha^x + e^{x+1}}$.

Άσκηση 265. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x}{1 + x^2}$.

(1) Να αποδείξετε ότι $\frac{-|x| + 1}{1 + x^2} \leq f(x) \leq \frac{|x| + 1}{1 + x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Άσκηση 266. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Θεωρούμε πολωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = -4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x + \alpha} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x)}{x + \alpha} = \beta.$$

Να βρείτε τον τύπο της P και τους α, β .

Άσκηση 267. Θεωρούμε γνησίως αύξουσα πολωνυμική συνάρτηση P . Αποδείξτε ότι είναι περιττού βαθμού.

Άσκηση 268. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , τέτοια ώστε $f(x) \geq e^x$, για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Άσκηση 269. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , τέτοια ώστε $f(x) \leq -\ln x$, για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

8. Συνέχεια I: βασικές έννοιες

8.1 Συνέχεια σε σημείο

Άσκηση 270. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο x_0 τη συνάρτηση f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x < 3 \\ 3, & x = 3 \end{cases}, \quad x_0 = 3 \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3, & x < 2 \\ 6x + 1, & x \geq 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2 \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x < -1 \\ 4, & x = -1 \\ 2x, & x > -1 \end{cases}, \quad x_0 = -1$$

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \frac{\sin x - x^2}{x^2}, & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \quad (6) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x^2}, & x < 0 \\ \sin \frac{x}{2}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

Άσκηση 271. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2, αποδείξτε ότι και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x^2 + \eta \mu f(x)$ είναι συνεχής στο 2.

Άσκηση 272. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, αποδείξτε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x^2 + f(\sin x)$ είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 273. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 και

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x < x_0 \\ g(x), & x \geq x_0 \end{cases},$$

αποδείξτε ότι η h είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $f(x_0) = g(x_0)$.

Άσκηση 274. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $F(x) = 3f(x) - g(x)$ και $G(x) = f(x) + 2g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 . Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 .

Άσκηση 275. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την g συνεχή στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν η $f + g$ είναι ασυνεχής στο x_0 τότε η f είναι επίσης ασυνεχής στο x_0 .

Άσκηση 276. Έστω f συνεχής στο 4 συνάρτηση με $f(x) = \frac{5x^2 - 21x + 4}{x - 4}$, για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 277. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο 2 συνάρτηση με

$$(x - 2)f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$.

(2) Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 278. Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο 0. Να βρείτε το $f(0)$, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad xf(x) + x^2 = 3\eta\mu x - 5x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2) \quad xf(x) = x^2f(x) + 2(x^3 - x^2), \quad x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 279. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0:

$$(1) \quad f^2(x) + 4 \leq 4\eta\mu^2 x - 4f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2) \quad 4f^2(x) + 9 \leq 12f(x) + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 280. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 :

$$(1) \quad f^2(x) + g^2(x) \leq (x - x_0)^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2) \quad |f(x)| + |g(x)| \leq |x - x_0|, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 281. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει

$$3x - x^2 - 2 \leq (x - 1)f(x) \leq x^2 - x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

Άσκηση 282. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$ και ισχύει

$$(x - 4)f(x) \leq 16 - x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε την τιμή $f(4)$.

Άσκηση 283. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει

$$\frac{2x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2 + x^4} \leq f(x) \leq 2\frac{e^x - e^{x^2}}{x}, \quad (*)$$

για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Άσκηση 284. Δίνεται η συνεχής στο 0 συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \text{ ή } \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Να βρείτε:

(1) Τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^7 \text{ ή } \frac{2}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2) Την τιμή $f(0)$.

Άσκηση 285. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$|f(x) - \sin x| \leq g(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η g είναι συνεχής στο 0 και η C_g διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 286. Δίνεται συνεχής στο $x_0 = 0$ συνάρτηση f με

$$xf(x) + |\sin x| \leq |x|, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

Άσκηση 287. Θεωρούμε συνάρτηση f , συνεχή στο 3, για την οποία ισχύει

$$|f(x)| \leq x^2 - 6x + 9, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Να βρείτε την τιμή $f(3)$.

Άσκηση 288. Θεωρούμε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει

$$|f(x) + 5x| \leq (x + 2)^4, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

Άσκηση 289. Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$(f(x) - x^2)(f(x) - x^4) \leq 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(2) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Άσκηση 290. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι

$$|f(x)| \leq x^2 - 10x + 25, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$ αν και μόνο αν $f(5) = 0$.

Άσκηση 291. Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$2(1 + \sqrt{\eta\mu x}) \leq f(x) \leq 3 + \eta\mu x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, \pi]$.

(1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

(2) Αν $g(x) = \sin^2 x$ και $h(x) = f(x) - 4$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{g(x)}{h(x)}$.

Άσκηση 292. Δίνεται συνάρτηση f , για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 293. Έστω $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

να είναι πραγματικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 294. Δίνεται συνεχής στο 1 συνάρτηση f , για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2.$$

(1) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.

(2) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1}$.

Άσκηση 295. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)(3x^2 - 48)}{3x - 6} = -\infty$, εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 4$.

Άσκηση 296. Έστω συνεχής στο $x_0 = 1$ συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x - 3}{x - 1} = \frac{11}{4}$.

(1) Αποδείξτε ότι το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f .

(2) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Άσκηση 297. Έστω συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3 - \varepsilon \varphi x}{x^2 - x} = 5$.

(1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(2) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x}$.

Άσκηση 298. Δίνεται περιττή και συνεχής στο $x_0 = 1$ συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10$.

(1) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

(2) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

(3) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 5}{x + 1}$.

Άσκηση 299. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$ συνάρτηση με

$$|f(x) - x| \leq x e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad (*)$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(1) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

(2) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Άσκηση 300. Δίνεται συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Αν η f είναι άρτια, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $-x_0$.

(2) Αν η f είναι περιττή, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $-x_0$.

Άσκηση 301. Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο 2, με $f(3) = 10$ και

$$f(5 - x) = f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να προσδιορίσετε την τιμή $f(2)$.

(2) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 3.

8.2 Συνέχεια στο πεδίο ορισμού

Άσκηση 302. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 5, & x \leq 2 \\ \frac{2-x}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}, & x > 2 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x+1}, & x \neq -1 \\ -2, & x = -1 \end{cases}$$

Άσκηση 303. Να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής, όταν:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, & x \leq 1 \\ \frac{1 - x\sqrt{x}}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \sin x}{x - \pi}, & x < \pi \\ \alpha x + 2, & x \geq \pi \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3 \ln x - 2}{2 - \ln x}, & x > 0 \\ \alpha, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases} \quad (6) \quad f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1} + x, & -1 < x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x, & x > -1 \end{cases}$$

Άσκηση 304. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = 3x - 2.$$

Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Άσκηση 305. Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{x - 6} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 6} (g(x) \cdot (\sqrt{x-2} - 2)) = 2.$$

Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x), & x \neq 6 \\ 8, & x = 6 \end{cases}.$$

Άσκηση 306. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + (\lambda^3 + 1)x - 2, & x < 1 \\ x^4 - (\lambda^2 + \mu + 1)x^2 - 3\lambda, & x \geq 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$.

Άσκηση 307. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 \eta \mu x - \beta, & x < 0 \\ 2x + \alpha, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2\alpha \eta \mu x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Άσκηση 308. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 2 \\ 2x, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{4\alpha x^2}{9} + \beta x, & x \geq 3 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Άσκηση 309. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(\alpha), & x \leq \alpha \\ f(x), & \alpha < x < \beta \\ f(\beta), & x \geq \beta \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Άσκηση 310. Δίνεται συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ συνάρτηση f με $f(0) = f(1)$. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$(1) \quad g(x) = \begin{cases} f(3x), & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ f(3x-1), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2) \quad h(x) = \begin{cases} f(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ f(3x-1), & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ f(3x-2), & \frac{2}{3} < x \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Άσκηση 311. Για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(2) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 312. Για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f(x - y) = f(x) - f(y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- (2) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 313. Για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.

- (1) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.
- (2) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\alpha \in \mathbb{R}^*$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

Άσκηση 314. Για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.

- (1) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.
- (2) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\alpha \in \mathbb{R}^*$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

Άσκηση 315. Για τη συνάρτηση f ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|, \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- (2) Αν $\beta > \alpha$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = \beta x$ διαθέτει το πολύ μία πραγματική λύση.

Άσκηση 316. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x(1+x^2)}{|x|}$, $x \neq 0$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0.
- (2) Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- (3) Να βρείτε την αντίστροφη της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

9. Συνέχεια II: βασικά θεωρήματα

Άσκηση 317. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f διαθέτει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ , όταν:

- (1) $f(x) = x^3 + x - 3$, $\Delta = (0, 2)$ (2) $f(x) = x^3 + \eta\mu x - 3$, $\Delta = (0, \pi)$
(3) $f(x) = x^5 + \ln x + 1$, $\Delta = (\frac{1}{e^2}, 1)$ (4) $f(x) = x + \ln x - \sqrt{x}$, $\Delta = (\frac{1}{2}, 2)$
(5) $f(x) = x - \sigma\upsilon\nu x$, $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$ (6) $f(x) = 2^x + x$, $\Delta = (-1, 1)$

Άσκηση 318. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f διαθέτει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ , όταν:

- (1) $f(x) = x + \eta\mu x + e^x$, $\Delta = (-\pi, \pi)$ (2) $f(x) = x^2(3^{-x} - x^3)$, $\Delta = (-1, 1)$
(3) $f(x) = (x^3 - 1)\ln(x^2 + 1)$, $\Delta = (-1, 2)$ (4) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} - e^x$, $\Delta = (-1, 1)$
(5) $f(x) = 17x^2 - \frac{1}{x^5} - 19$, $\Delta = (-1, 0)$ (6) $f(x) = x^2 - e^x + 11$, $\Delta = (0, 3)$

Άσκηση 319. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο αντίστοιχο διάστημα Δ :

- (1) $(x + 1)2^{x+1} = 1$, $\Delta = (-1, 0)$ (2) $ex^3 = x^2 + 2$, $\Delta = (0, 2)$
(3) $x^4 + 3x + 1 = 0$, $\Delta = (-2, 2)$ (4) $x^6 = -4x^3 - 1$, $\Delta = (-2, 1)$
(5) $\frac{x^5}{x-1} + \frac{e^x}{x-2} = 0$, $\Delta = (1, 2)$ (6) $\frac{x^2 + 5}{x-2} + \frac{\ln x}{x-3} = 0$, $\Delta = (2, 3)$

Άσκηση 320. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης f στο διάστημα Δ :

- (1) $f(x) = (\pi - x) \ln x$, $\Delta = (0, +\infty)$ (2) $f(x) = \ln(\eta\mu x)$, $\Delta = (0, \pi)$
(3) $f(x) = e^x + x - 1$, $\Delta = \mathbb{R}$ (4) $f(x) = 2 \ln x + x^3 - 1$, $\Delta = (0, +\infty)$
(5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16} - \frac{x}{3} - 4$, $\Delta = \mathbb{R}$ (6) $f(x) = |x - 4| - \frac{6}{\sqrt{x + 3}}$, $\Delta = \mathbb{R}$

Άσκηση 321. Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , όταν:

- (1) $f(x) = e^x + x$ (2) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4 - x}$ (3) $f(x) = \ln x - \sqrt{e - x}$
(4) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ (5) $f(x) = 4e^{-x} - \sqrt{x}$ (6) $f(x) = -2 \ln x + \sqrt{1 - x}$

Άσκηση 322. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις διαθέτει ακριβώς μία λύση στο αντίστοιχο διάστημα Δ :

$$(1) \quad x^5 + 25x = 11, \quad \Delta = (0, 1) \qquad (2) \quad e^x = -x^9, \quad \Delta = (-1, 0)$$

Άσκηση 323. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις διαθέτει δύο τουλάχιστον λύσεις στο αντίστοιχο διάστημα Δ :

$$(1) \quad x^3 + 3 = 6x^2, \quad \Delta = (-1, 1) \qquad (2) \quad \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{3}{4-x}, \quad \Delta = (2, 4)$$

Άσκηση 324. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^4 + 3$. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f , καθώς και το σύνολο $f(\Delta)$, όταν:

$$(1) \quad \Delta = [2, 3] \qquad (2) \quad \Delta = (-4, 1] \qquad (3) \quad \Delta = (-2, 2) \qquad (4) \quad \Delta = (5, +\infty)$$

$$(5) \quad \Delta = [0, +\infty) \qquad (6) \quad \Delta = (-\infty, \frac{1}{2}) \qquad (7) \quad \Delta = (-\infty, \frac{3}{2}] \qquad (8) \quad \Delta = \mathbb{R}$$

Άσκηση 325. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \eta\mu^2 \pi x + \sigma\upsilon\nu 3\pi x + 3$, με πεδίο ορισμού το $[-2, 1]$, λαμβάνει την τιμή 4.

Άσκηση 326. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \sigma\upsilon\nu \pi x + 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha \in [2, 3]$ υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = \alpha$.

Άσκηση 327. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = 3 - 2x$ διαθέτει λύση στο διάστημα $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Άσκηση 328. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^8 - 16x - 5 = 0$ διαθέτει λύση.

Άσκηση 329. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\eta\mu x + x^2 - 2 = 0$ διαθέτει μοναδική λύση στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Άσκηση 330. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{x^{10} + 1}{x + 1} + \frac{x^{20} + 2}{x - 1} = 0$ διαθέτει μοναδική λύση στο διάστημα $(-1, 1)$.

Άσκηση 331. Θεωρούμε συνάρτηση f , συνεχή στο $[1, 2]$, με $f(1) < 1$ και $f(2) > 4$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 3x - 2$ διαθέτει λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Άσκηση 332. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^5 + 5x = \kappa$ διαθέτει μοναδική λύση στο διάστημα $[0, 1]$, για κάθε $\kappa \in [0, 6]$.

Άσκηση 333. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$f(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta) + 4(x - \beta)(x - \gamma) + 9(x - \alpha)(x - \gamma), \qquad (*)$$

διαθέτει δύο τουλάχιστον λύσεις.

Άσκηση 334. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x + \sin \alpha = \sin x + \pi$ διαθέτει λύση στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Άσκηση 335. Αν $\alpha, \beta > 0$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $\alpha \sin x + \beta = x$ διαθέτει θετική λύση που δεν υπερβαίνει τον $\alpha + \beta$.

Άσκηση 336. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x-1} = 0$ διαθέτει ακριβώς δύο λύσεις.

Άσκηση 337. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(0) = f(4)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $f(\xi) = f(\xi + 2)$.

Άσκηση 338. Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο $[1, 3]$, με $f(1)f(3) + 3 < 3f(1) + f(3)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \xi$.

Άσκηση 339. Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο $[0, 5]$, τέτοια ώστε $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [0, 5]$. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(5x) - x$ διαθέτει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 340. Έστω συνάρτηση f , συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ με $f(1) = \frac{1}{2}$. Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x) = 2f(x)$ και $h(x) = (1-x) \sin^2 x$ διαθέτουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

Άσκηση 341. Θεωρούμε συνάρτηση f , συνεχή στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 1)$ και δεν διαθέτει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = (2-x)(x-5)$ διαθέτει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(2, 5)$.

Άσκηση 342. Θεωρούμε συνάρτηση f , συνεχή στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = -1$ και

$$f^2(x) = x^4 + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 343. Θεωρούμε συνάρτηση f , συνεχή στο $\mathbb{R}$, με $f(-2) > 0$, $f(3) > 0$ και

$$f^2(x) = (e^x - e)^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 344. Θεωρούμε συνάρτηση f , συνεχή στο $\mathbb{R}$, με $f(1) > 0$ και

$$f^2(x) + 2f(x) = x^2 + x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 345. Έστω συνεχής στο $[-2, 2]$ συνάρτηση f με

$$x^2 + f^2(x) = 4, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [-2, 2]$.

(1) Αποδείξτε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-2, 2)$.

(2) Αν επιπλέον $f(0) = 2$, να βρεθεί ο τύπος της f .

Άσκηση 346. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις f με

$$f^2(x) = 3 + 5x^4, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 347. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 \cdot 2^x$.

(1) Να βρείτε το σύνολο $f([0, 2])$.

(2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - 1 = \alpha$ διαθέτει μοναδική λύση, για κάθε $\alpha \in [-1, 15]$.

Άσκηση 348. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 6x|$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 8]$.

(1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(2) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Άσκηση 349. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x^2 + 1)(x - \alpha) + (2 - \eta\mu x)(x - \beta)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Άσκηση 350. Δίνεται συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 8)$ και $B(5, 12)$.

(1) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f λαμβάνει την τιμή $29/3$.

(3) Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 5)$ ώστε $f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$.

Άσκηση 351. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1, 5]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{3f(2) + 5f(3) + 7f(4)}{15}.$$

Άσκηση 352. Έστω $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1) = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Αποδείξτε ότι η f διαθέτει ρίζα στο $(-1, 1)$.

Άσκηση 353. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2-x}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη.
- (2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (3) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

Άσκηση 354. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- (1) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- (2) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .
- (3) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $f((1, 3])$, $f((-1, 1))$, $f([-\sqrt{3}, +\infty))$ και $f(\mathbb{R}^*)$.

Άσκηση 355. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^3 x^3 + \alpha x + 1, & x < 1 \\ -2\alpha x^2 + 3, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία η f είναι συνεχής.

Άσκηση 356. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + \ln(2-x) - \ln 2$ είναι αρνητική.

Άσκηση 357. Έστω συνάρτηση f , συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $3f(\xi) = f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

Άσκηση 358. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) > g(\alpha)$, $f(\beta) < g(\beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Άσκηση 359. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) + f(\beta) = g(\alpha) + g(\beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Άσκηση 360. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ με $\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta) = 0$, όπου $\kappa, \lambda > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Άσκηση 361. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\beta - \alpha}{2}\right).$$

Άσκηση 362. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Αν $\kappa, \lambda > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)}{\kappa + \lambda}.$$

Άσκηση 363. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $g([\alpha, \beta]) \subseteq [\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $2f(x_0) = (g \circ f)(x_0) + g(x_0)$.

Άσκηση 364. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{1}{x_0 - \alpha} + \frac{1}{x_0 - \beta}$.

Άσκηση 365. Έστω $\alpha > 0$ και συναρτήσεις f, g , για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

- οι f, g είναι συνεχείς στο $[-\alpha, \alpha]$,
- η f είναι περιττή,
- $g(\alpha) = -\alpha$ και $g(-\alpha) = \alpha$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f(g(x_0)) + f(x_0) + g(x_0) = 0$.

Άσκηση 366. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha), f(\beta) \in (\alpha, \beta)$. Αποδείξτε ότι η C_f διαθέτει κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$.

Άσκηση 367. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχείς συναρτήσεις $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

- $f([\alpha, \beta]) = g([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$,
- η f είναι γνησίως φθίνουσα,
- η g είναι γνησίως αύξουσα.

Αποδείξτε ότι οι C_f, C_g διαθέτουν μοναδικό κοινό σημείο.

Άσκηση 368. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με μοναδική ρίζα α . Αν

$$f\left(\frac{\alpha^2 + 1}{2}\right) > 0,$$

να αποδείξετε ότι $f(\alpha + 1) > 0$.

Άσκηση 369. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, με $f(\alpha) = f(\beta)$. Αν γ και δ είναι το μέσο και το μήκος του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, \frac{\delta}{2}]$ τέτοιος ώστε $f(x_0 + \alpha) = f(x_0 + \gamma)$.

Άσκηση 370. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχή και $1 - 1$ συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)f(\beta) > 0$. Αποδείξτε ότι $f(x)f(\alpha) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Άσκηση 371. Έστω P ένα μη σταθερό πολώνυμο. Αν f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με $P \circ f = 0$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Άσκηση 372. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^2$.

Άσκηση 373. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) + f(x_0) = x_0^2 + x_0$.

Άσκηση 374. Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ συνάρτηση, με σύνολο τιμών το $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ με $f(\sin x_0) = \sin x_0$.

Άσκηση 375. Έστω f συνεχής στο $[1, 3]$ συνάρτηση με $f([1, 3]) \subseteq (1, 3)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{3}{x_0}$.

Άσκηση 376. Θεωρούμε συνεχείς στο $[0, 1]$ συναρτήσεις f, g με $f([0, 1]) = g([0, 1]) = [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(f(x_0)) = 2x_0 - g(x_0)$.

Άσκηση 377. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ με $f(0) = f(2)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = f(x_0 + 1)$.

Άσκηση 378. Αν για την ορισμένη στο $[0, 1]$ συνάρτηση f ισχύουν $f([0, 1]) = [0, 1]$ και

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in [0, 1]$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ διαθέτει λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

Άσκηση 379. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 1 + \eta\mu x$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- (2) Να βρείτε το $f([0, \frac{\pi}{2}])$.
- (3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική λύση στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Άσκηση 380. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^4 + 3 \ln x + 1$.

- (1) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .
- (2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- (3) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ διαθέτει μοναδική λύση.
- (4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\lambda > 0$ με $\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$.

Άσκηση 381. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-\alpha} - 1$ και $g(x) = \ln(\alpha x + 1) + \alpha$, όπου $\alpha \in (0, \frac{3}{4})$.

- (1) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha x$ διαθέτει λύση στο διάστημα $[\alpha, \alpha + 1]$.
- (2) Έστω ότι ρ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = \alpha x$ στο $[\alpha, \alpha + 1]$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \rho} g(x) = \rho$.

Άσκηση 382. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνησίως αύξουσα, με $f(1) = 2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(e^{-x}) - e^x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
- (2) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση 383. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- (2) Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- (3) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- (4) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Άσκηση 384. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $[-3, 3]$, για την οποία ισχύει

$$3x^2 + 4f^2(x) = 27, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [-3, 3]$.

- (1) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- (2) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3, 3)$.
- (3) Να βρεθεί ο τύπος της f .
- (4) Αν επιπλέον $f(1) = \sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

Άσκηση 385. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(2, 3)$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- (2) Να βρείτε το πρόσημο της f .
- (3) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(2e^x + 1) = 3$.
- (4) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(3x + 5) \leq 0$.

Άσκηση 386. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

(1) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

(2) Αν $f(0) = -2$, να βρείτε τον τύπο της f .

(3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, όπου $\alpha < 2$.

(4) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, όπου $\alpha > 3$.

Άσκηση 387. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$(x^2 - 4x + 2) \cdot f(x) \leq f(0) + f(4), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να αποδείξετε ότι $f(0) = f(4)$.

(2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 2]$ με $f(\xi^2) = \xi \cdot f(2\xi)$.

Άσκηση 388. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2 \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$.

(2) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 f(\frac{1}{x}))$.

(3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f(\frac{1}{x}) + 4 \eta \mu 3x}{2x^2 + 3 \eta \mu x}$.

(4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

Άσκηση 389. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3 \eta \mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 1905$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(2) Να βρείτε το $f(1)$.

(3) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

Άσκηση 390. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\kappa\eta\mu^2x = x^2f(x) + \sqrt{1 + \eta\mu^2x} - \lambda, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, \frac{1}{2})$.

- (1) Να βρείτε τους κ, λ .
- (2) Αν $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$, να βρείτε την f .
- (3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}$.

Άσκηση 391. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-1) \neq 0$ και $f(1) \neq 0$, για την οποία επίσης ισχύει ότι

$$f^2(x) - 6f(x) + 5 = x^4 + 4x^2. \quad (*)$$

- (1) Να αποδείξετε ότι η f δεν διαθέτει ρίζες.
- (2) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.
- (3) Να βρείτε τον τύπο της f .
- (4) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

Άσκηση 392. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$x^2f(x) + \eta\mu x = xf(x) + \sqrt{x}\eta\mu x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $4f(\xi) = 3\xi$.

Άσκηση 393. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0) + f(1) = 2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $2f(\xi^2) = \xi(f(\xi) + 2)$.

Άσκηση 394. Δίνεται συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^2(2) + f^2(3) - 2f(2) + 4f(3) + 5 = 0$.

- (1) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(3)$.
- (2) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- (3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μέρος II

Διαφορικός Λογισμός

10. Η έννοια της παραγώγου

Άσκηση 395. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

- | | | | |
|------------------------------|-------------|-----------------------------|-----------------------|
| (1) $f(x) = x^2 - 3x + 5,$ | $x_0 = 2$ | (2) $f(x) = x + \eta\mu x,$ | $x_0 = \frac{\pi}{4}$ |
| (3) $f(x) = x \ln x,$ | $x_0 = e^2$ | (4) $f(x) = xe^x,$ | $x_0 = 0$ |
| (5) $f(x) = \sqrt{x + x^2},$ | $x_0 = 1$ | (6) $f(x) = \sqrt{x - 1},$ | $x_0 = 1$ |

Άσκηση 396. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

- | | | | |
|-------------------------------|-----------|------------------------------|------------|
| (1) $f(x) = x^2 - x,$ | $x_0 = 1$ | (2) $f(x) = -\frac{1}{x},$ | $x_0 = -2$ |
| (3) $f(x) = \eta\mu^2 x + 1,$ | $x_0 = 0$ | (4) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8},$ | $x_0 = -1$ |
| (5) $f(x) = x^3 - x^2 ,$ | $x_0 = 0$ | (6) $f(x) = 1 - \ln^2 x,$ | $x_0 = 0$ |

Άσκηση 397. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

- | | | | |
|---------------------------------|------------|----------------------------------|-----------|
| (1) $f(x) = x \sqrt{x},$ | $x_0 = 0$ | (2) $f(x) = x - 2 ,$ | $x_0 = 2$ |
| (3) $f(x) = \eta\mu x ,$ | $x_0 = 0$ | (4) $f(x) = x^2 - x ,$ | $x_0 = 0$ |
| (5) $f(x) = x + \sqrt{3x + 9},$ | $x_0 = -3$ | (6) $f(x) = 3x + x\sqrt{x - 2},$ | $x_0 = 0$ |

Άσκηση 398. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

- | | |
|---|-----------|
| (1) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & x < 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x \geq 1 \end{cases},$ | $x_0 = 1$ |
| (2) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x \leq 2 \\ 2\sqrt{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases},$ | $x_0 = 2$ |
| (3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x}, & x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases},$ | $x_0 = 2$ |
| (4) $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$ | $x_0 = 0$ |

Άσκηση 399. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3(x-1)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad x_0 = 2$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x < \alpha \\ 2\alpha x - \alpha^2 + 3, & x \geq \alpha \end{cases}, \quad x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \leq \alpha \\ 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 + 2, & x > \alpha \end{cases}, \quad x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(4) \quad f(x) = x^2 + |x - 3|, \quad x_0 = 3$$

Άσκηση 400. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x^3, & x < 0 \\ \eta\mu^2 x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 12x + 3, & x < 0 \\ 3x^2 - 12x + 3, & x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11, & x < 2 \\ 4x^3 - 12x^2 + 12x - 7, & x \geq 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$$

Άσκηση 401. Δίνεται συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \eta\mu(\ln x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άσκηση 402. Έστω $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο 1 με $f(1) = g(1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} g(\sqrt[3]{x}), & 0 < x < 1 \\ f(\sqrt{x}), & x \geq 1 \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι η h παραγωγίζεται στο 1 μόνο όταν $3f'(1) = 2g'(1)$.

Άσκηση 403. Αν για συνάρτηση f ισχύει $f(h-4) = 5h^3 - 2h + 1$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f(-4) = 1$ και $f'(-4) = -2$.

Άσκηση 404. Έστω f παραγωγίσιμη στο 2 συνάρτηση και

$$g(x) = \begin{cases} f(3x - 10), & x \leq 4 \\ f(2x - 6), & x > 4 \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 4 αν και μόνο αν $f'(2) = 0$.

Άσκηση 405. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $f(3) = 4$ και $f'(3) = 2$. Βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 16}{x^2 - 9} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \quad (3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 5h}{f(3+h) - 4}$$

Άσκηση 406. Για τη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $f(1) = 2$ και $f'(1) = -3$. Βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 4f(x)}{x^3 - 1} \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h) - 4}{\sqrt{1+h} - 1} \quad (3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

Άσκηση 407. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 . Να υπολογίσετε συναρτήσεις των x_0 , $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x^2 - x_0^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2} \quad (3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^2(x) - f^2(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} \quad (5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{(x - x_0)^2 f(x)} \quad (6) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{e^x - e^{x_0}}$$

Άσκηση 408. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 . Να υπολογίσετε συναρτήσεις των x_0 , $f(x_0)$ και $f'(x_0)$ τα όρια:

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(4h + x_0) - f^2(x_0 - h)}{h}$$

Άσκηση 409. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 5$. Αποδείξτε ότι $f'(1) = 5$.

Άσκηση 410. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^3}{x - 1} = 3$, βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

Άσκηση 411. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 + 3x)}{x} = 5$, βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f'(2)$.

Άσκηση 412. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 2$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$.

Άσκηση 413. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \frac{7}{8}. \quad (*)$$

Να βρεθούν οι τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

Άσκηση 414. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχή στο 0, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

(1) Αποδείξτε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 3$.

(2) Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + f^2(x)}{4x^2 + 2\eta\mu^2 x}$ και $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x+5)}{x^2 - 25}$.

Άσκηση 415. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχή στο 1, με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2 + 4}{x^2 - 1} = 2$.

(1) Αποδείξτε ότι $f(1) = -3$ και $f'(1) = 6$.

(2) Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(11-2x) + 3}{x-5}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) + 3}{h}$.

Άσκηση 416. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει ότι $f'(0) = 2$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$.

Άσκηση 417. Έστω συνεχής στο $x_0 = 2$ συνάρτηση f με $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)}{h} = 3$.

(1) Αποδείξτε ότι $f(2) = 0$ και $f'(2) = -3$.

(2) Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+2x) - f(2-x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(4x+2) - f^2(2-x)}{x}$.

Άσκηση 418. Έστω συνεχής στο 1 συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 1} = l \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xf(x)$. Αποδείξτε ότι $f'(1) = g'(1) = \frac{l}{2}$.

Άσκηση 419. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 1969$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \eta\mu x - x}$.

Άσκηση 420. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \alpha^2 x, & x \leq 1 \\ 7x - \alpha - 3, & x > 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι:

- (1) συνεχής στο 1, (2) παραγωγίσιμη στο 1.

Άσκηση 421. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x > 1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\alpha + 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Άσκηση 422. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , όταν:

- (1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & x < 0 \\ 3\beta + \alpha x & x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$
- (2) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & x < 2 \\ 3x - \beta, & x \geq 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$
- (3) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2, & x < 1 \\ \alpha x - \beta & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$
- (4) $f(x) = \begin{cases} \alpha\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ x - \beta & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

Άσκηση 423. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha x + 2}{x - 3}, & x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (1) Να προσδιορίσετε το α ώστε η f να είναι συνεχής.
 (2) Για την παραπάνω τιμή του α , να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Άσκηση 424. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι παραγωγίζεται σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την $f'(x_0)$.

Άσκηση 425. Προσδιορίστε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - \beta x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άσκηση 426. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (ορισμένη σε κατάλληλο διάστημα), αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)$ ημ x είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άσκηση 427. Αν f είναι συνάρτηση με $f'(0) = 3$ και $f(0) = 2$, να βρείτε την $g'(0)$ όταν:

$$(1) \quad g(x) = x^2 f(x) + x \qquad (2) \quad g(x) = f(x) - \frac{x^2}{f(x)}$$

Άσκηση 428. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 . Να προσδιορίσετε το $g'(x_0)$, αν $g(x) = f(x) + f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 429. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy - 2, \qquad (*)$$

για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζουμε επίσης ότι $f'(0) = 4$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την παράγωγό της.

Άσκηση 430. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$ και για την οποία ισχύει

$$f(x + y) = f(x)e^y + f(y)e^x, \qquad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

(2) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, με

$$f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}.$$

Άσκηση 431. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια και παραγωγίσιμη στο 0 συνάρτηση f . Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x^4 + 2)f(x) + \alpha x$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$.

(2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0) = \alpha$.

Άσκηση 432. Θεωρούμε παραγωγίσιμη στο 0 συνάρτηση f με $f(0) = 0$ και

$$f(x) \leq x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$.

Άσκηση 433. Θεωρούμε παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g με $f(x_0) = g(x_0)$ και

$$f(x) \leq g(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Άσκηση 434. Θεωρούμε συνάρτηση f , τέτοια ώστε

$$-5(x-2)^2 + 3x - 4 \leq f(x) \leq 6(x-2)^2 + 3x - 4, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 2.
- (2) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

Άσκηση 435. Θεωρούμε συνάρτηση f , τέτοια ώστε

$$|x-3|^3 + x + 1 \leq f(x) \leq 2|x-3|^3 + x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 3.
- (2) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 3.

Άσκηση 436. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει

$$-2x + 1 \leq f(x) \leq x^4 - 2x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.
- (2) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και ισχύει $f'(0) = -2$.

Άσκηση 437. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$x^2 \left(\sin \frac{1}{x} - 3 \right) \leq f(x) \leq x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + 3 \right), \quad (*)$$

να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

Άσκηση 438. Αν για τη συνεχή στο 0 συνάρτηση f ισχύει

$$\eta\mu \pi x \leq f(x) \leq \eta\mu \pi x + |x|\sqrt{|x|}, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

Άσκηση 439. Έστω f, g συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ όπου η f είναι συνεχής στο 2, $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(2) = 4$, $g'(2) = 10$ και

$$4\sqrt{g(x)} + 2 \leq f(x) \leq g(x) + 6, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

Άσκηση 440. Έστω f, g συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ όπου η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και

$$|f(x) - g(x)| \leq (x - x_0)^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι επίσης παραγωγίσιμη στο x_0 , με $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Άσκηση 441. Αν f, g είναι συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με $g(2) = 3$, $g'(2) = 0$ και

$$|f(x) - 5| \leq |g(x) - 3|, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

Άσκηση 442. Έστω ότι f, g είναι συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Αν η g είναι συνεχής στο -2 και

$$0 \leq f(x) + g(x)(x^2 - 4) \leq (x + 2)^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο -2 .

Άσκηση 443. Αν για συνεχή στο 0 συνάρτηση f ισχύει

$$||f(x) - 1| - x^2| \leq 3x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$.

Άσκηση 444. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα (α, β) και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να βρείτε συναρτήσεις των x_0 , $f(x_0)$, $f'(x_0)$ τα παρακάτω όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x) - x_0f(x_0)}{x - x_0} \quad (3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x}f(x) - \sqrt{x_0}f(x_0)}{x - x_0}$$

11. Παράγωγος συνάρτησης

11.1 Ορισμός & κανόνες παραγώγισης

Άσκηση 445. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 , όταν:

- (1) $f(x) = x^5$, $x_0 = 1$ (2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ (3) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
(4) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e^2$ (5) $f(x) = \eta\mu x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ (6) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 5$

Άσκηση 446. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f , όταν:

- (1) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 7$ (2) $f(x) = e^x + 2x^3 - 3 \ln x$ (3) $f(x) = \varepsilon\phi x - \sigma\phi x$
(4) $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ (5) $f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ (6) $f(x) = \sqrt[6]{x^5}$

Άσκηση 447. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f , όταν:

- (1) $f(x) = \ln x \sqrt{x}$ (2) $f(x) = x^2 e^x + x^{-4} \ln x$ (3) $f(x) = x \eta\mu x + x^2 \sin x$
(4) $f(x) = (\eta\mu x + \sin x)e^x$ (5) $f(x) = x^3 \ln x$ (6) $f(x) = x e^x \ln x$

Άσκηση 448. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f , όταν:

- (1) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$ (2) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ (3) $f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{1 + \sin x}$
(4) $f(x) = \frac{x \eta\mu x}{e^x \ln x}$ (5) $f(x) = \frac{x e^x}{x + 2}$ (6) $f(x) = \frac{x - e^x}{1 + x \ln x}$

Άσκηση 449. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της συνάρτησης f , με τύπο:

- (1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \leq 1 \\ 4\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$
(3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \leq \frac{1}{4} \\ x, & x > \frac{1}{4} \end{cases}$ (4) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$
(5) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \ln 3, & x > 0 \end{cases}$ (6) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$

Άσκηση 450. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της συνάρτησης f , με τύπο:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x - 4, & x < 0 \\ 3x - \eta\mu x - 4, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e(x^2 + 1)}{2}, & x \leq 1 \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$$

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} 2 \ln x + x, & x \leq 2 \\ 3x - 2, & x > 2 \end{cases}$$

Άσκηση 451. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της συνάρτησης f , με τύπο:

$$(1) \quad f(x) = 5|x - 4| + 2x$$

$$(2) \quad f(x) = 3x^2 + |x - 1|$$

Άσκηση 452. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, όταν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$(1) \quad f(x) = \alpha e^x + \beta, \quad f'(1) = 2, \quad f''(1) = 3 \quad (2) \quad f(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x}, \quad f(1) = 2, \quad f''(1) = 2$$

Άσκηση 453. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & x < \frac{\pi}{2} \\ \alpha x + \beta, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 454. Να βρείτε, όπου ορίζεται, τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f , με τύπο:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^5, & x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x^4 + 5x, & x \geq 0 \\ 5 \eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 455. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta\mu x}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$$

Άσκηση 456. Αν f, g είναι συναρτήσεις με $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1}$ και $g(x) = \frac{|x| + 1}{|x| - 1} + \frac{|x| - 1}{|x| + 1}$, να αποδείξετε ότι $f' = g'$.

Άσκηση 457. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων g, h , όπου $g(x) = \frac{f(x)}{x^4 + 1}$ και $h(x) = \frac{3 + x^2 f(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

Άσκηση 458. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να βρείτε την τιμή $g''(1)$, όπου $g(x) = f(x) \ln x$.

Άσκηση 459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ ημ x . Να αποδείξετε ότι

$$f^{(3)}(x) + 2f'(x) = 2f''(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 460. Να βρείτε πολώνυμο τρίτου βαθμού P τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$P(0) = 1, \quad P'(1) = 7, \quad P''\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad P'''(10) = 12.$$

Άσκηση 461. Να προσδιοριστεί πολωνυμική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$(e^x P(x))' = e^x x(x + 2), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 462. Δίνεται πολωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει

$$(P'(x))^2 = P(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $P'(1) = 8$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

Άσκηση 463. Να βρείτε την πολωνυμική συνάρτηση P , με $P(1) = 2$, για την οποία ισχύει

$$x(P'(x))^2 = 3(P(x) + 1), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 464. Αποδείξτε ότι μια πολωνυμική συνάρτηση $P(x)$ διαθέτει ως παράγοντα το $(x - \rho)^2$ αν και μόνον αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.

11.2 Παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων

Άσκηση 465. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = \sqrt{5x^8 + 1} & (2) \quad \sqrt[3]{x^2 + 1} & (3) \quad \sqrt[4]{(x^2 - 4)^3} \\ (4) & \sqrt{\eta\mu x} & (5) \quad \sqrt[4]{\ln x} & (6) \quad \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \end{array}$$

Άσκηση 466. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & (2) \quad \ln \frac{x+1}{x-1} & (3) \quad \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} \\ (4) & (x^3 + 5x^2 - 1)^4 & (5) \quad e^{x^2-3x} & (6) \quad \ln(x + e^x) \end{array}$$

Άσκηση 467. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) & \eta\mu \sqrt{x} & (2) \quad \eta\mu^3 x & (3) \quad \epsilon\phi x^2 \\ (4) & \ln(\ln x) & (5) \quad \sigma\upsilon\nu(x^3 e^x) & (6) \quad e^{x^2} \ln(x^2 + 1) \end{array}$$

Άσκηση 468. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) & (x^2 + x)^x & (2) \quad (\ln x)^x & (3) \quad x^{\eta\mu^2 x} \\ (4) & \eta\mu(x^x) & (5) \quad e^{x^x} & (6) \quad x^{\eta\mu x} \end{array}$$

Άσκηση 469. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) & (5x^2 - 3)^5 & (2) \quad \ln(x^2 - 4) & (3) \quad 2 \sigma\upsilon\nu^2 x \\ (4) & f(x) = \frac{1}{4} \eta\mu^3(3 - 4x) & (5) \quad \sqrt{2x^2 - 4x + 5} & (6) \quad \frac{(3x - 1)^3}{1 - 2x} \end{array}$$

Άσκηση 470. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) & 3x + \sigma\upsilon\nu 4x & (2) \quad \sqrt{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} & (3) \quad (((1+x)^2 + x^2)^3 + x^3)^4 \\ (4) & \sigma\upsilon\nu(x + \sigma\upsilon\nu x) & (5) \quad \epsilon\phi(\eta\mu x) & (6) \quad \sqrt{\ln^2 x + 1} + \ln^2(\sqrt{x} + 1) \end{array}$$

Άσκηση 471. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) & \eta\mu^2(x^3 - \sigma\upsilon\nu x) & (2) \quad \sigma\upsilon\nu^{1000} x & (3) \quad \sigma\upsilon\nu(x^2 + x^3) \\ (4) & \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x) & (5) \quad \frac{\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)}{x} & (6) \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) \end{array}$$

Άσκηση 472. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) & 2e^{-\frac{x}{4}} & (2) \quad \frac{1}{2^x} & (3) \quad x^3 3^x \\ (4) & \frac{3^x + 3^{-x}}{3} & (5) \quad 4^x - x^4 & (6) \quad 2^{2^x} \end{array}$$

Άσκηση 473. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) \ln(1 + \ln(1 + e^{1+x})) & (2) (\ln x)^{\ln x} & (3) \ln |\sin x| \\ (4) \ln \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 3}} \right) & (5) \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} & (6) \ln \left(\sqrt[3]{x(1 - \sin 2x)} \right) \end{array}$$

Άσκηση 474. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$\begin{array}{lll} (1) \left(1 - \frac{1}{x}\right) 2^x & (2) x^2 \eta\mu 2^x & (3) x^3 - \sqrt[3]{x} \\ (4) \sqrt[4]{x \eta\mu x} & (5) (\eta\mu x)^{\eta\mu x} & (6) \ln \left(\frac{e^x + 1}{\sin^2 x + 1} \right) \end{array}$$

Άσκηση 475. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & (2) f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ (3) f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} & (4) f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \\ (5) f(x) = \ln(\alpha + e^{\beta x + \gamma}) & (6) f(x) = \eta\mu(\alpha x^2 + \beta x) \sin(\gamma x + \delta) \end{array}$$

Άσκηση 476. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

$$(1) (5x + 2)^3 \quad (2) \ln(e^x + 1) \quad (3) e^{x^3 + 2}$$

Άσκηση 477. Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{lll} (1) f'(x) & (2) g'(x) & (3) f'(g(x)) \\ (4) g'(f(x)) & (5) (f \circ g)'(x) & (6) (g \circ f)'(x) \end{array}$$

Άσκηση 478. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g . Να βρείτε την παράγωγο στο $x_0 = 1$ των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$, αν

$$g(1) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad g'(1) = 1.$$

Άσκηση 479. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και για την συνάρτηση $F(x) = e^x f(x)$ ισχύει $F'(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) + f(x_0) = 0$.

Άσκηση 480. Έστω παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g με $g(5) = 5$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 3)^2 g(2x - 1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την τιμή $f'(3)$.

Άσκηση 481. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και για την συνάρτηση $G(x) = \frac{g(x)}{e^{f(x)}}$ ισχύει ότι $G'(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι $\frac{g'(x_0)}{f'(x_0)} = g(x_0)$.

Άσκηση 482. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- (1) Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.
- (2) Αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

Άσκηση 483. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν οι f και f' είναι αμφοτέρως άρτιες ή περιττές, τότε η f είναι σταθερή.

Άσκηση 484. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{e^x}$.

Άσκηση 485. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x^2}$ και $g(x) = e^x \sqrt{1-2x}$. Αποδείξτε ότι

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g'(x),$$

για κάθε $x < \frac{1}{2}$.

Άσκηση 486. Έστω f, g συναρτήσεις, δύο φορές παραγωγίσιμες σε κατάλληλα πεδία ορισμού. Αποδείξτε ότι

$$(f \circ g)'' = (f'' \circ g) \cdot (g')^2 + (f' \circ g) \cdot g''.$$

Άσκηση 487. Η περιττή συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)-k}$. Αποδείξτε ότι:

- (1) $f(0) = f''(0) = 0$
- (2) $g(0)g''(0) = (g'(0))^2$

Άσκηση 488. Για τη συνάρτηση f με $f(x) = 3 \sin 5x - 7 \eta\mu 5x$, αποδείξτε ότι

$$f''(x) + 25f(x) = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 489. Για τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + 1$, αποδείξτε ότι

$$f'(x)x + f''(x)x^2 = 1,$$

για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 490. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (x^5 + \sin x)e^{f(x)} + \eta\mu x + x.$$

- (1) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- (2) Υπολογίστε την τιμή $g'(0)$.

Άσκηση 491. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) - f(2x)$. Υποθέτουμε ότι $g'(1) = 5$ και $g''(1) = 7$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x) = g(x) + g(2x)$ στο σημείο $x_0 = 1$.

Άσκηση 492. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(xy) = f(x) + f(y) + x^2y^2 - x^2 - y^2 \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$xf'(x) - yf'(y) = 2(x^2 - y^2)$$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Άσκηση 493. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g , με $g(0) = g'(0) = 1$ και

$$(f(x))^3 - (g(x))^2 + x = 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f'(0) = \frac{1}{3}$.

12. Εφαπτομένη

Άσκηση 494. Στις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M , όταν:

- | | | | |
|---------------------------|--------------|---|--------------|
| (1) $f(x) = x^2 - 4x,$ | $M(3, f(3))$ | (2) $f(x) = x^3 - 1,$ | $M(0, f(0))$ |
| (3) $f(x) = x + e^x$ | $M(1, f(1))$ | (4) $f(x) = \frac{x+1}{x-1},$ | $M(2, f(2))$ |
| (5) $f(x) = x^2 + \ln x,$ | $M(1, f(1))$ | (6) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}},$ | $M(1, f(1))$ |

Άσκηση 495. Στις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M , όταν:

- | | | | |
|---------------------------|--------------|---|--------------------------------------|
| (1) $f(x) = x^3,$ | $M(1, f(1))$ | (2) $f(x) = \frac{3}{x},$ | $M(1, f(1))$ |
| (3) $f(x) = \eta\mu^2 x,$ | $M(0, f(0))$ | (4) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x,$ | $M(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$ |
| (5) $f(x) = \sqrt{x+3},$ | $M(1, f(1))$ | (6) $f(x) = \ln^3 x,$ | $M(1, f(1))$ |

Άσκηση 496. Στις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M , όταν:

- | | |
|---|--------------|
| (1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1, & x > 1 \end{cases},$ | $M(1, f(1))$ |
| (2) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases},$ | $M(1, f(1))$ |
| (3) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 3, & x < 1 \\ 5x, & x \geq 1 \end{cases},$ | $M(1, f(1))$ |

Άσκηση 497. Στις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο M , όταν:

- | | | | |
|----------------------------|--------------|------------------------------------|------------|
| (1) $f(x) = x^2,$ | $M(-1, -1).$ | (2) $f(x) = x^2 - 6x + 11,$ | $M(3, 4).$ |
| (3) $f(x) = \frac{2}{x},$ | $M(1, 1).$ | (4) $f(x) = x + \frac{1}{x},$ | $M(1, 1).$ |
| (5) $f(x) = x + \sqrt{x},$ | $M(1, 2)$ | (6) $f(x) = x + \frac{7-2x}{3-x},$ | $M(3, 0).$ |

Άσκηση 498. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

- (1) Να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.
- (2) Να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- (3) Να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- (4) Να είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Άσκηση 499. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - \alpha x + \beta$ και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $A(1, 4)$. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (1) Η κλίση της ε είναι ίση με -2 .
- (2) Η ε διέρχεται από το σημείο $B(3, 5)$.
- (3) Η ε σχηματίζει με τον x' γωνία $\omega = \frac{\pi}{3}$.
- (4) Η ε είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $4x + 2y = 1$.

Άσκηση 500. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω όταν:

- (1) $f(x) = 2\sqrt{x-1}$, $\omega = \frac{\pi}{6}$
- (2) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$

Άσκηση 501. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 502. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = -\sqrt{x}$.

- (1) Να βρεθεί το κοινό σημείο M των C_f, C_g .
- (2) αποδείξτε ότι οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο κοινό σημείο M είναι κάθετες.

Άσκηση 503. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που σχηματίζει με τους άξονες $x'x, y'y$ ισοσκελές τρίγωνο.

Άσκηση 504. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y = -2x + 4$. Αποδείξτε ότι η ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f .

Άσκηση 505. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y = x + 1$. Αποδείξτε ότι η ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f .

Άσκηση 506. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 5$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y = \lambda x + 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το λ ώστε η ε να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής.

Άσκηση 507. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2$.

- (1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
- (2) Να εξετάσετε αν η εφαπτόμενη στο A διαθέτει και άλλο κοινό σημείο με τη C_f .

Άσκηση 508. Αν $f(x) = \frac{\kappa}{4+x^2}$, να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -1 είναι κάθετη στην ευθεία ε εξίσωση $y = -5x + 2$.

Άσκηση 509. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = e^x - 2$.

- (1) Αποδείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία ε με εξίσωση $y = x - 1$.
- (2) Αποδείξτε ότι η ευθεία ε εφάπτεται στη C_g . Να βρείτε το σημείο επαφής.

Άσκηση 510. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = -2x^2 - 2$.

- (1) Αποδείξτε ότι οι C_f και C_g δεν διαθέτουν κοινό σημείο.
- (2) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των C_f και C_g .

Άσκηση 511. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = -x^2$. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των f και g .

Άσκηση 512. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 - \beta x + 9$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι C_f και C_g να διαθέτουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο με τετμημένη 2.

Άσκηση 513. Να προσδιορίσετε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ για τον οποίο οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2x + \alpha$, $g(x) = \ln(x-1)$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(1, 0)$, να είναι κάθετες.

Άσκηση 514. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2\alpha x - \beta}{x^2 - 3x - 2}$$

να διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο $M(1, f(1))$ να είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $3x + 3y - 4 = 0$.

Άσκηση 515. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta$ και $g(x) = e^x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g διαθέτουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

Άσκηση 516. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - \beta, & x \leq 1 \\ \frac{\gamma}{x}, & x > 1 \end{cases}.$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f διαθέτει στο σημείο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία ε με εξίσωση $x - 2y - 3 = 0$.

Άσκηση 517. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{4x^2}{2x+1}$ στα σημεία $M(x_0, f(x_0))$ όπου ισχύει $f'(x_0) = 2f(x_0)$.

Άσκηση 518. Δίνεται ότι η συνάρτηση f , συνεχής στο $x_0 = 5$, με

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(5u)}{1-u} = 11. \quad (*)$$

- (1) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(5, f(5))$.
- (2) Αποδείξτε ότι η ε διέρχεται από το σημείο $B(0, 11)$.
- (3) Υπολογίστε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες $x'x, y'y$.

Άσκηση 519. Έστω συναρτήσεις

$$f(x) = e^x + 1, \quad g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}, \quad h(x) = \frac{(e^x + 1)^2}{2e^x}.$$

Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι εφαπτομένες των C_f, C_g, C_h στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha)), B(\alpha, g(\alpha)), \Gamma(\alpha, h(\alpha))$ αντιστοίχως, αποδείξτε ότι οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 520. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(1 + 2x), \quad g(x) = 2x - 2x^2, \quad h(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3}.$$

Αποδείξτε ότι οι C_f, C_g, C_h διαθέτουν κοινή εφαπτομένη στον μοναδικό κοινό τους σημείο.

Άσκηση 521. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x$. Να βρείτε την εξίσωση:

- (1) της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3 ,
- (2) της εφαπτομένης ε' της C_f που είναι κάθετη στην ε .

Άσκηση 522. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

Άσκηση 523. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, και $x_0 \neq 0$.

- (1) Αποδείξτε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_0, f(x_0))$, $B(0, -f(x_0))$ εφάπτεται της C_f στο σημείο A .
- (2) Αποδείξτε ότι το εμβαδό E του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τους άξονες δίνεται από τη σχέση $E = \frac{|x_0 f(x_0)|}{4}$.

Άσκηση 524. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}$, όπου $x \neq 0$.

- (1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \neq 0$.
- (2) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.
- (3) Αν A και B είναι τα σημεία που η εφαπτομένη στο M τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το M είναι το μέσο του τμήματος AB .

Άσκηση 525. Να βρείτε αν υπάρχουν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο A όταν:

- (1) $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $A(0, 1)$
- (2) $f(x) = x + x^3$, $A(2, 2)$

Άσκηση 526. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- (1) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + 7$.
- (2) Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το $O(0, 0)$.
- (3) Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2, 0)$;

Άσκηση 527. Έστω πολωνομική συνάρτηση P και $x_0 \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το υπόλοιπο $v(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ δια $(x - x_0)^2$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_P στο 0 είναι η $y = v(x - x_0)$.

Άσκηση 528. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$. Έστω ότι η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ με $-5 < \alpha < 5$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία K και Λ αντιστοίχως. Έστω επίσης M, N οι προβολές του A στους άξονες $x'x, y'y$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι:

- (1) $(OM) \cdot (OK) = 25$,
- (2) $(ON) \cdot (O\Lambda) = 9$.

Άσκηση 529. Έστω παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f'(0) = -1$, για την οποία υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(\alpha + x) + x = f(\alpha - x) - x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(2\alpha, f(2\alpha))$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = x$.

Άσκηση 530. Έστω παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , για την οποία υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(\kappa - x) = f(\kappa + x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της με τετμημένες $\kappa - \alpha, \kappa + \alpha$ τέμνονται επί της ευθείας με εξίσωση $x = \kappa$.

Άσκηση 531. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g . Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(-1, g(-1))$ είναι η ευθεία $\varepsilon : y = 3x + 1$. Αν $f(x) = g(e^{x-2} - 2 \sin \pi x)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

Άσκηση 532. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$. Αν η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $0 < x_0 < 4$ τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, αποδείξτε ότι το άθροισμα $OA + OB$ είναι σταθερό, όπου O η αρχή των αξόνων.

Άσκηση 533. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $y = 10x - 9$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(2, f(2))$.

(1) Να βρείτε τις τιμές των α, β .

(2) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x + 2$ εφάπτεται στη C_f .

Άσκηση 534. Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $O(0, 0)$ και $A(-1, 1)$ είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Άσκηση 535. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και $A(4\alpha, 2\sqrt{\alpha})$, $\alpha > 0$, σημείο της C_f . Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και $B(-8\alpha, -\sqrt{\alpha})$ εφάπτεται της C_f στο σημείο A .

Άσκηση 536. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, όπου $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Αν η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A και M' η προβολή του M στον $x'x$, αποδείξτε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AM' έχει μήκος ανεξάρτητο του x_0 .

Άσκηση 537. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο $A(x_0, y_0)$ της C_f . Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από το A καθώς και από το σημείο $B(0, -y_0)$ εφάπτεται της C_f στο σημείο A .

Άσκηση 538. Για τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu 3x - x^3$ και $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7x$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των C_f, C_g οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Άσκηση 539. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \kappa e^{x+\lambda}$ και $g(x) = \frac{e^{-x-\lambda}}{\kappa}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$. Αποδείξτε ότι στα σημεία των C_f, C_g με ίδιες τετμημένες, οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.

Άσκηση 540. Αν $f(x) = x^2$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που απέχει από το σημείο $A(0, -1)$ απόσταση $d = 1$.

Άσκηση 541. Αν $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση d , στις περιπτώσεις $d = 1$ και $d = \sqrt{2}$.

Άσκηση 542. Έστω $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f έχει εξίσωση $y = -x$.

Άσκηση 543. Έστω $f(x) = x^5 + x + 2$ και $g(x) = \sin x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f για την οποία υπάρχει παράλληλη προς αυτή εφαπτομένη της C_g .

Άσκηση 544. Έστω $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1$. Αποδείξτε ότι οι C_f, C_g διαθέτουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, σε ένα εκ των οποίων διαθέτουν κοινή εφαπτομένη.

Άσκηση 545. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$.

- (1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$.
- (2) Για ποια τιμή του α η παραπάνω εφαπτομένη έχει με την C_f ακριβώς ένα κοινό σημείο;

Άσκηση 546. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της A εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , όταν:

- (1) $f(x) = x^3, \quad g(x) = 2x^2 + 7x, \quad A(1, f(1)).$
- (2) $f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad g(x) = x^2 + 4x - 1, \quad A(2, f(2)).$

Άσκηση 547. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g με $f(x) = x^2 - 3x$ και $g(x) = x^2 + x$.

Άσκηση 548. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})^2$ και $g(x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2} - x^2 - 2$.

- (1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- (2) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται και στην C_g .
- (3) Για $x \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g βρίσκονται εκατέρωθεν της ε .
- (4) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g διαθέτουν μοναδικό κοινό σημείο.

13. Ρυθμός μεταβολής

Άσκηση 549. Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου, σε cm, που κινείται πάνω σε έναν άξονα, δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5, \quad (*)$$

όπου $t \in [0, 4]$ ο χρόνος σε s.

- (1) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 2$ s.
- (2) Να βρείτε σε ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο.
- (3) Να βρείτε σε ποια χρονικά διαστήματα το σημείο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική κατεύθυνση.
- (4) Να βρείτε το ολικό διάστημα που διήνυσε το σημείο κατά τα 4 s της κίνησής του.

Άσκηση 550. Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου, σε cm, που κινείται πάνω σε έναν άξονα, δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 3t^2 - 6t + 1, \quad (*)$$

όπου $t \geq 0$ ο χρόνος σε s.

- (1) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου.
- (2) Να βρείτε το πρόσημο της ταχύτητας του υλικού σημείου για κάθε $t \geq 0$.
- (3) Να βρείτε το ολικό διάστημα που διήνυσε το σημείο κατά τα πρώτα 3 s της κίνησής του.

Άσκηση 551. Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου, σε cm, που κινείται πάνω σε έναν άξονα, δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 2, \quad (*)$$

όπου $t \geq 0$ ο χρόνος σε s.

- (1) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου.
- (2) Να βρείτε το πρόσημο της ταχύτητας του υλικού σημείου για κάθε $t \geq 0$.
- (3) Να βρείτε το ολικό διάστημα που διήνυσε το σημείο κατά τα πρώτα 3 s της κίνησής του.

Άσκηση 552. Σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, το μήκος l ράβδου που κινείται με ταχύτητα v ως προς αδρανειακό παρατηρητή δίνεται από τον τύπο $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, όπου l_0 σταθερά και c η ταχύτητα του φωτός. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους της ράβδου ως προς την ταχύτητα.

Άσκηση 553. Ένας κυκλικός τομέας έχει εμβαδόν 25 cm^2 . Αν $g(r)$ είναι η περίμετρος σε συνάρτηση με την ακτίνα r , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής ως προς την ακτίνα.

Άσκηση 554. Οι κάθετες πλευρές AB, AG ενός ορθογωνίου τριγώνου ABG (με $A = 90^\circ$) μεταβάλλονται ούτως ώστε $(ABG) = 24 \text{ cm}^2$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του τετραγώνου της υποτεινουσας ως προς την πλευρά AB .

Άσκηση 555. Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει

$$f(e^x \eta \mu x) = 2e^x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- (1) Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.
- (2) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι η $y = 2x + 2$.
- (3) Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

Άσκηση 556. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1, 0)$, $B(x, \ln x)$ και $\Gamma(x, 0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x = 2 \text{ cm}$. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x ως συνάρτηση του χρόνου είναι σταθερός και ίσος με $0,5 \text{ cm/s}$.

Άσκηση 557. Το εμβαδό ενός τετραγώνου αυξάνεται με ρυθμό $24 \text{ cm}^2/\text{s}$ τη χρονική στιγμή που η πλευρά του ισούται με 4 cm . Σε αυτήν τη χρονική στιγμή, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου του τετραγώνου.

Άσκηση 558. Δίνεται η ορθή γωνία $\widehat{xOy}$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB , μήκους 10 m , του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 2 \text{ m/s}$ και η θέση του πάνω στην Ox δίνεται από τη συνάρτηση $s(t) = vt$, $t \in [0, 5]$, όπου t ο χρόνος σε s .

- (1) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.
- (2) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6 m ;

Άσκηση 559. Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο OAB , όπου $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ και $B(0, 3)$. Έστω $M(x, 0)$ εσωτερικό σημείο του τμήματος OA με $x = x(t) = 2t$ (το x σε cm και το t σε s). Η κάθετη από το M στον άξονα $x'x$ τέμνει το τμήμα AB στο N .

- (1) Να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του τραπεζίου $OMNB$ ως συνάρτηση του χρόνου.
- (2) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OM είναι 2 cm ;

Άσκηση 560. Το βάρος ενός κουνελιού x εβδομάδες μετά την γέννησή του δίνεται από την σχέση $f(x) = 20 + (x + 1)^2$, με $x < 8$. Να βρείτε τον ρυθμό αύξησης του βάρους του έπειτα από 2 εβδομάδες.

Άσκηση 561. Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ m}^3/\text{s}$.

- (1) Να βρείτε τον ρυθμό αύξησης της επιφάνειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι $r = 5 \text{ m}$.
- (2) Ποια είναι η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η επιφάνεια της αυξάνεται με ρυθμό $2 \text{ m}^2/\text{s}$;

Άσκηση 562. Ένα σφαιρικό αντικείμενο αυξάνεται σε μέγεθος διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα. Όταν η ακτίνα του ισούται με 3 cm , ο ρυθμός μεταβολής της είναι 2 cm/s .

- (1) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του.
- (2) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του.

Άσκηση 563. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου σφαιρικού μπαλονιού το οποίο χάνει αέρα, ως προς τον χρόνο, είναι $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας $R(t)$ του μπαλονιού ως προς τον χρόνο, την χρονική στιγμή t_0 για την οποία είναι $R(t_0) = 10 \text{ cm}$.

Άσκηση 564. Το μήκος ενός ορθογωνίου μειώνεται με ρυθμό 1 cm/s και το πλάτος του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Κάποια χρονική στιγμή t_0 , το μήκος ισούται με 8 cm και το πλάτος ισούται με 6 cm . Τη χρονική στιγμή αυτή να βρείτε:

- (1) Τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου.
- (2) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου.
- (3) Τον ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου του ορθογωνίου.

Άσκηση 565. Μια πισίνα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και ο πυθμένας της έχει πλάτος 25 m και μήκος 40 m . Η πισίνα γεμίζει με νερό, με ρυθμό $500 \text{ m}^3/\text{min}$. Να βρείτε με ποιον ρυθμό αυξάνεται το ύψος του νερού στην πισίνα.

Άσκηση 566. Ένας πληθυσμός μικροβίων μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση

$$N(t) = \frac{40}{1 + 19 \cdot 2^{-t}},$$

όπου t ο χρόνος σε min . Αν οι φυσιολογικές απώλειες του πληθυσμού $M(t)$ κάθε λεπτό είναι ανάλογες του τετραγώνου του υπάρχοντος πληθυσμού με συντελεστή $\kappa = 10^{-3}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εναπομείναντος πληθυσμού.

Άσκηση 567. Το εμβαδό της επιφάνειας ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ cm}^2/\text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου τη χρονική στιγμή που η ακμή του είναι 2 cm .

Άσκηση 568. Ένα ποδήλατο βρίσκεται 4 km δυτικά από ένα σταυροδρόμι και κινείται προς αυτό με ταχύτητα 9 km/h. Ταυτόχρονα, ένα άλλο ποδήλατο βρίσκεται 4 km βόρεια από το σταυροδρόμι και απομακρύνεται από αυτό με ταχύτητα 10 km/h. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης των ποδηλάτων εκείνη την χρονική στιγμή.

Άσκηση 569. Ευθεία ϵ στρέφεται γύρω από το σημείο $A(4, 2)$. Ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης λ , όπου $\lambda > 0$, ισούται με 10^{-2} s^{-1} . Αν η ευθεία τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία M και N αντιστοίχως, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού (OMN) ως προς τον χρόνο, τη χρονική στιγμή που η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(5, 4)$.

Άσκηση 570. Η ακτίνα r μιας σφαίρας μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη συνάρτηση $r(t) = t^2 + 1$, όπου t σε s και $r(t)$ σε cm. Κάποια χρονική στιγμή t_0 ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας είναι $32\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Να βρείτε:

- (1) Τη χρονική στιγμή t_0 .
- (2) Τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_0 .

Άσκηση 571. Το εμβαδό της περιοχής ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι σταθερό και ίσο με $9\pi \text{ m}^2$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι $10\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιφέρειας του μικρού κύκλου τη χρονική στιγμή που αυτός έχει εμβαδόν $16\pi \text{ cm}^2$.

Άσκηση 572. Ένα κινητό σημείο M κινείται πάνω στη καμπύλη $y = \frac{x^3 + 2}{6}$.

- (1) Τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στο σημείο $A(-2, -1)$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδων ανά s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M όταν διέρχεται από το A .
- (2) Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M είναι θετικός. Να βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι οκταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης.

Άσκηση 573. Σφαιρικό αντικείμενο συρρικνώνεται και η επιφάνεια του μειώνεται με ρυθμό $2 \text{ cm}^2/\text{min}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της διαμέτρου του αντικειμένου τη χρονική στιγμή που η διάμετρος της είναι ίση με 5 cm.

14. Θεώρημα Rolle

14.1 Γενικά

Άσκηση 574. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις f ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα Δ που δίνεται. Στη συνέχεια, για τις συναρτήσεις που ισχύει, να βρείτε τον αριθμό ξ του συμπεράσματος:

- (1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $\Delta = [0, 3]$ (2) $f(x) = \eta\mu 4x$, $\Delta = [0, \frac{\pi}{2}]$
(3) $f(x) = 3 + \sigma\upsilon\nu 2x$, $\Delta = [0, \pi]$ (4) $f(x) = |x|$, $\Delta = [-2, 2]$
(5) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$, $\Delta = [\frac{1}{2}, 2]$ (6) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$, $\Delta = [0, \ln 2]$

Άσκηση 575. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
(2) Αποδείξτε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο $[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}]$.
(3) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\sigma\phi \frac{1}{x} = 3x$ διαθέτει τουλάχιστον μία λύση στο $(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi})$.

Άσκηση 576. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 3)(e^x - 1) + 8$.

- (1) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f διαθέτει μία τουλάχιστον εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα $x'x$.
(2) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $\xi - 2 = e^{-\xi}$.

Άσκηση 577. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 3x + 1, & x < 0 \\ x^2 + \beta x - \gamma, & x \geq 0 \end{cases},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Για την f είναι γνωστό ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

- (1) Να βρεθούν οι α, β, γ .
(2) Να βρείτε το σημείο $\xi \in (-1, 1)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Άσκηση 578. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x^3 + \beta x^2 + 3x + \gamma, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Για την f είναι γνωστό ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

(1) Να βρεθούν οι α, β, γ .

(2) Να βρείτε το σημείο $\xi \in (-1, 1)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Άσκηση 579. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + x^2 \eta \mu \frac{\pi}{2x}, & x \in [-1, 0) \\ \beta x + \gamma & x \in (0, 1] \end{cases},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

Άσκηση 580. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4x - \pi^2 \eta \mu x$. Αποδείξτε ότι η C_f διαθέτει ένα τουλάχιστον σημείο τομής με τον άξονα $x'x$, με τετμημένη αριθμό του διαστήματος $(0, \pi)$.

Άσκηση 581. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

(1) Για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x - c}$, όπου $c \notin [\alpha, \beta]$, αποδείξτε ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(c_0) = 0$.

(2) Για τα c, c_0 του ερωτήματος (1), αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $M(c_0, f(c_0))$ διέρχεται από το σημείο $N(c, 0)$.

Άσκηση 582. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^\nu(x - 1)^\nu$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Άσκηση 583. Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^{3x} + 3x^7$ και $g(x) = e^{-x} - 5x^3$ διαθέτουν μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

Άσκηση 584. Αν η συνεχής συνάρτηση $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ και ισχύει $f(3) - f(2) = \ln 3 - \ln 2$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$.

Άσκηση 585. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f'(2 - \xi)$.

Άσκηση 586. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi) = 5\xi^4(f(1) - f(-1))$.

Άσκηση 587. Αν $f(x) = x^6 + 4x^4 + 5x^2 + x - 7$, αποδείξτε ότι η C_f δεν διαθέτει εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους.

Άσκηση 588. Έστω $\alpha > 0$ και συνάρτηση f , συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$. Αν $0 < f(x) < \alpha$ και $f'(x) \neq \alpha$, για κάθε $x \in (0, 1)$, αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0, 1)$ με $f(\xi) = \alpha\xi$.

Άσκηση 589. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, 1)$. Για την f ισχύει $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

(1) Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x)e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0, 1]$.

(2) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}$.

Άσκηση 590. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta) > f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Άσκηση 591. Θεωρούμε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

(1) Να αποδειχθεί ότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

(2) Αν επιπλέον $f(\beta) = 0$, να επιλυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Άσκηση 592. Η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$ με $f(0) = 3$ και $f(1) = e + 2$. Αν $f''(x) \neq e^x$, για κάθε $x \in (0, 1)$, αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in (0, 1)$ με $f'(\xi) = e^\xi$.

Άσκηση 593. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) < 1 < f'(2)$. Αν ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 2)$, αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 1$.

Άσκηση 594. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνάρτηση f που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$. Αν $\lambda = f(\alpha) = f(\beta)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = f(\xi) - \lambda$.

14.2 Εξισώσεις

Άσκηση 595. Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

$$(1) \quad 2x^2 - 2x + \ln x = 0 \quad (2) \quad e^x = x + 1 \quad (3) \quad 2x + \sin x = 1$$

Άσκηση 596. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις διαθέτουν το πολύ δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$:

$$(1) \quad x^{10} - 20x + 4 = 0 \quad (2) \quad x^4 + 24x^2 + 4x = 40 \quad (3) \quad 6x^4 - 8x + 1 = 0$$

$$(4) \quad \sin x + 2x = 0 \quad (5) \quad \eta\mu x + 3x^2 - 5 = 0 \quad (6) \quad 5e^x = 23 - x^2$$

Άσκηση 597. Να αποδείξετε ότι για $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^3 - 12x + \alpha = 0$ διαθέτει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(-2, 2)$.

Άσκηση 598. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 2(\lambda - 1)x - \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση 599. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^4 + \alpha x^2 + \beta x = 0$ διαθέτει το πολύ μία μη μηδενική λύση στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 600. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3x^5 - 2x^3 = 4$ διαθέτει μόνο μία λύση στο $(1, 2)$.

Άσκηση 601. Αν $f(x) = x + \alpha \eta\mu x - e^\beta$ με $-1 < \alpha < 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, e^\beta - \alpha)$.

Άσκηση 602. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f . Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) \eta\mu x + f(x) \sin x = 0$ διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$.

Άσκηση 603. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(2) = 2f(1)$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $xf'(x) - f(x) = 0$ διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Άσκηση 604. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x \eta\mu x + \sin x$ διαθέτει ακριβώς δύο λύσεις στο $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ και μία λύση στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Άσκηση 605. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $2x^3 + 9x^2 + 12x + \alpha = 0$, όπου $\alpha \in (4, 5)$, διαθέτει μοναδική λύση στο διάστημα $(-2, -1)$.

Άσκηση 606. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = e^x$ διαθέτει το πολύ τρεις λύσεις.

Άσκηση 607. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $8\alpha x^3 + 9\beta x^2 - 6\beta x - 2\alpha = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση 608. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $4\alpha x^3 - 3\beta x^2 + 2\gamma x = \alpha - \beta + \gamma$ διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.
- (2) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 - \alpha^4 x - \beta = 0$ διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[0, 1]$ όταν $\alpha > 1$.

Άσκηση 609. Να λυθεί η εξίσωση $(2x^2 - 2x + \ln x)^2 + (e^{x-1} - x)^2 = 0$.

Άσκηση 610. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $2x^3 + 9x^2 + 12x + \alpha = 0$, με $\alpha \in (4, 5)$, διαθέτει μοναδική λύση στο διάστημα $(-2, -1)$.

Άσκηση 611. Αν $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x - 3)$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ διαθέτει ακριβώς τέσσερις λύσεις.

Άσκηση 612. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 e^x - x - 1$.

- (1) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$.
- (2) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $4x^3 e^x + x^4 e^x - 1 = 0$ διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο $(-1, 1)$.

Άσκηση 613. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$(x + \alpha)^\nu = x^\nu + \alpha^\nu. \quad (*)$$

- (1) Αν ο ν είναι άρτιος, αποδείξτε ότι η εξίσωση $(*)$ διαθέτει μοναδική λύση, την $x = 0$.
- (2) Αν ο ν είναι περιττός με $\nu \geq 3$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $(*)$ διαθέτει ως μοναδικές λύσεις τις $x = 0$ και $x = -\alpha$.

Άσκηση 614. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\nu, \mu, \kappa \in \mathbb{N}^*$ με

$$\frac{\alpha}{\nu + 1} + \frac{\beta}{\mu + 1} + \frac{\gamma}{\kappa + 1} + \frac{\delta}{2} = 0. \quad (*)$$

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\alpha x^\nu + \beta x^\mu + \gamma x^\kappa + \delta x = 0$ διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση 615. Αν $f(x) = x^2 + \eta \mu x$, αποδείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

Άσκηση 616. Αν $f(x) = x^4$, αποδείξτε ότι οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f έχει με αυτήν ένα μόνο κοινό σημείο.

Άσκηση 617. Έστω ότι η παραγωγίσιμη διάστημα Δ συνάρτηση f διαθέτει τουλάχιστον ν ρίζες. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $(f^2(x))'$ διαθέτει τουλάχιστον $2\nu - 1$ ρίζες.

15. Θεώρημα Μέσης Τιμής

15.1 Γενικά

Άσκηση 618. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1, 1]$:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x < 0 \\ x^3 - x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2) \quad g(x) = \begin{cases} 3 - x^3, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 619. Για τη συνάρτηση $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, να ελέγξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και να βρείτε το αριθμό ξ του συμπεράσματος, όταν:

$$(1) \quad f(x) = 2x + 1 \quad (2) \quad f(x) = 2x^2 + 1 \quad (3) \quad f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$$
$$(4) \quad f(x) = \frac{2x + 3}{x + 2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{x} - x \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$$

Άσκηση 620. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$.

- (1) Αποδείξτε ότι f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την παράγωγό της.
(2) Εφαρμόστε για την f το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1, 1]$ και βρείτε τον αριθμό ξ του συμπεράσματος.

Άσκηση 621. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x, & 1 \leq x \leq e \\ \alpha x + \beta, & e \leq x \leq 5 \end{cases}.$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1, 5]$.

Άσκηση 622. Αν $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$, να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο διάστημα $[0, 2]$. Αν ναι, να βρείτε $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$.

Άσκηση 623. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^{11} - 5x^9 + 4$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = -2x + 5$.

Άσκηση 624. Αν για τη συνεχή στο $[-1, 1]$ συνάρτηση f ισχύει $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$ και $f'(x) \leq 2$, για κάθε $x \in (-1, 1)$, να υπολογίσετε το $f(0)$.

Άσκηση 625. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνάρτηση f , συνεχή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f(\alpha) = \beta\sqrt{3}$ και $f(\beta) = \alpha\sqrt{3}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{2\pi}{3}$.

Άσκηση 626. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνάρτηση f που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$, διαφορετικά μεταξύ τους, με $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

Άσκηση 627. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[0, 10]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 10)$ και $f(0) = 2$, $f(10) = 12$.

- (1) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 10)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$.
- (2) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 10)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.
- (3) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 10)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $4f'(x_1) + f'(x_2) = 5$.

Άσκηση 628. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, με $f(1) = 1$ και $f(2) = 2$.

- (1) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ με $f'(\xi_1)(\xi_1 - 3) = -f(\xi_1)$.
- (2) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi_2 \in (1, 2)$ με $f'(\xi_2) = \frac{f(\xi_2)}{\xi_2}$.
- (3) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi_3 \in (1, 2)$ με $f'(\xi_3)f(\xi_3) = \xi_3$.

Άσκηση 629. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 6$.

- (1) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ με $f(\xi) = 8 - 2\xi$.
- (2) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 3)$, διαφορετικά μεταξύ τους, με $f'(x_1)f'(x_2) = 4$.

Άσκηση 630. Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$ με $f(1) = f(6)$.

- (1) Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 6)$ τέτοιο ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.
- (2) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$.

Άσκηση 631. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f(\alpha) = 3\alpha - \beta$ και $f(\beta) = \alpha + \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$.

Άσκηση 632. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) - f(1) = 16$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ με $f'(\xi) = 3\xi^2 + 6\xi$.

Άσκηση 633. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$.

(1) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ διαθέτει λύση στο (α, β) .

(2) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$, διάφορα μεταξύ τους, με $f'(\xi_1) = \frac{1}{f'(\xi_2)}$.

Άσκηση 634. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $[\frac{1}{2}, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(\frac{1}{2}, 3)$, με $f(\frac{1}{2}) = 2$ και $f(3) = 12$.

(1) Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\frac{1}{2}, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2$.

(2) Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (\frac{1}{2}, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0, 0)$.

Άσκηση 635. Θεωρούμε συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη ε της C_f η οποία διαθέτει με την C_f δύο τουλάχιστον κοινά σημεία.

(1) Αποδείξτε ότι η f' δεν είναι $1 - 1$.

(2) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f''(\xi) = 0$.

Άσκηση 636. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με σύνολο τιμών εντός του διαστήματος $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

Άσκηση 637. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Άσκηση 638. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν οι αριθμοί $f(\alpha), f(\mu), f(\beta)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, όπου μ το μέσο του $[\alpha, \beta]$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f''(x_0) = 0$.

Άσκηση 639. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και συνάρτηση f , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f(\alpha) = f(\beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $\alpha < \xi_1 < \mu < \xi_2 < \beta$ και $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$, όπου μ το μέσο του $[\alpha, \beta]$.

15.2 Ανισότητες

Άσκηση 640. Αποδείξτε ότι:

- (1) $\sigma\varphi y(y-x) < \ln \eta\mu y - \ln \eta\mu x < \sigma\varphi x(y-x),$ αν $0 < x < y < \frac{\pi}{2}.$
- (2) $\frac{y-x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} < \varepsilon\varphi y - \varepsilon\varphi x < \frac{y-x}{\sigma\upsilon\nu^2 y},$ αν $0 < x < y < \frac{\pi}{2}.$
- (3) $e^{-x} < \frac{x-y}{e^x - e^y} < e^{-y},$ αν $x > y.$
- (4) $x \leq e^{x-1} \leq 1 + (1-x)e,$ αν $1 < x < 2.$
- (5) $1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2},$ αν $-1 < x < 0.$
- (6) $\eta\mu(x+y) < \eta\mu x + y \sigma\upsilon\nu x,$ αν $0 < x < x+y < \frac{\pi}{2}.$
- (7) $1+x < e^x < 1+ex,$ αν $0 < x < 1.$
- (8) $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x},$ αν $x > 0.$
- (9) $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x,$ αν $x > 0.$

Άσκηση 641. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

- (1) $\ln \pi - \ln 3 < \frac{\pi}{3} - 1$
- (2) $5e^4(\pi - e) < \pi^5 - e^5 < 5\pi^4(\pi - e)$
- (3) $2 - \frac{e}{3} < \ln 3 < \frac{3}{e}$
- (4) $e < \frac{4-e}{2\ln 2 - 1} < 4$
- (5) $2 + \frac{2}{165} < \sqrt[5]{33} < 2 + \frac{1}{80}$
- (6) $\eta\mu \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi}{36} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Άσκηση 642. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2 x, x \in [\alpha, \beta]$.

- (1) Αποδείξτε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$.
- (2) Αποδείξτε την ανισότητα $|\eta\mu^2 \beta - \eta\mu^2 \alpha| \leq |\beta - \alpha|.$

Άσκηση 643. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x, x \in [\alpha, \beta]$.

- (1) Αποδείξτε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$.
- (2) Αποδείξτε την ανισότητα $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \alpha - \ln \beta < \frac{\beta}{\alpha} - 1.$

Άσκηση 644. Αν $\alpha > 0$, αποδείξτε ότι $\left| \sqrt{x^2 + \alpha^2} - \sqrt{y^2 + \alpha^2} \right| \leq |x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 645. Αποδείξτε ότι

$$\left| \ln \left(\frac{\alpha^2 + 4}{\beta^2 + 4} \right) \right| \leq \frac{1}{2} |\beta - \alpha|,$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 646. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(1) = 0$ και $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $|f(x)| \leq x - 1$, για κάθε $x \geq 1$.

Άσκηση 647. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[3, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(3, +\infty)$. Αν $f(3) = 0$ και $0 < f'(x) < 1$ για κάθε $x > 3$, αποδείξτε ότι $0 < f(x) < x - 3$, για κάθε $x > 3$.

Άσκηση 648. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $|f'(x)| \geq M$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(\beta) \geq f(\alpha) + M(\beta - \alpha)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \geq \alpha$.

Άσκηση 649. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

- (1) Αποδείξτε ότι $(\beta - \alpha)f'(\beta) + f(\alpha) \leq f(\beta) \leq (\beta - \alpha)f'(\alpha) + f(\alpha)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \geq \alpha$.
- (2) Αποδείξτε ότι $f(x+2) - f(x) < 2f'(x) < f(x) - f(x-2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 650. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, με $f(0) = 2$ και $3 \leq f'(x) \leq 6$, για κάθε $x \in (0, 3)$, αποδείξτε ότι $11 \leq f(3) \leq 20$.

Άσκηση 651. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 6)$ με $f(2) = -6$ και $1 < f'(x) < 2$, για κάθε $x \in (2, 6)$. Να αποδείξετε ότι $|f(6)| < 2$.

Άσκηση 652. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) > M > 0$, για κάθε $x \in [0, 4]$. Αποδείξτε ότι $f(x) \geq M$, για κάθε $x \geq 1$.

Άσκηση 653. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(\alpha) \leq 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, αποδείξτε ότι $f(\beta) < f(\alpha)$.

Άσκηση 654. Έστω παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $-2 \leq f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $|f(x+1) - f(x)| \leq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 655. Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο $[4, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(4, 6)$, τέτοια ώστε $f(4) = 8$ και $|f'(x)| \leq 2$, για κάθε $x \in (4, 6)$. Αποδείξτε ότι:

- (1) $4 \leq f(6) \leq 12$
- (2) $4 < f(t) < 12$, για κάθε $t \in (4, 6)$

Άσκηση 656. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f'(x) = g'(x) + \eta \mu^2 x + e^x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$, για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 657. Δίνεται παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ συνάρτηση f με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άσκηση 658. Θεωρούμε συνάρτηση f τέτοια ώστε η f' να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

$$(1) \quad f(3) < \frac{f(1) + f(5)}{2} \qquad (2) \quad f(2) < \frac{3f(1) + f(5)}{4}$$

Άσκηση 659. Θεωρούμε συνάρτηση f τέτοια ώστε η f' να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι:

$$(1) \quad f'(x+1) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad f(2x) \geq \frac{f(x) + f(3x)}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 660. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) - f(0) = e$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) - 2x = e^x$ διαθέτει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση 661. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\frac{\pi}{4}) - f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \sin^2 \xi = 1$.

Άσκηση 662. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 2$, $f(2) = \ln(2e^3)$ και $f(3) = \ln(3e^4)$.

(1) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) - \ln x - x$ διαθέτει δύο οριζόντιες εφαπτομένες στο διάστημα $[1, 3]$.

(2) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $\xi^2 f''(\xi) = -1$.

16. Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

16.1 Σταθερές συναρτήσεις & ισότητα παραγώγων

Άσκηση 663. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f για τις οποίες, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

- (1) $f'(x) = \eta\mu x + 1$ (2) $f''(x) = x^3 + 2$ (3) $f'''(x) = x - x^2$
(4) $f'(x) = e^x + x^2$ (5) $f''(x) = 2\eta\mu x$ (6) $f'''(x) = e^{-x}$

Άσκηση 664. Έστω συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f . Να βρείτε τον τύπο της f , όταν:

(1) $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}, \quad f(1) = 0$

(2) $f'(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}, \quad f(0) = 5.$

Άσκηση 665. Αν $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(-2) = 2$ και $g'(x) = f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 666. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}}$.

(1) Αποδείξτε ότι $f' = g'$.

(2) Να βρεθεί $c \in \mathbb{R}$ με $f = g + c$.

(3) Αν $\alpha, \beta, \gamma > -1$, αποδείξτε ότι τα σημεία $A(f(\alpha), g(\alpha))$, $B(f(\beta), g(\beta))$, $\Gamma(f(\gamma), g(\gamma))$ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 667. Αν $0 < \alpha < \pi$ και $f(x) = \frac{\eta\mu x + \eta\mu(x + \alpha)}{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu(x + \alpha)}$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα $[0, \pi - \alpha]$.

Άσκηση 668. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $f''(x) = 12x^2 + 2$ και η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο επαφής $A(1, 1)$ ισούται με 3.

Άσκηση 669. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(-1) = -4$, $f(1) = 3$ και $f'(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 670. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν η εφαπτομένη της C_f έχει σε κάθε σημείο της συντελεστή διεύθυνσης τετραπλάσιο από την τετμημένη του σημείου αυτού και $f(1) = 6$.

Άσκηση 671. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f , αν

- η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, -3)$ και
- σε κάθε σημείο της με τετμημένη x_0 , η εφαπτομένη της C_f έχει κλίση $\frac{4x_0}{4x_0^2 + 1}$.

Άσκηση 672. Θεωρούμε συναρτήσεις f, g , παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$, τέτοιες ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $f'(x) = \frac{2}{g(x)}$ και $g'(x) = -\frac{1}{f(x)}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)g^2(x)$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 673. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$|f(x) - f(y)| \leq 3(x - y)^4, \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι $-3|x - y|^3 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 3|x - y|^3$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$.
- (2) Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 674. Έστω συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f'(0)$ ημ $x - f(0)$ συν x .

- (1) Αποδείξτε ότι $g''(x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = (g'(x))^2 + g^2(x)$ είναι σταθερή και θετική.
- (3) Αποδείξτε ότι $f(x) = f'(0)$ ημ $x + f(0)$ συν x , για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 675. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 3$ και

$$2xf'(x) + f(x) = 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.
- (2) Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 676. Έστω f, g δύο συναρτήσεις, τρεις φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύουν $f(0) = g(0) + 1$ και $f'''(x) = g'''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $f(x) - g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 677. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ και

$$f''(x) = \eta\mu(x-2), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 678. Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $\alpha \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \alpha g(x), \quad g'(x) = -\alpha f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή.

Άσκηση 679. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = -2f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x}f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

(2) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

(3) Έστω h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $h(0) = \varphi(0)$ και

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x), \quad (**)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $h = \varphi$.

Άσκηση 680. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με $f(1915) = g(1915)$ και

$$f(x) - f'(x) = g(x) - g'(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x) - g(x)}{e^x}$ είναι σταθερή.

(2) Αποδείξτε ότι $f = g$.

Άσκηση 681. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad f^2(x)f'(x) = \frac{2x}{3}, \quad f(0) = 1 \quad (2) \quad f^3(x)f'(x) = x - 1, \quad f(1) = 1$$

$$(3) \quad \sqrt{f(x)}f'(x) = 4x^3, \quad f(0) = 1. \quad (4) \quad f'(x) = 3x^2e^{-f(x)}, \quad f(0) = 0$$

$$(5) \quad f^{-2}(x)f'(x) = -1, \quad f(1) = 1 \quad (6) \quad (f'(x) - 1)(f(x) - x) = x, \quad f(1) = 2$$

(Σημείωση: οι συναρτήσεις είναι καταλλήλως ορισμένες ώστε να ισχύουν οι σχέσεις.)

Άσκηση 682. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 3, \quad f(x) \neq 0, \quad f(0) = 1.$$

$$(2) \quad f'(x) = 4x^3 e^{-f(x)}, \quad f(1) = \ln 3.$$

$$(3) \quad 2xf(x) + x^2 f'(x) = \sin x - f'(x), \quad f(0) = 1.$$

$$(4) \quad f'(x) = 2xf(x), \quad f(x) > 0, \quad f(0) = e.$$

$$(5) \quad 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x, \quad f(0) = 1.$$

$$(6) \quad \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} + f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = 1, \quad f(0) = 0.$$

Άσκηση 683. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad \mathcal{D}_f = (0, +\infty), \quad \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 2f(x), \quad f(x) > 0, \quad f(1) = e^5.$$

$$(2) \quad \mathcal{D}_f = (0, +\infty), \quad (x - \sin x)f'(x) = 1 - \sin x, \quad f(\pi) = \ln \pi.$$

$$(3) \quad \mathcal{D}_f = (0, +\infty), \quad f^2(x)f'(x) + \frac{1}{x} = 1, \quad f(1) = \sqrt{2}.$$

$$(4) \quad \mathcal{D}_f = [1, +\infty), \quad f'(x)e^{f(x)} = 1 + \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 2.$$

$$(5) \quad \mathcal{D}_f = (0, +\infty), \quad xf'(x) - f(x) = x, \quad f(1) = 2.$$

$$(6) \quad \mathcal{D}_f = (0, +\infty), \quad 2x(f'(x) + f(x)) = e^{-x}, \quad f(1) = \frac{1}{e}.$$

Άσκηση 684. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις με $f' = fg'$, αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ce^{g(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 685. Έστω παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}$ συνάρτηση f με

$$f'(x) = -2xf(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = f(0)e^{-x^2}$.

Άσκηση 686. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = e$ και

$$f(x) \ln f(x) = f'(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{\ln f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή. Έπειτα, βρείτε τη συνάρτηση f .

Άσκηση 687. Έστω $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και

$$f'(x) \sin x + f(x) \eta\mu x = f(x) \sin x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(1) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x \sin x}$ είναι σταθερή.

(2) Βρείτε τη συνάρτηση f .

Άσκηση 688. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και

$$f''(x) = -f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι $f^2(x) + (f'(x))^2 = 1$.

(2) Αποδείξτε ότι για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sin x$ ισχύει $g^2(x) + (g'(x))^2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3) Βρείτε τη συνάρτηση f .

Άσκηση 689. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f''(x) = f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = (f(x) - f'(x))e^x$.

(2) Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x) + f'(x)}{e^{-x}}$.

(3) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 690. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2f(x) = x(1 + f'(x)), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι η f'' είναι σταθερή.

(2) Αν επιπλέον $f(1) = 2$, βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 691. Να βρεθεί η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f'(x)f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

Άσκηση 692. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f'(x) = f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad (**)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 693. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, με $f(0) = 2$ και

$$f'(x) \sin x = f(x)(\eta\mu x + \sin x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 694. Να βρεθεί η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1}{2}$ και

$$f'(3x-1) = 18x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 695. Να βρεθεί η άρτια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και

$$f'(x^2) = x, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 696. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f(-1) = 0$ και

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = x - 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \neq 0$.

Άσκηση 697. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και

$$xf'(x) - 2f(x) = x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 698. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$ και

$$f''(x^2) = 3x, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Άσκηση 699. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f(1) = 2$ και

$$2xf(x) + x^2f'(x) = 3x^2 + 4, \quad (*)$$

για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η ευθεία $y = 3x - 1$ εφάπτεται στη C_f .

Άσκηση 700. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f . Υποθέτουμε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2, \frac{1}{e})$ και σε κάθε σημείο της με τετμημένη α , η εφαπτομένη της C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(\alpha + 2, 0)$. Να βρείτε την συνάρτηση f .

Άσκηση 701. Έστω f, g συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με την g να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν

$$|f(x) - f(y)| \leq (g(x) - g(y))^2, \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Άσκηση 702. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- (2) Να βρεθεί η συνάρτηση f .

Άσκηση 703. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

- (1) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
- (2) Να βρεθεί η συνάρτηση f .

Άσκηση 704. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 1$. Υποθέτουμε ότι

$$f(xy) = yf(x) + xf(y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

- (1) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
- (2) Να βρεθεί η συνάρτηση f .

Άσκηση 705. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, για την οποία ισχύει

$$f'(x) = \frac{9f^2(2) + f^2(1) + 10}{6}, \quad (*)$$

για κάθε $x \in (1, 2)$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 706. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις με $f(0) = -g(0)$, $f'(0) = 1$ και

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f, g .

Άσκηση 707. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g με $f(0) = g(0) = 1$ και

$$f'(x)g(x) = 1, \quad f(x)g'(x) = -1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι $f(x)g(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f, g .

Άσκηση 708. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $g(1) = 1$ και

$$f'(x)g(x) = f(x)g'(x) = 2x^3, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

(1) Αποδείξτε ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x > 0$.

(2) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f, g .

Άσκηση 709. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g με $f'(0) = f(0) = 1$ και

$$f'(x) + g(x) = e^x + x, \quad f(x) + g'(x) = e^x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f, g .

16.2 Μονοτονία με χρήση παραγώγων

Άσκηση 710. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f , με τύπο όπως στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 4 \quad (2) \quad f(x) = x\sqrt{x^2 - 2x - 3} \quad (3) \quad f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{x^3}{1 + x^4} \quad (5) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x} \quad (6) \quad f(x) = \frac{4x^2 + 6x + 5}{4x^2 + 1}$$

Άσκηση 711. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f , με τύπο όπως στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 3 \quad (2) \quad f(x) = \frac{2x}{\ln x} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^3}{e^x}$$

$$(4) \quad f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) \quad (5) \quad f(x) = x^x \quad (6) \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27 - x}$$

Άσκηση 712. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f , με τύπο όπως στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(1) \quad f(x) = x^3 - 3x \quad (2) \quad f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad (3) \quad f(x) = \ln(1 - x^2)$$

$$(4) \quad f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x} \quad (5) \quad f(x) = \frac{e^x}{x - 1} \quad (6) \quad f(x) = e^{2x} - 4e^x - 5$$

Άσκηση 713. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x, & x < 0 \\ x^2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 1, & x < 0 \\ \eta\mu x + 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} -x^4 + 2x^2 + 1, & x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 1, & x > 2 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & x < 0 \\ \frac{x^2 - e^x}{e^x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1 \\ e^x - 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (6) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & x < 3 \\ 1 - \sqrt{x^2 - 9}, & x \geq 3 \end{cases}$$

Άσκηση 714. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = x^2 - 4x, \quad A = [0, 2] \quad (2) \quad f(x) = x + \frac{9}{x}, \quad A = (1, 3)$$

$$(3) \quad f(x) = \varepsilon\varphi\left(\pi \eta\mu \frac{x}{4}\right), \quad A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4) \quad f(x) = \eta\mu x + \varepsilon\varphi x, \quad A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(5) \quad f(x) = \ln x - \sqrt{x} + 2, \quad A = [1, 4] \quad (6) \quad f(x) = x^4 - 4x + 6, \quad A = (0, 2)$$

Άσκηση 715. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , όταν:

- (1) $f(x) = x^2 + x + 3$ (2) $f(x) = (x - 1)e^x$
 (3) $f(x) = x^2(1 - 2 \ln x) + 12x(\ln x - 1)$ (4) $f(x) = \frac{\ln x}{x - 2}$
 (5) $f(x) = e^x + x \ln x - (e + 1)x$ (6) $f(x) = 3x \ln x - 3x$

Άσκηση 716. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- (1) $(x - 20)^{20} = x^{20} + 20^{20}$ (2) $\ln x = 1 - x^2$ (3) $2e^x + 2x = x^2 + 2$
 (4) $e^x + e^{3x} = 2$ (5) $4^{|x|} + 4^{\frac{1}{|x|}} = 18$ (6) $\sqrt{4x^2 + 9} = \frac{8x + 9}{5}$

Άσκηση 717. Για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

- (1) $\eta\mu x < 2x$ (2) $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{x}$ (3) $\sigma\upsilon\nu x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
 (4) $e^x(x + 1) > 1$ (5) $e^x < (1 + x)^{1+x}$ (6) $\ln(x + 1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$

Άσκηση 718. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει

$$|f'(x) + \eta\mu x| < 2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα ενώ η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x + 2x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 719. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 5^x + x^5$.

- (1) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα.
 (2) Επιλύστε την εξίσωση $f(x) = 1$.
 (3) Επιλύστε την ανίσωση $f(x) > 6$.

Άσκηση 720. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f'(x) < x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

- (1) Η συνάρτηση $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
 (2) $f(2) - f(1) < 3$.
 (3) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ με $f'(\xi) < 3$.

Άσκηση 721. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- (2) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της f .

Άσκηση 722. Δίνεται παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(0) = 1$ και

$$f'(x) < f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-x}$.
- (2) Να αποδείξετε ότι $f(x) < e^x$, για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 723. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- (2) Επιλύστε την εξίσωση $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1)$.
- (3) Επιλύστε την ανίσωση $x^3 - x^2 = \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$.

Άσκηση 724. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.
- (2) Επιλύστε την εξίσωση $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$.

Άσκηση 725. Έστω η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 2x + 2$, $x \in [1, 2]$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
- (2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Άσκηση 726. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - x + 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 727. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$, όπου $\alpha \in (0, 1)$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μία ακριβώς λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

Άσκηση 728. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = 1 + \sin x$ διαθέτει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ μοναδική λύση.

Άσκηση 729. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x - e^3 = x - 3$ διαθέτει μοναδική θετική λύση, η οποία και να βρεθεί.

Άσκηση 730. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

Άσκηση 731. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - x - 1$, με $0 < \alpha < 1$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- (2) Προσδιορίστε το σύνολο $f\left([0, \frac{\pi}{2}]\right)$.
- (3) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική λύση.

Άσκηση 732. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^7 + 7x = \alpha$, με $\alpha \in [0, 8]$, διαθέτει μοναδική λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

Άσκηση 733. Επιλύστε την εξίσωση:

$$(x^2 + x + 1)^{11} - (2x^2 - x + 1)^7 + (x^2 + x + 1)^7 - (2x^2 - x + 1)^{11} = x^2 - 2x. \quad (*)$$

Άσκηση 734. Επιλύστε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

Άσκηση 735. Για $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $a \in \mathbb{R}$ με $\alpha < 2\nu - 1$, αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$x^{2\nu} + 2\nu x + \alpha = 0, \quad (*)$$

διαθέτει ακριβώς δύο λύσεις.

Άσκηση 736. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \alpha \quad (*)$$

διαθέτει λύση.

Άσκηση 737. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 6$.

- (1) Να βρεθεί το σύνολο τιμών.
- (2) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{2} = 0$ διαθέτει ακριβώς δύο λύσεις.

Άσκηση 738. Να λυθεί η ανίσωση $2\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{x+23} + \sqrt[3]{x+60} < 11$.

Άσκηση 739. Αποδείξτε ότι $x^3 - x > \ln x$, για κάθε $x > 1$.

Άσκηση 740. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -2x^3 + \alpha x^2 - 6x + 7$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 741. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2) - \alpha x$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 742. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\alpha x^2 + 1}{x + 2}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$.

Άσκηση 743. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{x - e}{\ln x - 1}, \quad A = (0, e) \quad (2) \quad f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}, \quad A = (0, +\infty)$$

Άσκηση 744. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

- (1) $f(x) = (\alpha - 1)x^3 + 6x^2 + 3(\alpha + 2)x - 7$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
 (2) $g(x) = 2\alpha x^3 + 3(\alpha - 3)x^2 + 6\alpha x - 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 745. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\ln 2) = -\ln 4$ και

$$f'(x) = 2e^{-2x-f(x)} - e^{-x-f(x)}, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

- (1) Να βρείτε τον τύπο της f .
 (2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Άσκηση 746. Να λύσετε τις εξισώσεις $e^x = 1 - 2x$ και $1 + x \ln x = x$.

Άσκηση 747. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + e^{f(x)} = 1 - x - x^3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f .
 (2) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(2e^x + x) - f(2 + \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x) = 0$.

Άσκηση 748. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e) = \frac{1}{e-1}$ και

$$xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} + f'(x), \quad (*)$$

για κάθε $x > 1$.

- (1) Να βρείτε τον τύπο της f .
 (2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 (3) Να επιλύσετε την εξίσωση $(2e^x + \sqrt{x} + 1)^{e^x+1} = (e^x + 2)^{2e^x+\sqrt{x}}$.

17. Τοπικά ακρότατα με χρήση παραγώγων

17.1 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 749. Να προσδιορίσετε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{\ln x^2}{x} \quad (2) \quad f(x) = 3|x - 2| + 1 \quad (3) \quad f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Άσκηση 750. Να προσδιορίσετε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 1 \\ 2x^2 - 8x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Άσκηση 751. Να προσδιορίσετε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = -12x^2 + 24|x| + 3, \quad A = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$(2) \quad f(x) = |4 - x^2|, \quad A = [-3, 3]$$

Άσκηση 752. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 1 \quad (2) \quad f(x) = x^2(x + 1)^3 \quad (3) \quad f(x) = x^4 - 8x^3 - 270x^2$$

$$(4) \quad f(x) = x\sqrt{4 - x^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 9}{x^2 - 4} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + 2x}}$$

Άσκηση 753. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{e^x}{2x} \quad (2) \quad f(x) = x^{x \ln x} \quad (3) \quad f(x) = |x|^3$$

$$(4) \quad f(x) = x^4 \ln x \quad (5) \quad f(x) = -x^2 e^x \quad (6) \quad \frac{\ln x}{x}$$

Άσκηση 754. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = x^7 - 7x + 2 \quad (2) \quad f(x) = \frac{x - 1}{x^2} \quad (3) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$$

$$(4) \quad f(x) = 3e^x + x^2 - 3x \quad (5) \quad f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x \quad (6) \quad f(x) = x \ln x - x + e^x - ex$$

Άσκηση 755. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{x \ln x}{x-1} \quad (2) \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (3) \quad f(x) = |e^x - 1|$$

$$(4) \quad f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x + 1} \quad (5) \quad f(x) = \ln(x^2 - 8x + 12) \quad (6) \quad f(x) = \sin \sqrt{x} - \frac{x^2}{24}$$

Άσκηση 756. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x < -1 \\ 2x^3 - 3x^2 + 5, & x \geq -1 \end{cases}$$

Άσκηση 757. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν:

$$(1) \quad f(x) = x - x^3, \quad A = [0, 1] \quad (2) \quad f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad A = [-1, 1]$$

$$(3) \quad f(x) = |x^2 - 5x + 6|, \quad A = [0, 2] \quad (4) \quad f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}, \quad A = [1, 6]$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}, \quad A = \mathbb{R} \quad (6) \quad f(x) = \frac{\sin x - \eta \mu x}{e^x}, \quad A = [0, 2\pi]$$

Άσκηση 758. Έστω f συνάρτηση με $f'(x) = (x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τα τοπικά ακρότατα της f .

Άσκηση 759. Αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta + 1}{e^x}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$, αποδείξτε ότι $\alpha - \beta = 1$.

Άσκηση 760. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - \beta}{(x-1)(x-4)}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $(1, 4)$. Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό ακρότατο, να υπολογίσετε τα α, β .

Άσκηση 761. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln(x-1) + \beta x^2 - 3x + 5$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Έπειτα, να βρείτε τις τιμές και το είδος των ακροτάτων.

Άσκηση 762. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 2$ τοπικό ακρότατο και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

- (1) Να βρείτε τους αριθμούς α, β .
- (2) Να βρείτε το είδος του ακροτάτου και την τιμή του.

Άσκηση 763. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + x + 2$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η f παρουσιάζει στις θέσεις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ τοπικά ακρότατα.

(1) Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

(2) Να βρείτε το είδος του ακροτάτου και την τιμή του.

Άσκηση 764. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \text{ με } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^*$$

Άσκηση 765. Θεωρούμε παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , τέτοια ώστε

$$f^3(x) + 2f(x) = x^3 + 4x^2 + 11x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Άσκηση 766. Θεωρούμε παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , τέτοια ώστε

$$f^3(x) + f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Άσκηση 767. Θεωρούμε παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , τέτοια ώστε

$$e^{f(x)} + 2f(x) = x^3 + 2x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Άσκηση 768. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\alpha\beta = e^5$.

Άσκηση 769. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με

$$\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \geq 2 + \sin x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\alpha\beta\gamma = 1$.

Άσκηση 770. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $(-1, 1)$ με

$$3 + xf(x) \leq g(x) \leq 2x + 3^{x+1}, \quad (*)$$

για κάθε $(-1, 1)$, αποδείξτε ότι $f(0) - 2g(0) = 3 \ln 3$.

Άσκηση 771. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με

$$\alpha x^2 + \frac{\beta}{x} \geq \gamma, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $27\alpha\beta^2 \geq 4\gamma^3$.

Άσκηση 772. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$1 + \alpha \ln x \leq x, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\alpha = 1$.

Άσκηση 773. Θεωρούμε παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f , με $f(e) = 1$ και

$$f(x) \leq \ln x, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(e, f(e))$.

Άσκηση 774. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1) = 2$ και

$$f(x) \geq e^{x-1} + \ln x + x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, 2)$.

Άσκηση 775. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 5$, $f(1) = 3$ και

$$f(x) \leq 2x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Άσκηση 776. Έστω συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) , όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Αν $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει το πολύ ένα τοπικό ακρότατο στο (α, β) .

Άσκηση 777. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x+1}$, όπου $x > -1$ και $\lambda > 0$.

(1) Να αποδείξετε ότι η f διαθέτει ένα ελάχιστο.

(2) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του.

Άσκηση 778. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}$, όπου $x > 0$.

(1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα.

(2) Να αποδείξετε ότι $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$.

Άσκηση 779. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x - x \ln x$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή, την οποία και να προσδιορίσετε.

Άσκηση 780. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x - \sqrt{2} \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$.

(1) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(2) Να προσδιορίσετε τα τοπικά ακρότατα της f .

(3) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .

(Προς υπενθύμιση: $\eta\mu 2x = 2 \eta\mu x \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.)

Άσκηση 781. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \eta\mu^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$ και ότι το $x_0 = 0$ είναι σημείο τοπικού ελάχιστου της συνάρτησης f .

Άσκηση 782. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} - \alpha + 5$ παρουσιάζει ελάχιστο στην θέση $x_0 = 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 783. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^{\frac{1}{\nu}}$, $x > 0$.

Άσκηση 784. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (x+1)^{x+1}(1-x)^{1-x}$, ορισμένης στο διάστημα $(-1, 1)$.

Άσκηση 785. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \eta\mu x$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

Άσκηση 786. Για $\nu \in \mathbb{N}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^{2\nu+1}(x^{2\nu+1} - 1)$ ως προς μονοτονία και τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 787. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x + e^x}{e^x}$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq \alpha$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 788. Μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f διαθέτει συνεχή παράγωγο και δεν παρουσιάζει ακρότατα. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Άσκηση 789. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ είναι ανοικτό διάστημα. Θεωρούμε ένα σημείο A , εκτός της C_f . Έστω ότι υπάρχει σημείο B της C_f για το οποίο η απόσταση (AB) είναι η ελάχιστη δυνατή. Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στο B είναι κάθετη στην ευθεία AB .

Άσκηση 790. Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μία κορυφή είναι το σημείο $O(0, 0)$, δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2$. Να βρείτε τις διαστάσεις α, β ώστε το ορθογώνιο να διαθέτει μέγιστο εμβαδό.

Άσκηση 791. Να προσδιορίσετε σημείο M της ευθείας $y = 1$ ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(1, 3)$ να είναι ελάχιστο.

Άσκηση 792. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Να βρείτε σημείο M της C_f που απέχει ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(4, 0)$.

Άσκηση 793. Οι δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος $\alpha = 6 \text{ cm}$, $\beta = 8 \text{ cm}$. Να βρεθεί η περιεχόμενη στις δύο πλευρές γωνία ώστε το τρίγωνο να αποκτά μέγιστο εμβαδό.

Άσκηση 794. Δίνονται τα σημεία $A(0, 1)$, $B(0, 2)$. Να βρείτε σημείο M της ευθείας με εξίσωση $y = -1$ ώστε η γωνία $\widehat{AMB}$ να είναι μέγιστη.

Άσκηση 795. Ένα ορθογώνιο διαστάσεων x, y με περίμετρο 36 cm περιστρέφεται γύρω από την πλευρά y και παράγει έναν κύλινδρο. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις x, y ώστε ο κύλινδρος να έχει τον μέγιστο όγκο, ο οποίος και να υπολογιστεί. Ποιος είναι ο όγκος αυτός;

(Προς υπενθύμιση: Ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος v ισούται με $V = \pi \rho^2 v$.)

Άσκηση 796. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $2x + y$, όπου x, y είναι τα μήκη καθέτων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με μήκος υποτείνουσας $2\sqrt{5}$.

Άσκηση 797. Να βρείτε το σημείο M της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $A(3, 0)$ την μικρότερη δυνατή απόσταση.

Άσκηση 798. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους d περιστρέφεται γύρω από μία κάθετη πλευρά του, σχηματίζοντας έτσι έναν ορθό κώνο. Να βρείτε τον μέγιστο όγκο που μπορεί να έχει ο κώνος.

(Προς υπενθύμιση: Ο όγκος κώνου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος v ισούται με $V = \frac{1}{3}\pi \rho^2 v$.)

Άσκηση 799. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 12 - x^2$. Θεωρούμε επίσης το χωρίο Ω που περικλείεται από την C_f και το άξονα $x'x$. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδό ορθογωνίου που βρίσκεται εντός του Ω , με βάση στον $x'x$ και τις άλλες δύο κορυφές στην C_f .

Άσκηση 800. Να βρείτε τις διαστάσεις ορθογωνίου εγγεγραμμένου σε ημικύκλιο ακτίνας R , με μέγιστο εμβαδό.

Άσκηση 801. Θεωρούμε τετράγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο, των οποίων το άθροισμα των περιμέτρων είναι σταθερό και ίσο με l . Να βρεθούν οι διαστάσεις των σχημάτων ώστε το άθροισμα των εμβαδών των σχημάτων να είναι ελάχιστο.

Άσκηση 802. Θεωρούμε κυκλικό τομέα ακτίνας R και κεντρικής γωνίας ϑ . Να βρεθούν τα R και ϑ ώστε να μεγιστοποιείται η περίμετρος του, όταν το εμβαδό είναι σταθερό και ίσο με E .

Άσκηση 803. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon : y = 2 - x$, $\zeta : y = 3$ και η ευθεία $\delta : y = \lambda x$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία δ τέμνει τις ε, ζ στα σημεία A, B αντιστοίχως και O είναι η αρχή των αξόνων, να βρείτε για ποια τιμή του λ το γινόμενο $d = (OA) \cdot (OB)$ γίνεται ελάχιστο, καθώς και την ελάχιστη τιμή αυτή.

Άσκηση 804. Θεωρούμε κύκλο (K, R) , σημείο του A και την εφαπτόμενη ε του κύκλου στο A . Έστω χορδή $B\Gamma$ του κύκλου, παράλληλη στην παραπάνω εφαπτόμενη. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η απόσταση της χορδής $B\Gamma$ από την εφαπτόμενη ε ώστε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι μέγιστο.

17.2 Ανισώσεις & εξισώσεις

Άσκηση 805. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

- | | |
|--|--|
| (1) $e^{x-1} \geq x, \quad x \in \mathbb{R}$ | (2) $e^{x^2} \geq 1 - x, \quad x \geq 0$ |
| (3) $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1, \quad x \geq 0$ | (4) $2 \ln(x-1) \leq x - 3 + \ln 4, \quad x > 1$ |
| (5) $2e^x \geq e(x^2 + 1), \quad x \geq 1$ | (6) $x + x^3 + \sin x \geq 1, \quad x \geq 0$ |

Άσκηση 806. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

- | | |
|--|--|
| (1) $\ln x \leq \frac{x}{e}, \quad x > 0$ | (2) $x^2 \geq 3 - \frac{2}{x}, \quad x > 0$ |
| (3) $e^x \geq x^e, \quad x > 0$ | (4) $x^x(4-x)^{4-x} \geq 16, \quad 0 < x < 4$ |
| (5) $\sin x + x \cos x > 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ | (6) $1 > \frac{\eta\mu x}{x} > \frac{2}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ |

Άσκηση 807. Για $x > 0$ αποδείξτε ότι:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| (1) $1 - x < e^{-x}$ | (2) $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$ | (3) $e^x > \frac{1}{1+x}$ |
| (4) $e^x > 1 + \ln(1+x)$ | (5) $\eta\mu x < 2x$ | (6) $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$ |

Άσκηση 808. Να επιλύσετε τις ανισώσεις:

- | | |
|------------------------------|---|
| (1) $e^x - 1 \leq x$ | (2) $\eta\mu(e^x - 1) + 3(e^x - 1) \leq \eta\mu x + 3x$ |
| (3) $e^x - 1 \leq 1 - \ln x$ | (4) $\frac{x+5}{x+2} - \ln x \leq 2$ |
| (5) $2^x + 4^x > 6^x$ | (6) $\sqrt{e^{x^2-1}} \leq x$ |

Άσκηση 809. Αποδείξτε ότι $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 810. Αν $0 < \alpha < \beta$, αποδείξτε ότι $\ln \alpha - \ln \beta > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$.

Άσκηση 811. Αν $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, αποδείξτε ότι $\sin x \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Άσκηση 812. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι:

- | | |
|--|---|
| (1) $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ | (2) $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$ |
|--|---|

Άσκηση 813. Αν $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, αποδείξτε ότι $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 814. Αποδείξτε ότι:

- (1) Η εξίσωση $x^{10} - 10x + \alpha = 0$, με $\alpha > 9$, δεν διαθέτει λύσεις.
- (2) Η εξίσωση $4x^5 - 5x^4 + 3 = 0$ διαθέτει ακριβώς μία λύση.

Άσκηση 815. Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

- (1) $3^x = 2x + 1$
- (2) $e^{\frac{x}{e}} = x$

Άσκηση 816. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - \sin 2x + 1$. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της f και να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Άσκηση 817. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (2) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- (3) Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$ ισχύει

$$e^{\alpha+2\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2, \quad (*)$$

να υπολογίσετε τους α, β .

Άσκηση 818. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)e^{x-1} + \kappa x + 2$, όπου $\kappa > 1$.

- (1) Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq \kappa - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = \kappa$.

Άσκηση 819. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Άσκηση 820. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 1$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Άσκηση 821. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

- (1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- (2) Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 822. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - |x| - 2$.

- (1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- (2) Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

17.3 Προβλήματα

Άσκηση 823. Η ταχύτητα μεταφοράς πληροφορίας μέσω ενός καλωδίου είναι ανάλογη της ποσότητας $\frac{\ln x}{x^2}$, όπου x το πάχος της μόνωσης του καλωδίου σε cm. Ποιο πρέπει να είναι το πάχος της μόνωσης ώστε η ταχύτητα να είναι μέγιστη;

Άσκηση 824. Για την ένταση φωτισμού είναι γνωστά τα εξής:

- Σε οποιοδήποτε σημείο, η ένταση είναι ανάλογη του ηλίικου της έντασης της πηγής προς το τετράγωνο της απόστασης από την πηγή.
- Σε οποιοδήποτε σημείο, η συνολική ένταση φωτισμού από δύο πηγές ισούται με το άθροισμα των αντίστοιχων εντάσεων των πηγών.

Δύο πηγές φωτισμού με εντάσεις α και β αντιστοίχως, απέχουν απόσταση d μεταξύ τους. Να βρεθεί το σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις πηγές, στο οποίο η συνολική ένταση να είναι ελάχιστη.

Άσκηση 825. Σε αυτοκαταλυτική αντίδραση $A \rightarrow B + K$, το προϊόν K είναι και καταλύτης της αντίδρασης. Η ταχύτητα αντίδρασης δίνεται από την σχέση $v = \kappa(\alpha - x)x^2$, όπου α η αρχική ποσότητα, x η ποσότητα της χημικής ένωσης A που αντιδρά και κ σταθερά. Για ποιες τιμές του x η ταχύτητα αντίδρασης γίνεται μέγιστη;

Άσκηση 826. Έστω $K(x)$ το συνολικό κόστος παραγωγής $x > 0$ μονάδων ενός προϊόντος και $C(x) = \frac{K(x)}{x}$ το μέσο κόστος. Αν το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, για κάποιο x_0 , αποδείξτε την ισότητα $K'(x_0) = C(x_0)$.

Άσκηση 827. Ένας παραγωγός μπορεί να πουλήσει x μονάδες ενός προϊόντος με κόστος $K(x) = 500x + 2000$, στην τιμή $D(x) = 2000 - 0,1x$. Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει για να έχει το μέγιστο κέρδος;

Άσκηση 828. Μια εταιρεία παράγει τον μήνα x μονάδες ενός προϊόντος με κόστος παραγωγής $K(x) = 10^4x + 10^6$. Οι x αυτές μονάδες πωλούνται με τιμή $A(x) = 5 \cdot 10^4 - 20x$.

- (1) Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγει η εταιρεία ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος και ποια είναι τότε η τιμή πώλησης κάθε μονάδας.
- (2) Ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης για να προκύψει μέγιστο κέρδος, όταν επιπλέον επιβάλλεται φόρος τεσσάρων νομισματικών μονάδων ανά μονάδα προϊόντος;

Άσκηση 829. Πρόκειται να κατασκευάσουμε κυλινδρικό δοχείο χωρητικότητας 1 l. Ποιες διαστάσεις πρέπει να διαθέτει το δοχείο ώστε να χρησιμοποιηθεί όσο το δυνατόν λιγότερο υλικό κατασκευής;

(Προς υπενθύμιση: Ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος v ισούται με $V = \pi\rho^2v$, ενώ το εμβαδό της επιφάνειας με $E = 2\pi\rho(\rho + v)$.)

Άσκηση 830. Πρόκειται να δημιουργηθεί αφίσα που να περιλαμβάνει 50 cm^2 τυπωμένο υλικό και περιθώρια 4 cm πάνω και κάτω, και 2 cm πλάγια. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις της αφίσας ώστε η επιφάνεια της να είναι ελάχιστη.

Άσκηση 831. Ένας εκδρομέας πρέπει να διασχίσει μια κυκλική λίμνη ακτίνας 1 km . Μπορεί να κωπηλατήσει μέχρι την απέναντι όχθη με ταχύτητα 2 km/h ή να βαδίσει περιφερειακά με ταχύτητα 4 km/h ή να κωπηλατήσει κατά ένα μέρος και να βαδίσει την υπόλοιπη διαδρομή. Ποια διαδρομή πρέπει να επιλέξει ώστε περάσει απέναντι όσο το δυνατόν πιο αργά και όσο το δυνατόν πιο γρήγορα;

Άσκηση 832. Ένα αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Η απόσταση του από το έδαφος δίνεται από την σχέση $h(t) = -8t^2 + 48t + 56$ όπου h σε m και t σε s . Να βρείτε

- (1) την ταχύτητα του όταν $t = 0 \text{ s}$,
- (2) Το μέγιστο ύψος που μπορεί να επιτευχθεί,
- (3) την ταχύτητα του όταν $h = 0 \text{ m}$.

Άσκηση 833. Μια πλευρά ενός ανοικτού αγροτεμαχίου συνορεύει με ποτάμι ευθύγραμμης ροής. Πώς θα περιφράξουμε ορθογώνια τις άλλες τρεις πλευρές του αγροτεμαχίου με φράκτη μήκους l ώστε να περικλείεται μέγιστο εμβαδό;

Άσκηση 834. Ένα ορθογώνιο αγροτεμάχιο εμβαδού 21600 m^2 πρόκειται να περιφραχθεί με συρματοπλέγμα και να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη από άλλο συρματοπλέγμα, παράλληλο σε μια από τις πλευρές του. Να βρείτε τις διαστάσεις του εξωτερικού ορθογωνίου ώστε να χρησιμοποιηθεί η ελάχιστη δυνατή ποσότητα υλικού περιφράξης.

Άσκηση 835. Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 1600 m για να περιφράξει δύο χωριστά αγροτεμάχια. Το πρώτο είναι ορθογώνιο με τη μια διάσταση του τριπλάσια της άλλης, ενώ το δεύτερο είναι τετράγωνο. Το ορθογώνιο αγροτεμάχιο πρέπει να διαθέτει εμβαδό τουλάχιστον 1200 m^2 και το τετράγωνο τουλάχιστον 400 m^2 . Να βρείτε τη μέγιστη συνολική επιφάνεια που μπορεί να περιφραχθεί.

Άσκηση 836. Πρόκειται να κατασκευαστεί ορθογώνιο γήπεδο με ημικυκλική περιοχή σε καθεμία από τις δύο απέναντι πλευρές του. Διαδρομή 400 m θα αποτελέσει την περίμετρο του γηπέδου. Να βρείτε τις διαστάσεις του γηπέδου ώστε το ορθογώνιο μέρος του να διαθέτει μέγιστο εμβαδό.

Άσκηση 837. Το κείμενο και οι εικόνες κάθε σελίδας ενός βιβλίου καταλαμβάνουν εμβαδό E , τα πλάγια περιθώρια έχουν μήκος α , ενώ τα άνω και κάτω περιθώρια έχουν μήκος β . Πώς πρέπει να επιλεγούν οι διαστάσεις της σελίδας έτσι ώστε να διαθέτει ελάχιστο δυνατό εμβαδό;

18. Κυρτότητα & σημεία καμπής

Άσκηση 838. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} & (2) \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1} & (3) \quad f(x) = \frac{x - 1}{x^2} \\ (4) \quad f(x) = (x - 2)^4(5 - x)^5 & (5) \quad f(x) = x \ln \frac{1}{x} & (6) \quad f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt{x} \end{array}$$

Άσκηση 839. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & (2) \quad f(x) = x^x & (3) \quad f(x) = \frac{2\ln^2 x + 2\ln x + 1}{x^2} \\ (4) \quad f(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x} & (5) \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - x \ln x + x & (6) \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} \end{array}$$

Άσκηση 840. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (1) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό διάστημα τιμών του α ώστε η συνάρτηση f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- (2) Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διαθέτει ως σημείο καμπής το $A(1, f(1))$;

Άσκηση 841. Θεωρούμε συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3, 3)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in (-3, 3)$. Αποδείξτε ότι η C_f δεν διαθέτει σημεία καμπής.

Άσκηση 842. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ και κοίλη στο $[0, 3]$. Αποδείξτε ότι $f(1) + f(2) > f(0) + f(3)$.

Άσκηση 843. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2 - x^2}{x + 1}$, όπου $x > -1$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

$$(2) \text{ Αν } \alpha, \beta > \frac{1}{e}, \text{ να αποδείξετε ότι: } \frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq \frac{2 - \ln^2(\sqrt{\alpha\beta})}{\ln(\sqrt{\alpha\beta}) + 1}.$$

Άσκηση 844. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα Δ . Αποδείξτε ότι

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.

Άσκηση 845. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- (2) Να αποδείξετε ότι $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 846. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \eta \mu x$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- (2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
- (3) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Άσκηση 847. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$, όπου $\alpha > 0$.

- (1) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή.
- (2) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, \alpha)$ και την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από τα σημείο $O(0, 0)$.

Άσκηση 848. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$ διαθέτει τρία σημεία καμπής, τα οποία είναι συνευθειακά.

Άσκηση 849. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2$, αποδείξτε ότι

- (1) η f παρουσιάζει ακρότατα και η C_f ένα σημείο καμπής,
- (2) τα παραπάνω σημεία είναι συνευθειακά.

Άσκηση 850. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο, και η C_f παρουσιάζει ένα σημείο καμπής.
- (2) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, αποδείξτε ότι το $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB με άκρα τα $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$.

Άσκηση 851. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το $x_0 = -2$ είναι θέση σημείου καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + (\lambda^2 - \lambda)x^2 + \lambda x + 3 - \lambda^4$.

Άσκηση 852. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 2$ να διαθέτει ως σημείο καμπής το $A(2, 3)$.

Άσκηση 853. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x - 4$ να διαθέτει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -3$ και το σημείο $A(-2, f(-2))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

Άσκηση 854. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 54x^2 - 5x - 7$ να μην διαθέτει σημείο καμπής.

Άσκηση 855. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ δεν διαθέτει σημείο καμπής.

Άσκηση 856. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 1$. Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $M(1, 3)$ να είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Άσκηση 857. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6\alpha x^2$. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 858. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$$f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τα τοπικά μέγιστα & ελάχιστα της f , καθώς και τα σημεία καμπής της C_f .

Άσκηση 859. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το $f(x_0) = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x)), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή.

(2) Αποδείξτε ότι $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 860. Αν για τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g ισχύει

$$g'(x) + g''(x) > 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = g\left(\ln \frac{1}{x}\right)$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 861. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + 5 \eta \mu x$. Αποδείξτε ότι η C_f διαθέτει μοναδικό σημείο καμπής.

Άσκηση 862. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , για την οποία ισχύει

$$f^4(x) = -5f^2(x) - e^x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η C_f δεν διαθέτει σημείο καμψής.

Άσκηση 863. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f διαθέτει το πολύ δύο ρίζες.
- (2) Αν ε τυχούσα ευθεία, αποδείξτε ότι η C_f διαθέτει το πολύ δύο κοινά σημεία με την ε .
- (3) Αν η C_f εφάπτεται του άξονα $x'x$, αποδείξτε ότι η f διαθέτει ακριβώς μία ρίζα.

Άσκηση 864. Για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f αποδείξτε ότι δεν είναι δυνατόν η f να εμφανίζει στο x_0 τοπικό ακρότατο και η C_f να διαθέτει ως σημείο καμψής το $A(x_0, f(x_0))$.

Άσκηση 865. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$, όπου $\alpha > 0$.

- (1) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- (2) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 866. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + e^x - 3x$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- (2) Αποδείξτε ότι $f(x) \geq -2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + e^x = x + 1$.

Άσκηση 867. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$ και βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(e, f(e))$.
- (2) Αποδείξτε ότι $f(x) \leq e^{-1}x - 1$, για κάθε $x > 1$.
- (3) Να λυθεί η εξίσωση $e \ln(\ln x) = x - e$.

19. Ασύμπτωτες

19.1 Υπολογισμός ασυμπτώτων

Άσκηση 868. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad f(x) = \frac{1}{x+2} & (2) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-3} & (3) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2} \\ (4) \quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} & (5) \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} & (6) \quad f(x) = \frac{x^3 - 5}{1-x} \end{array}$$

Άσκηση 869. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+1} & (2) \quad f(x) = \frac{x(2x^2 - 1)}{x+4} & (3) \quad f(x) = \frac{x^3 - x + 6}{x^2 - 4} \\ (4) \quad f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2} & (5) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x} & (6) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - x \end{array}$$

Άσκηση 870. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-3} & (2) \quad f(x) = \frac{x\sqrt{2-x}}{2+x} & (3) \quad f(x) = \frac{x^2}{(x+1)e^x} \\ (4) \quad f(x) = \ln(4-x^2) & (5) \quad f(x) = \frac{1+3\ln x}{x} & (6) \quad f(x) = \frac{x\ln(x-1)}{x^2-4} \end{array}$$

Άσκηση 871. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad f(x) = \sigma\phi x, x \in (0, \pi) & (2) \quad f(x) = x \eta\mu \frac{2}{x} & (3) \quad f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{x} \\ (4) \quad f(x) = \ln \frac{x^2}{|x^2 - 1|} & (5) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x & (6) \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} \end{array}$$

Άσκηση 872. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} & (2) \quad f(x) = 2x + 3 + \frac{5e^x}{1+e^x} & (3) \quad f(x) = 3x - 2 + \frac{\eta\mu x}{x} \\ (4) \quad f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} & (5) \quad f(x) = \frac{(x+1)\ln x + x}{\ln x} & (6) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x-3} \end{array}$$

19.2 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 873. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 1 \\ 3x+2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .

Άσκηση 874. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{xe^x + \eta\mu x}{e^x}$. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f και να αποδειχθεί ότι διαθέτουν άπειρα κοινά σημεία με τη C_f .

Άσκηση 875. Δίνεται η συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Αν $g(x) = f(x) - 2x + 1$, να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g .

Άσκηση 876. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \kappa x - 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του κ .
- (2) Αν $\kappa = 2$ να αποδείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.

Άσκηση 877. Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε:

- (1) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$.
- (2) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$.

Άσκηση 878. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διαθέτει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 3$, να υπολογιστεί το όριο

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+1)f(x) - 8x^2 + 2x + \eta\mu x}{f(x) + x(f(x) + 1) - 4x^2 + 3}.$$

Άσκηση 879. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha + 2)x^2 - 3\alpha x + 4}{2x - 1}$ και η ευθεία $\varepsilon : y = 3x + \beta$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ε να είναι ασύμπτωτη της C_f .

Άσκηση 880. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon : y = \alpha x + \beta$ να είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{9x^2 - x + 1} - x$.

Άσκηση 881. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

Άσκηση 882. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ να είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + x + \alpha - 1}{x - \alpha^4}$.

Άσκηση 883. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon : y = x + \kappa$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x \ln^2 \frac{4x - 1}{2x + 1}$.

Άσκηση 884. Αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x - \beta}$ διαθέτει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -1$ και $y = 3$, αποδείξτε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = -1$.

Άσκηση 885. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + \beta x + 5}{3x + \gamma}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι α, β, γ ώστε η γραφική παράσταση της f να διαθέτει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -2$ και $y = 3$.

Άσκηση 886. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διαθέτει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = x + 2$, να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)\sqrt{9x^2 + 1} + 3\mu x^2 + 4}{f(x)x^2 + \sqrt{x^4 + 1} - x^3 + 2} = 10. \quad (*)$$

Άσκηση 887. Η ευθείες $x = 1$ και $x = 3$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x}{x^2 + \alpha x + \beta}$. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 888. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η ευθεία $\varepsilon_1 : y = -x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και η $\varepsilon_2 : y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- (2) Αποδείξτε ότι $x^2 + 2x + 2 > (x + 1)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

20. Κανόνες De L' Hospital

20.1 Υπολογισμός ορίων

Άσκηση 889. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x - 3} & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x + 5\sqrt{x}} & (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} \\ (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} & (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1 - x} & (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^3} \end{array}$$

Άσκηση 890. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{e^x - 1} & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{e^x - 1} & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x} & (5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{x - \frac{\pi}{4}} & (6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \epsilon\phi x \right) \end{array}$$

Άσκηση 891. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow 2} \left((x^2 - 4) \epsilon\phi \frac{\pi x}{4} \right) & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2 \sigma\upsilon\nu x - 2} & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2} \\ (4) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln x} & (5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{e^x - e x} & (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} \end{array}$$

Άσκηση 892. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e x}{x + e^x} & (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) & (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) & (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - 3^x}{x} & (6) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-2x}) \end{array}$$

Άσκηση 893. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\ln(\sqrt{x} + 2)} & (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^4} & (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + \eta\mu x}{e^x + x + 2} \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 3^{-x^4}) & (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x - e^x) & (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^x}{x^2 + e^{2x}} \end{array}$$

Άσκηση 894. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0+} x^x & (2) \lim_{x \rightarrow 0+} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \eta\mu x)^{\frac{1}{x}} & (5) \lim_{x \rightarrow 0+} (1 + x)^{\sigma\varphi x} & (6) \lim_{x \rightarrow 0+} (x + 2)^{\frac{1}{x}}
 \end{array}$$

Άσκηση 895. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x} - \frac{e^x}{\eta\mu x} \right) & (2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) & (3) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\eta\mu x}{\ln x} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow 0+} \left(e^{\frac{1}{x}} \eta\mu x \right) & (5) \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 \ln x) & (6) \lim_{x \rightarrow 0+} (x^4 \ln |x|)
 \end{array}$$

Άσκηση 896. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - e^x}{x + e^{2x}} & (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{e^x} & (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x-3} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln^3 x} & (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + e^x + e^{3x})^{\frac{1}{x}} & (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x
 \end{array}$$

Άσκηση 897. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} & (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} & (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^x} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\ln x} & (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \eta\mu \frac{1}{x}\right) & (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^x
 \end{array}$$

Άσκηση 898. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-4} + 3 - x}{\eta\mu^2 \pi x} & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x + \frac{x^3}{6}}{x^4} & (3) \lim_{x \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x^2}} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \epsilon\varphi x \right) & (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sigma\upsilon\nu x}{\ln \sigma\upsilon\nu 2x} & (6) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{1-x} \ln \ln \frac{1}{x} \right)
 \end{array}$$

Άσκηση 899. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x + 5^x - 3}{x} & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + \eta\mu 2x - 1}{\ln(1 + 2x)} & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \sigma\upsilon\nu x}{x - \eta\mu x} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x - \epsilon\varphi 2x}{x^3} & (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e \epsilon\varphi x}{\ln(1 + x)} & (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi 2x - 2 \epsilon\varphi x}{2 \eta\mu x - \eta\mu 2x}
 \end{array}$$

20.2 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 900. Για $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x}$.

Άσκηση 901. Για $\alpha \neq 0$, να υπολογίσετε το όριο $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp \alpha x - \alpha \exp x}{\alpha \eta \mu x - \eta \mu \alpha x}$.

Άσκηση 902. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2xe^{-\frac{1}{x}} - \alpha x + 2\beta \right) = 0 \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x - \alpha x - \beta} = 2$$

Άσκηση 903. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu^2 \pi x}{2-x}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Άσκηση 904. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln \sqrt{x}}{x-1}, & x > 0 \text{ και } x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}.$$

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 1.
- (2) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, με $f'(1) = \frac{1}{4}$.
- (3) Υπολογίστε την παράγωγο της f .

Άσκηση 905. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

να βρεθούν οι $f'(0)$ και $f''(0)$.

Άσκηση 906. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x \leq 1 \\ \alpha \ln x - \beta, & x > 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 907. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Άσκηση 908. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x - \alpha)e^x - (1 - \alpha)x - \beta}{x^2}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Άσκηση 909. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 1x, & x \neq 0 \\ \ln 3, & x = 0 \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι $f'(0) = \frac{\ln 3}{2}$.

Άσκηση 910. Έστω $\alpha > 0$ και $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(x) = \frac{x - x\alpha}{\ln x}$, για $0 < x < 1$, και $f(0) = 0$, $f(1) = 1 - \alpha$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Άσκηση 911. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f, g με:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (2) \quad g(x) = \begin{cases} \ln |x| - \ln |1 - e^x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 912. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν:

$$(1) \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \quad (2) \quad f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x - 1} \quad (3) \quad f(x) = x \ln x^2$$

$$(4) \quad f(x) = \sqrt{9x^2 - x + 1} \quad (5) \quad f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x} - 1} \quad (6) \quad f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x}$$

Άσκηση 913. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν:

$$(1) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (2) \quad f(x) = x^2 - 2x - x \ln^2 x \quad (3) \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{(x^3 + x^2 + x + 1) \ln x}{e^{2x}} \quad (5) \quad f(x) = \ln |e^{2x} - 1| \quad (6) \quad f(x) = x \ln \left(e - \frac{1}{x} \right)$$

Άσκηση 914. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$. Να βρείτε τα όρια της f στο 0 και στο $+\infty$, καθώς και το σύνολο τιμών της f .

Άσκηση 915. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f με

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf'(x) + f(x)) = 4.$$

Αποδείξτε ότι $\alpha = 4$.

Άσκηση 916. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f με

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) + f(x)) = 2.$$

Αποδείξτε ότι $\alpha = 2$.

Άσκηση 917. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ ώστε το όριο

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha e^{1-x} + \beta x + 4}{x^2 - 2x + 1}$$

να είναι πραγματικός αριθμός, το οποίο και να βρεθεί.

Άσκηση 918. Έστω f παραγωγίσιμη στο 0 συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu x - xe^x}$$

Άσκηση 919. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu x}{x^2} = 0$, να βρεθεί η $f'(0)$.

Άσκηση 920. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη. Αποδείξτε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ότι:

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-2h) - f'(x)}{h} = -2f''(x)$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 4f(x-2h) + 3f(x-3h)}{h^2} = 6f''(x)$$

Άσκηση 921. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & x \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x = 1 \end{cases}.$$

(1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(2) Αποδείξτε ότι η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$.

(3) Αποδείξτε ότι $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

21. Μελέτη & γραφική παράσταση

Άσκηση 922. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , όταν:

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ (2) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (3) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
(4) $f(x) = x^4 - 4x^3$ (5) $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 72x$ (6) $f(x) = x^2 - |x| - 2$

Άσκηση 923. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , όταν:

(1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ (2) $f(x) = x + \frac{x-2}{x+1}$ (3) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{2x^2}$
(4) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ (5) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ (6) $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

Άσκηση 924. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , όταν:

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x}$ (2) $f(x) = \frac{x+1}{x(x+2)}$ (3) $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1}$
(4) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ (5) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ (6) $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-1}$

Άσκηση 925. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , όταν:

(1) $f(x) = xe^x$ (2) $f(x) = \frac{e^x-3}{e^x+2}$ (3) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$
(4) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ (5) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (6) $f(x) = \frac{x}{x-\ln x}$

Άσκηση 926. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , όταν:

(1) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ (2) $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ (3) $f(x) = \frac{|1-x|}{1-|x|}$
(4) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ (5) $f(x) = (x+1)(\ln x+1)$ (6) $f(x) = x^2 - 2\ln x$

Άσκηση 927. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\sqrt{3}) = 2$ και

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = -3f'(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f , να μελετήσετε την f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράστασή της.

Άσκηση 928. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

- (1) Αποδείξτε ότι $h(x) \geq 1$, για κάθε $x > 0$.
- (2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = h(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ διαθέτει μοναδική ρίζα στο $(\frac{1}{e}, 1)$.
- (3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \ln x$ ως προς μονοτονία & ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Άσκηση 929. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 4}{x - 1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f διαθέτει ως ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = -x + 2$.

- (1) Να βρείτε τα α, β .
- (2) Να μελετήσετε την f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Άσκηση 930. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln x$ και $g(x) = x - \ln x$.

- (1) Να μελετήσετε ως προς μονοτονία & ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της g .
- (2) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .
- (3) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Άσκηση 931. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2)$.

- (1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f .
- (2) Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- (3) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία & ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (4) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Άσκηση 932. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία & ακρότατα και να αποδείξετε ότι διαθέτει ένα ολικό ακρότατο.
- (2) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.
- (3) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- (4) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- (5) Να αποδείξετε ότι $(x^2 + 4x + 3)e^x \geq 7x + 3$, για κάθε $x \geq -4 + \sqrt{3}$.

Άσκηση 933. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \ln x$, όπου $x > 0$.

- (1) Να αποδείξετε ότι $2x \ln x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.
- (2) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- (3) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\frac{1}{e}, 1)$ τέτοιο ώστε το $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .
- (4) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Άσκηση 934. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία & ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (2) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (3) Να μελετήσετε ως προς κυρτότητα την f και να βρείτε τα σημεία καμπής της, αν υπάρχουν.

Άσκηση 935. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

- (1) Να βρείτε το σύνολο στο οποίο η f είναι συνεχής.
- (2) Να βρείτε το σύνολο στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη.
- (3) Να σχεδιάσετε τη C_f .

Μέρος ΙΙΙ

Ολοκληρωτικός Λογισμός

22. Παράγουσα συνάρτησης

22.1 Υπολογισμός παράγουσας

Άσκηση 936. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) f(x) = 5x^2 - 6x + 1 \quad (2) f(x) = (5 - 3x)^{14} \quad (3) f(x) = (x + 5)^{12}$$

$$(4) f(x) = x(2x^2 + 3)^4 \quad (5) f(x) = \sqrt[4]{x^7} \quad (6) f(x) = 3x\sqrt{x}$$

Άσκηση 937. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 6x + 4}{x^2} \quad (2) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}} \quad (3) f(x) = \frac{1}{x - 3}$$

$$(4) f(x) = \frac{10}{2 - x} \quad (5) f(x) = \frac{2}{3x - 6} \quad (6) f(x) = \frac{1}{9x^2 - 6x + 1}$$

Άσκηση 938. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^3} \quad (2) f(x) = \frac{5}{(1 - 3x)^{10}} \quad (3) f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$$

$$(4) f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1} \quad (5) f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1} \quad (6) f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$$

Άσκηση 939. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) f(x) = \sqrt{7x + 1} \quad (2) f(x) = \sqrt[3]{2x + 2} \quad (3) f(x) = \frac{4}{\sqrt{1 - x}}$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{5x - 1}} \quad (5) f(x) = \frac{5x - 10}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 5}} \quad (6) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 4} + \sqrt{x}}$$

Άσκηση 940. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) f(x) = e^{2-3x} \quad (2) f(x) = 2^{3x+1} \quad (3) f(x) = 10^{1-3x}$$

$$(4) f(x) = \frac{5}{2^{x+1}} \quad (5) f(x) = 3^{2x} \cdot 2^{3x} \quad (6) f(x) = xe^{x^2}$$

Άσκηση 941. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$(1) f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (2) f(x) = (2 \ln x + 1)x \quad (3) f(x) = \ln(\sqrt{1 + x})$$

$$(4) f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} \quad (5) f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad (6) f(x) = \frac{1}{x + x \ln x}$$

Άσκηση 942. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = 3 \eta\mu 5x & (2) & f(x) = \sigma\upsilon\nu(5x - 1) & (3) & f(x) = \epsilon\varphi 2x \\ (4) & f(x) = \sigma\varphi(3x + 2) & (5) & f(x) = x \sigma\upsilon\nu x^2 & (6) & f(x) = \epsilon\varphi^3 x \end{array}$$

Άσκηση 943. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = \frac{e^x}{e^{x+1} + 1} & (2) & f(x) = 2x \eta\mu x + x^2 \sigma\upsilon\nu x & (3) & f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x} \\ (4) & f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x \eta\mu x & (5) & f(x) = e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) & (6) & f(x) = x^2 e^x + 2x e^x \end{array}$$

Άσκηση 944. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = (2x+1) \eta\mu(x^2+x) & (2) & f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x} & (3) & f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} \\ (4) & f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & (5) & f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x} & (6) & f(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \end{array}$$

Άσκηση 945. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2} & (2) & f(x) = \frac{\epsilon\varphi x - 1}{\epsilon\varphi x + 1} & (3) & f(x) = 3\sqrt{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x \\ (4) & f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x} & (5) & f(x) = x^{-2} \eta\mu \left(\frac{\pi}{x} \right) & (6) & f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \end{array}$$

Άσκηση 946. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x} & (2) & f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x} & (3) & f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1} \\ (4) & f(x) = \frac{\ln x}{x \ln^2 x + x} & (5) & f(x) = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}} & (6) & f(x) = \frac{2x e^x - e^x}{2x\sqrt{x}} \end{array}$$

Άσκηση 947. Να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης f , όταν:

$$\begin{array}{lll} (1) & f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} & (2) & f(x) = -\frac{1 + e^x}{e^{2x}} & (3) & f(x) = x \cdot 5^{x^2+\pi} \\ (4) & f(x) = (1 - x)^{100}x & (5) & f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x - 2} & (6) & f(x) = e^{x+1+\ln(x+1)} \end{array}$$

22.2 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 948. Η συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \frac{x}{e^x} + (x+1)^2$ είναι παράγουσα της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$. Να βρεθεί η f και παράγουσα G της f με $G(\ln 2) = 1$.

Άσκηση 949. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} 2x \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παράγουσα της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Άσκηση 950. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

δεν διαθέτει παράγουσα.

Άσκηση 951. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ και F παράγουσα της συνάρτησης f . Αποδείξτε ότι η F δεν διαθέτει ακρότατα.

Άσκηση 952. Να βρείτε παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 6x$ ώστε να διαθέτει τοπικό ακρότατο επί του άξονα $x'x$.

Άσκηση 953. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όταν $f''(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

- (1) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο επαφής $A(0, f(0))$ είναι η $y = 2x + 1$.
- (2) Η f διαθέτει στο $x_0 = 0$ τοπικό ακρότατο το 2.

Άσκηση 954. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

- (1) Να βρεθούν $A, B \in \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$, για $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.
- (2) Να βρεθεί παράγουσα F της f με $F(2) = 0$.

Άσκηση 955. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν $f''(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, για κάθε $x > 0$, και η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Άσκηση 956. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^{12} + 2}{x^{10} + x}, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

(1) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^{10} + x}$, για κάθε $x > 0$.

(2) Να βρείτε παράγουσα της f .

Άσκηση 957. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Έστω επίσης F παράγουσα της f με

$$f(x)F(1-x) = 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(2) Αποδείξτε ότι $F(x)F(1-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3) Αποδείξτε ότι $f(x) = F(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(4) Βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 958. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F παράγουσά της. Για την F υποθέτουμε ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $F''(x) \neq 0$ και

$$F(x) = F(x-2), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

(2) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Άσκηση 959. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και F παράγουσα της f , με

$$f(x)F(x) = -e^{-2x}, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Άσκηση 960. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και F παράγουσα της f , με

$$f(x) = e^{x-F(x)}, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Άσκηση 961. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ και F παράγουσά της. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η F είναι κυρτή ή κοίλη και τις θέσεις των σημείων καμπής της C_f .

22.3 Προβλήματα

Άσκηση 962. Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η ταχύτητα του κάθε χρονική στιγμή t σε s είναι $v(t) = t^2 - t - 2$, σε m/s. Να προσδιορίσετε τη θέση του σώματος $x(t)$, τη χρονική στιγμή $t = 3$ s, αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ήταν στην αρχή των αξόνων.

Άσκηση 963. Μια πέτρα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα κάτω από γέφυρα, τη στιγμή $t = 0$ s, με ταχύτητα $v(t) = 9,8t + 8$, σε m/s. Σε πόσο βάθος θα πέσει στα πρώτα 4 s;

Άσκηση 964. Ο ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού μικροοργανισμών κατά την χρονική στιγμή t σε s ισούται με $N_0 3^t$, όπου N_0 ο πληθυσμός κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ s. Να βρεθεί ο πληθυσμός $N(t)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

Άσκηση 965. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου εισπνεομένου αέρα (σε l) μίας πλήρους εισπνοής δίνεται από τον τύπο

$$V'(t) = \frac{1}{2} \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{5}\right),$$

όπου $t \in [0, 2]$ (σε s). Να υπολογιστεί ο όγκος του εισπνεομένου αέρα σε μία πλήρη εισπνοή.

Άσκηση 966. Σε μια γεώτρηση, ο ρυθμός άντλησης πετρελαίου δίνεται από τον τύπο

$$R'(t) = 20 + 10t - \frac{3}{4}t^2,$$

όπου $R(t)$ είναι το πλήθος, σε χιλιάδες, βαρελιών που αντλήθηκαν στους t πρώτους μήνες λειτουργίας. Να βρείτε πόσα βαρέλια θα έχουν αντληθεί τους 8 πρώτους μήνες λειτουργίας.

Άσκηση 967. Η θερμοκρασία T ενός σώματος ελαττώνεται με ρυθμό $-\kappa\alpha e^{-\kappa t}$, όπου α, κ θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Η αρχική θερμοκρασία $T(0)$ του σώματος είναι $T_0 + \alpha$. Να βρεθεί η θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t .

Άσκηση 968. Η είσπραξη $E(x)$, από πώληση x μονάδων ενός προϊόντος ($0 \leq x \leq 100$) μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(x) = 100 - x$ (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος), ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής είναι σταθερός και ισούται με 2 (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρεθεί το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 100 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδενικό όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα.

Άσκηση 969. Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(t)$ εκφράζεται από τον τύπο $K'(t) = 800 - 0,6t$ (σε εκατοντάδες ευρώ ανά ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης $E(t)$ στο τέλος t ημερών εκφράζεται από τον τύπο $E'(t) = 1000 + 0,3t$ (σε εκατοντάδες ευρώ ανά ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έκτη ημέρα παραγωγής.

23. Ολοκλήρωμα Ι: βασικές ιδιότητες

Άσκηση 970. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = 2$, και με τη βοήθεια αυτών να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(1) \int_{-2}^1 f(x)dx \quad (2) \int_{-2}^1 g(x)dx \quad (3) \int_{-2}^1 2f(x)-5g(x)dx$$

Άσκηση 971. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x + 1$, $g(x) = -x + 2$, και με τη βοήθεια αυτών να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(1) \int_0^2 f(x)dx \quad (2) \int_0^2 g(x)dx \quad (3) \int_{-2}^1 2g(x)-3f(x)dx$$

Άσκηση 972. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(1) \int_0^2 f(x)dx \quad (2) \int_{-2}^2 f(x)dx \quad (3) \int_{\sqrt{3}}^2 f(x)dx$$

Άσκηση 973. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των αντίστοιχων συναρτήσεων, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(1) \int_0^{2\pi} \eta\mu x dx \quad (2) \int_0^3 -x + 1 dx \quad (3) \int_0^3 x - 2 dx$$

Άσκηση 974. Αν για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση είναι γνωστό ότι

$$\int_1^5 f(x)dx = 2, \quad \int_7^{10} f(x)dx = 3, \quad \int_{10}^1 f(x)dx = -4,$$

να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(1) \int_5^{10} f(x)dx \quad (2) \int_1^7 f(x)dx \quad (3) \int_5^7 f(x)dx$$

Άσκηση 975. Αν για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση είναι γνωστό ότι

$$\int_7^4 f(x)dx = -2, \quad \int_0^9 f(x)dx = 6, \quad \int_0^{10} f(x)dx = 8, \quad \int_4^{10} f(x)dx = 5,$$

να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(1) \int_0^4 f(x)dx \quad (2) \int_9^{10} f(x)dx \quad (3) \int_7^9 f(x)dx$$

Άσκηση 976. Αν για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση είναι γνωστό ότι

$$\int_1^4 f(x)dx = 9, \quad \int_3^4 f(x)dx = 11, \quad \int_1^8 f(x)dx = 13,$$

να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(1) \int_4^3 f(x)dx \quad (2) \int_4^8 f(x)dx \quad (3) \int_1^3 f(x)dx \quad (4) \int_3^8 f(x)dx.$$

Άσκηση 977. Για τυχούσα συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση αποδείξτε ότι

$$\int_3^4 f(x)dx - \int_3^2 f(x)dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_5^4 f(x)dx.$$

Άσκηση 978. Αποδείξτε ότι:

$$(1) \int_1^4 \frac{3x^2 + 10}{x^2 + 2} dx - \int_1^4 \frac{4}{x^2 + 2} dx = 9 \quad (2) \int_0^3 \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} dx - \int_3^0 \frac{2x - x^2}{x^2 + 1} dx = 6$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx + \int_1^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx = 1 \quad (4) \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 3}{2x^2 - 8} dx + \frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{x^2 - 4} dx = 1$$

Άσκηση 979. Αν $\int_1^3 f(x)dx = 5$ και $\int_1^3 g(x)dx = -2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(1) \int_1^3 2f(x) - 6g(x)dx \quad (2) \int_3^1 4f(x) - g(x)dx$$

Άσκηση 980. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 5]$ και ισχύει $\int_2^5 f(x)dx = -1$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^5 g(x)dx$ όπου $g(x) = f(x) - 6x + 10$.

Άσκηση 981. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και μη αρνητική στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

$$(1) \int_{-1}^9 f(x)dx \geq \int_0^8 f(x)dx \quad (2) \int_3^1 f(x)dx \leq \int_2^1 f(x)dx$$

Άσκηση 982. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx, \quad (*)$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\beta}^{\delta} f(x)dx$.

Άσκηση 983. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 13]$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

$$(1) \int_0^4 f(x)dx < \int_9^{13} f(x)dx \qquad (2) \int_0^4 f(x)dx < \int_1^5 f(x)dx$$

Άσκηση 984. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε τις ανισότητες, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1) \int_{\alpha}^{\alpha+2} f(x)dx > \int_{\alpha+2}^{\alpha+4} f(x)dx \qquad (2) \int_{\alpha-1}^{\alpha} f(x)dx < \int_{\alpha-4}^{\alpha-3} f(x)dx$$

Άσκηση 985. Αποδείξτε ότι $\int_2^5 \frac{1}{x^2+1} dx \leq \int_2^5 \frac{x}{10} dx$.

Άσκηση 986. Αν $-1 \leq \alpha \leq \beta$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+x} dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{2} + 1 dx$.

Άσκηση 987. Για κάθε $\alpha \in [1, +\infty)$ αποδείξτε ότι

$$\int_{\alpha-1}^{\alpha} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{\alpha} \leq \int_{\alpha}^{\alpha+1} \sqrt{x} dx.$$

Άσκηση 988. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Αν $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, να αποδειχθεί ότι η f διαθέτει ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

24. Ολοκλήρωμα ΙΙ: άμεση ολοκλήρωση

Άσκηση 989. [Άμεση Ολοκλήρωση] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^2 3x^2 + 6x - 7 dx & (2) \int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x} dx & (3) \int_0^1 2x - \sigma\upsilon\nu \pi x + e^x dx \\ (4) \int_{-1}^0 \frac{2x + 5}{2x + 3} dx & (5) \int_0^1 (2x + 1)(\sqrt{x} - 1) dx & (6) \int_0^2 e^{-2x+5} dx \end{array}$$

Άσκηση 990. [Άμεση Ολοκλήρωση] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \epsilon\phi x dx & (2) \int_1^2 -\frac{2}{x^3} + 6x dx & (3) \int_0^2 \frac{x+3}{x+1} dx \\ (4) \int_0^1 (x + \sqrt{x})^2 dx & (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x dx & (6) \int_{-1}^0 \frac{3x}{x^2 + 1} dx \end{array}$$

Άσκηση 991. [Άμεση Ολοκλήρωση] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx & (2) \int_0^1 x\sqrt[3]{x^2 + 4} dx & (3) \int_0^2 |x - 1| dx \\ (4) \int_{-2}^2 |1 - x^2| dx & (5) \int_0^1 \frac{3x - 2}{x^2 + 5x + 6} dx & (6) \int_0^1 \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx \end{array}$$

Άσκηση 992. [Άμεση Ολοκλήρωση] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^2 (3x^2 + 1)(x^3 + x + 1)^3 dx & (2) \int_{-2}^0 x(2x^2 - 1)^3 dx & (3) \int_0^2 \frac{4x + 2}{x^2 + x + 8} dx \\ (4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx & (5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} dx & (6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi 2x dx \end{array}$$

Άσκηση 993. Αφού αποδειχθεί ότι είναι συνεχείς (όταν χρειάζεται), να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων f στα αντίστοιχα διαστήματα:

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 16, & x < 3 \\ 4x - 1, & x \geq 3 \end{cases}, & [0, 4] \quad (2) f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 1, & x \leq 1 \\ 6 - x, & x > 1 \end{cases}, & [-1, 2] \\ (3) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}, & [0, 2] \quad (4) f(x) = \begin{cases} e^x - ex, & x \leq 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}, & [0, 2] \end{array}$$

Άσκηση 994. Αφού αποδειχθεί ότι είναι συνεχείς (όταν χρειάζεται), να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων f στα αντίστοιχα διαστήματα:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x + e^x, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}, \quad [-1, \pi] \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} xe^x + e^x, & x \leq -1 \\ e^{x+1} - 1, & x > -1 \end{cases}, \quad [-2, 0]$$

$$(3) \quad f(x) = |x^2 - x - 2|, \quad [-2, 2] \quad (4) \quad f(x) = |x^3 - 2x^2|, \quad [-1, 3]$$

Άσκηση 995. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

$$(1) \quad \text{Να βρεθούν } A, B, \Gamma \in \mathbb{R} \text{ ώστε } f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

$$(2) \quad \text{Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } \int_1^2 f(x) dx.$$

Άσκηση 996. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{5x^2 + 6x + 7}{x^3 + x^2 + x - 3}$.

$$(1) \quad \text{Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.}$$

$$(2) \quad \text{Να βρεθούν } A, B, \Gamma \in \mathbb{R} \text{ ώστε } f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+2x+3}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$(3) \quad \text{Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } \int_{-1}^0 f(x) dx.$$

$$(4) \quad \text{Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } \int_{-1}^0 \frac{x^4 + 3x^2 - 2x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} dx.$$

Άσκηση 997. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 6x^2 - 20x + 5$ και $g(x) = 3x^2 - x + 1$.

$$(1) \quad \text{Να βρεθούν } A, B \in \mathbb{R} \text{ με } f(x) = Ag(x) + Bg'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad \text{Να υπολογιστεί το } \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Άσκηση 998. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

$$(1) \quad \text{Να βρεθεί το πεδίο ορισμού.}$$

$$(2) \quad \text{Να υπολογιστεί η παράγωγος της } f.$$

$$(3) \quad \text{Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

Άσκηση 999. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^5 |\alpha - x| dx$ στις περιπτώσεις:

- (1) $\alpha \geq 5$, (2) $\alpha \leq 3$, (3) $\alpha \in (3, 5)$.

Άσκηση 1000. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}$ και στην συνέχεια το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Άσκηση 1001. Έστω τα ολοκληρώματα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$.
Να υπολογίσετε τα $I + J$, $I - J$, I , J .

Άσκηση 1002. Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 x^\alpha + x^{\frac{1}{\alpha}} dx = 1$.

Άσκηση 1003. Να αποδείξετε ότι $e + \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx = \frac{1}{2}e^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$.

Άσκηση 1004. Για $\nu \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{1+x^2} dx$.

(1) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu + I_{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

(2) Να υπολογίσετε τα I_0 , I_1 , I_2 .

Άσκηση 1005. Να βρεθεί η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , όταν, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$(1) \quad f(x) = x^2 + x^3 \cdot \int_0^1 f(t) dt \quad (2) \quad \int_0^1 e^{1-t} f(t) dt = f(x) + e^x$$

$$(3) \quad f(x) = -6x + \int_0^4 f(t) dt \quad (4) \quad f(x) = 3x^2 - 6x \cdot \int_0^1 f(t) dt$$

Άσκηση 1006. Θεωρούμε τη συνεχή στο $[0, 1]$ συνάρτηση f . Να βρεθεί ο τύπος της, όταν:

$$(1) \quad \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{3} = 2 \int_0^1 x f(x) dx \quad (2) \quad \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{e^2 - 1}{2} = 2 \int_0^1 e^x f(x) dx$$

Άσκηση 1007. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να επιλυθούν ως προς t οι εξισώσεις:

$$(1) \quad \int_0^{1+t} f(x) dx = 3 \quad (2) \quad \int_0^1 f(x+t) dx = 3 \quad (3) \quad \int_0^1 t f(x) dx = 3$$

Άσκηση 1008. Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = 2$ και $f(\beta) = 0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)f'(x)dx$.

Άσκηση 1009. Αν η μη μηδενική συνάρτηση f διαθέτει συνεχή παράγωγο στο $[-1, 5]$ και $f(-1) = 1$, $f(5) = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^5 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx$.

Άσκηση 1010. Για συνεχή στο $[-1, 1]$ συνάρτηση f , υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} f(\eta\mu x) \sigma\upsilon\nu x \, dx.$$

Άσκηση 1011. Έστω συνεχής συνάρτηση f , με $f(x) \leq 6$, για κάθε $x \in [1, 4]$. Αποδείξτε ότι:

$$\int_1^4 xf(x)dx \leq 45.$$

Άσκηση 1012. Να επιλυθεί ως προς $\alpha \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $\int_1^{\alpha} \alpha - 4x \, dx \geq 6 - 5\alpha$.

Άσκηση 1013. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha > 0$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\alpha} 2 - 4x + 3x^2 \, dx \leq \alpha$.

Άσκηση 1014. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2}$, ορισμένη στο διάστημα $[0, 2]$.

(1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς μονοτονία & ακρότατα.

(2) Να αποδείξετε ότι $3 < \int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx < 5$.

Άσκηση 1015. Έστω $\alpha > 0$.

(1) Αποδείξτε ότι $1 - x^{\alpha} \leq \sqrt{1 - x^{\alpha}} \leq 1 - \frac{1}{2}x^{\alpha}$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

(2) Αποδείξτε ότι $\frac{\alpha}{\alpha + 1} \leq \int_0^1 \sqrt{1 - x^{\alpha}} \, dx \leq \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 2}$.

(3) Να βρείτε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{1 - x^{\alpha}} \, dx$.

Άσκηση 1016. Αποδείξτε τις ανισότητες:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_{-1}^0 \sqrt{x^2 - 4x} \, dx \leq \sqrt{5} \quad (2) \quad \int_{-1}^2 \ln(x^2 + e^2) \, dx \geq 6 \quad (3) \quad \int_0^3 e^{x^2 - 2x} \, dx \leq 3e^3 \\
 (4) \quad & \int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin^4 x} \, dx \leq \pi \quad (5) \quad \int_1^2 e^{\sin x} \, dx \leq e \quad (6) \quad \frac{3}{2} \leq \int_1^2 \frac{2x}{1 + \eta \mu^6 x} \, dx \leq 3 \\
 (7) \quad & \int_{-1}^2 \frac{x}{e^x} \, dx \leq \frac{3}{e} \quad (8) \quad \frac{1}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} \, dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (9) \quad \int_0^{3\pi} \frac{1}{2 + \sin^2 x} \, dx \geq \pi
 \end{aligned}$$

Άσκηση 1017. Έστω συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και $f(0) = 0, f(1) = 1$. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 |f'(x) - f(x)| \, dx \geq \frac{1}{e}$.

Άσκηση 1018. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x), x \in [0, 1]$.

(1) Αποδείξτε ότι $x - x^2 \leq f(x) \leq x$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

(2) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 f(x) \, dx \leq \frac{1}{2}$.

Άσκηση 1019. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2 - x}$.

(1) Προσδιορίστε το σύνολο $f([0, 2])$.

(2) Αποδείξτε ότι $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2 - x} \, dx \leq 2e^2$.

Άσκηση 1020. Η συνάρτηση f διαθέτει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, \pi]$, $f(\pi) = e^{-\pi}$ και

$$\int_0^\pi (f(x) + f'(x)) e^x \, dx = 2. \quad (*)$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$.

Άσκηση 1021. Η συνάρτηση f διαθέτει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$ και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_\alpha^\beta f'(x) e^{f(x)} \, dx = 0. \quad (*)$$

Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f διαθέτει παράλληλη στον άξονα $x'x$ εφαπτομένη.

Άσκηση 1022. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I = \int_\alpha^\beta f^2(x) - 2xf(x) \, dx$. Να βρεθεί η f ώστε το I να λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή τιμή.

Άσκηση 1023. Θεωρούμε τη συνεχή στο $[0, 1]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx = 1. \quad (*)$$

Αποδείξτε ότι $f(x) = 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άσκηση 1024. Θεωρούμε τη συνεχή στο $[1, 2]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$\int_1^2 xf(x)dx = \int_1^2 x^2 f^2(x)dx = 1. \quad (*)$$

Να βρεθεί ο τύπος της f .

Άσκηση 1025. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ με $\int_0^\pi f(x)dx = 2$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [0, \pi]$ με $f(\xi) = \eta \mu \xi$.

25. Ολοκλήρωμα ΙΙΙ: ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Άσκηση 1026. [Κατά παράγοντες] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 x e^x dx & (2) \int_0^1 x e^{2x} dx & (3) \int_{-1}^1 (x+1) e^{-x} dx \\ (4) \int_0^1 x^2 e^x dx & (5) \int_0^1 (x e^x)^2 dx & (6) \int_0^1 x^3 e^{4x} dx \end{array}$$

Άσκηση 1027. [Κατά παράγοντες] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx & (2) \int_1^2 (x-1)^2 e^{3x} dx & (3) \int_{-1}^1 (3x^2 - 2x) e^{2x} dx \\ (4) \int_{\frac{1}{2}}^0 2x e^{2x+1} dx & (5) \int_0^2 (2x+5) e^{\frac{1}{2}x} dx & (6) \int_0^1 (2x+1) e^{x+1} dx \end{array}$$

Άσκηση 1028. [Κατά παράγοντες] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^e \ln x dx & (2) \int_1^2 x \ln x dx & (3) \int_1^e x^2 \ln x dx \\ (4) \int_1^2 (3x^2 + 4x + 2) \ln x dx & (5) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx & (6) \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx \end{array}$$

Άσκηση 1029. [Κατά παράγοντες] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^\pi x \eta\mu x dx & (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \sigma\upsilon\nu 2x dx & (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x^2 \eta\mu 2x dx \\ (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \eta\mu 2x dx & (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \eta\mu x dx & (6) \int_0^\pi (x+2) \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} dx \end{array}$$

Άσκηση 1030. [Κατά παράγοντες] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta\mu x dx & (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu x dx & (3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \eta\mu 2x dx \\ (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx & (5) \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-x} \eta\mu 3x dx & (6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \eta\mu 2x dx \end{array}$$

Άσκηση 1031. Έστω συνάρτηση f , με συνεχή στο διάστημα $[0, 1]$ παράγωγο. Αν ισχύει

$$\int_0^1 x f'(x) dx = 8 - 3 \int_0^1 f(x) dx = -1, \quad (*)$$

να υπολογίσετε το $f(1)$.

Άσκηση 1032. Έστω συνάρτηση f , με συνεχή στο διάστημα $[0, 1]$ δεύτερη παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f'(1) - f'(x) dx = \int_0^1 x f''(x) dx.$$

Άσκηση 1033. Θεωρούμε συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν η f διαθέτει ως τοπικό ακρότατο το $f(1) = 0$, αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 x^2 f''(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Άσκηση 1034. Αν η συνάρτηση f διαθέτει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, 1]$ και

$$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = 1 - 2 \int_0^1 x f(x) dx, \quad (*)$$

να υπολογίσετε το $f(1)$.

Άσκηση 1035. Έστω συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν $\int_1^e \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2}$ και $f(1) = f(e) = f'(e) = 1$, να υπολογίσετε το $\int_1^e f''(x) \ln x dx$.

Άσκηση 1036. Έστω παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f . Αν είναι γνωστό ότι

$$\int_0^1 f(x) f'(x) dx = 0, \quad \int_0^1 f^2(x) f'(x) dx = 18, \quad (*)$$

να υπολογίσετε το $\int_0^1 f^4(x) f'(x) dx$.

Άσκηση 1037. Αν η συνάρτηση f διαθέτει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0, \pi]$ και ισχύουν $f(\pi) = 5$,

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2, \quad (*)$$

να υπολογιστεί το $f(0)$.

Άσκηση 1038. Η συνάρτηση f διαθέτει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύουν $f(0) = f'(0)$ και $f(1) = f'(1)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 e^{-x} (f''(x) - 2f'(x) + f(x)) dx = 0.$$

Άσκηση 1039. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- η f διαθέτει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$,
- η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$,
- η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Αν

$$\int_0^2 x f''(x) + 3f(x) dx = -\frac{8}{3}, \quad (*)$$

να υπολογίσετε το $f(2)$.

Άσκηση 1040. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση

$$\int_0^1 e^{1-t} f(t) dt = f(x) + e^x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 1041. Αν η συνάρτηση f διαθέτει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ με $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ και

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f''(x)) \sin x dx = 2, \quad (*)$$

να υπολογίσετε το $f'(0)$.

Άσκηση 1042. Αν για τη συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $[0, +\infty)$ ισχύει

$$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x f'(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{4} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{f(1)}{2}$.

Άσκηση 1043. Έστω συνάρτηση f , με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0, 3]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = x^2 f''(x) + 2f(3) - 3f'(3) - \frac{2}{3} \int_0^3 f(t) dt.$$

Αποδείξτε ότι $\int_0^3 g(x) dx = 0$.

Άσκηση 1044. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν η συνάρτηση f διαθέτει τοπικά ακρότατα στο 0 το 1 και στο 1 το 0, αποδείξτε ότι $\int_0^1 \frac{f''(x) - f(x)}{e^x} dx = -1$.

Άσκηση 1045. Για $\nu \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx$.

(1) Αποδείξτε ότι $I_\nu = e - (\nu - 1)I_{\nu-1}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(2) Υπολογίστε το I_3 .

Άσκηση 1046. Για $\nu \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^\nu x dx$.

(1) Αποδείξτε ότι $I_\nu = \frac{\nu - 1}{\nu} I_{\nu-2}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$.

(2) Υπολογίστε το I_4 .

Άσκηση 1047. Για $\nu \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_1^e x \ln^\nu x dx$.

(1) Να βρείτε αναδρομική σχέση υπολογισμού για το I_ν , $\nu \in \mathbb{N}$.

(2) Υπολογίστε το I_3 .

Άσκηση 1048. Αν η συνάρτηση f διαθέτει συνεχή παράγωγο στο $[0, \alpha]$, όπου $\alpha > 0$, και $f(\alpha) = 2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^\alpha x (x f'(x) + 2f(x)) dx$.

Άσκηση 1049. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0) = 0$ και

$$4f(x) + f'(x) = \int_0^1 f(t) dt, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Άσκηση 1050. Έστω f συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση με $f(1) = 3$ και

$$x f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t) dt, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

26. Ολοκλήρωμα IV: μέθοδος αντικατάστασης

Άσκηση 1051. [Αντικατάσταση] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 (x+2)(x-1)^5 dx & (2) \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx & (3) \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \\ (4) \int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx & (5) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx & (6) \int_2^5 \frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}} dx \end{array}$$

Άσκηση 1052. [Αντικατάσταση] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^2 \frac{1}{x^4} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} dx & (2) \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx & (3) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx \\ (4) \int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x + 2} dx & (5) \int_1^{e^5} \frac{1}{\sqrt{4 + \ln x}} dx & (6) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \end{array}$$

Άσκηση 1053. [Αντικατάσταση] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 2x \ln(x^2 + 1) dx & (2) \int_1^{e^\pi} \frac{\eta\mu(\ln x)}{x} dx & (3) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sigma\upsilon\nu(x^2) dx \\ (4) \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx & (5) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} dx & (6) \int_2^7 \frac{x^2}{3\sqrt{x+2}} dx \end{array}$$

Άσκηση 1054. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2} dx$, με χρήση της αλλαγής μεταβλητής $x = \rho \eta\mu t$.

Άσκηση 1055. Έστω το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{\alpha} \sqrt{x^2 - 1} dx$.

- (1) Θέτοντας $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$, $x \geq 1$, αποδείξτε ότι $x = \frac{u^2 + 1}{2u}$.
(2) Με χρήση της παραπάνω αλλαγής μεταβλητής, υπολογίστε το I .

Άσκηση 1056. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$, με χρήση της αλλαγής μεταβλητής $x = \epsilon\phi t$.

Άσκηση 1057. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$, με χρήση της αλλαγής μεταβλητής $u = -x$.

Άσκηση 1058. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$, με χρήση της αλλαγής μεταβλητής $x = \frac{1-u}{1+u}$.

Άσκηση 1059. Για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ αποδείξτε ότι:

$$(1) \int_0^\alpha \sqrt{1+e^{2t}} dt = \int_1^{e^\alpha} \frac{1}{t} \sqrt{1+t^2} dt$$

$$(2) \int_{-\alpha}^\alpha \frac{t^2}{e^t+1} dt = \int_{e^{-\alpha}}^{e^\alpha} \frac{\ln^2 t}{t^2+t} dt$$

$$(3) \int_\alpha^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Άσκηση 1060. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$.

Άσκηση 1061. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[3, 7]$, αποδείξτε ότι

$$\int_3^7 f(x) dx = 4 \int_0^1 f(3+4x) dx.$$

Άσκηση 1062. Θεωρούμε τις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g , για τις οποίες είναι γνωστά τα παρακάτω:

- η g είναι άρτια,
- $f(x) > -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $f(x)f(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $\alpha > 0$, αποδείξτε ότι $\int_{-\alpha}^\alpha \frac{g(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^\alpha g(x) dx$.

Άσκηση 1063. Έστω $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, όπου $\alpha > 0$.

(1) Αν η f είναι άρτια, αποδείξτε ότι $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = 2 \int_0^\alpha f(x) dx$.

(2) Αν η f είναι περιττή, αποδείξτε ότι $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = 0$.

Άσκηση 1064. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2\alpha]$, όπου $\alpha > 0$, και

$$f(2\alpha - x) = f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, 2\alpha]$, αποδείξτε ότι $\int_0^{2\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$.

Άσκηση 1065. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x^5 + x^3) = 2x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x) dx$.

Άσκηση 1066. Για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f είναι γνωστό ότι

$$f(-x) + f(x) = x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Άσκηση 1067. Για τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $\int_0^1 f(x) dx = 1$ και

$$f(2x) = 3f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x) dx$.

Άσκηση 1068. Έστω $\alpha > 0$ και συνεχής συνάρτηση f στο $[0, \alpha]$ με

$$f(x) + f(\alpha - x) \neq 0, \quad (*)$$

για $x \in [0, \alpha]$.

(1) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx = \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha - x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx$.

(2) Να βρεθεί το $\int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx$.

(3) Να βρεθεί το $\int_0^1 \frac{x^4}{x^4 + (1 - x)^4} dx$.

Άσκηση 1069. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Με χρήση της

αλλαγής μεταβλητής $x = \alpha + \beta - t$, αποδείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta - t)}{f(\beta - t) + f(t - \alpha)} dx = \frac{\beta - \alpha}{2}$.

Άσκηση 1070. Αποδείξτε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$.

Άσκηση 1071. Έστω f αύξουσα, συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση και $\alpha \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\alpha f(x) dx \leq \alpha \int_0^1 f(x) dx.$$

Άσκηση 1072. Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\pi x f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta\mu x) dx.$$

Έπειτα, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x \eta\mu^6 x}{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x} dx$.

Άσκηση 1073. Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ συνάρτηση με

$$f(x) + f(1-x) = x - x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, 1]$, αποδείξτε ότι $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{12}$.

Άσκηση 1074. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[-\alpha, \alpha]$, όπου $\alpha > 0$, με

$$f(x) + f(-x) = 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, \alpha]$. Αποδείξτε ότι $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = \alpha$.

Άσκηση 1075. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[-\alpha, \alpha]$, όπου $\alpha > 0$, με

$$f(x) + f(-x) = |x|, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$. Αποδείξτε ότι $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = \frac{\alpha^2}{2}$.

Άσκηση 1076. Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ συνάρτηση.

(1) Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^{4\nu-1} f(x^{2\nu}) dx = \frac{1}{2\nu} \int_0^1 x f(x) dx$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(2) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^{11} e^{x^6} dx$.

27. Επιπλέον ασκήσεις υπολογισμού ολοκληρωμάτων

Άσκηση 1077. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_{-9}^{-12} \frac{x+1}{x+2} dx & (2) \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx & (3) \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx \\ (4) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx & (5) \int_0^4 \left(\frac{3}{2} \right)^{x-4} dx & (6) \int_2^8 x \ln x dx \end{array}$$

Άσκηση 1078. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\eta\mu^2 x} dx & (2) \int_2^3 \frac{x^2}{x-1} dx & (3) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \\ (4) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx & (5) \int_1^e x^3 \ln x dx & (6) \int_0^1 x e^{-x} dx \end{array}$$

Άσκηση 1079. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^5 |x-3| + |x^2-4| dx & (2) \int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} dx & (3) \int_{-1}^{10} \frac{x}{1+|x|} dx \\ (4) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx & (5) \int_0^\pi \sin^4 x dx & (6) \int_0^\pi \sin^5 x dx \end{array}$$

Άσκηση 1080. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^2 |x-1| + x + 1 dx & (2) \int_1^e \ln^3 x dx & (3) \int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{3+x \ln x} dx \\ (4) \int_0^2 x(2-x)^{10} dx & (5) \int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx & (6) \int_1^{e^8} \sqrt[3]{\ln x} dx \end{array}$$

Άσκηση 1081. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} (1) \int_1^8 \sqrt[3]{x} \ln x dx & (2) \int_{\frac{1}{e}}^e x |\ln x| dx & (3) \int_\pi^{2\pi} x \sin \frac{x}{2} dx \\ (4) \int_0^\pi (x^2 - 5x) \sin x dx & (5) \int_0^1 x^2 (1-x)^{20} dx & (6) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{\eta\mu^2 x} dx \end{array}$$

Άσκηση 1082. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx & (2) \int_1^e x \eta\mu(\ln x) dx & (3) \int_1^3 \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx \\
 (4) \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x^2+1}} dx & (5) \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx & (6) \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx
 \end{array}$$

Άσκηση 1083. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int_4^8 x\sqrt{x^2-16} dx & (2) \int_4^9 \frac{1}{x-\sqrt{x}} dx & (3) \int_e^{e^2} \frac{\ln \ln x}{x \ln x} dx \\
 (4) \int_2^4 \frac{x^3}{x^2-x} dx & (5) \int_1^{e^2} x \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx & (6) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2^x} dx
 \end{array}$$

Άσκηση 1084. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int_0^\pi \frac{x + \eta\mu x}{e^x} dx & (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\epsilon\phi x)}{\sin^2 x} dx & (3) \int_0^1 \frac{4x-5}{(x+2)^4} dx \\
 (4) \int_1^e \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2} dx & (5) \int_2^9 \frac{1}{2-\sqrt[3]{x-1}} dx & (6) \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx
 \end{array}$$

Άσκηση 1085. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} dx & (2) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3}} dx & (3) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}} dx \\
 (4) \int_0^{63} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx & (5) \int_0^1 \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx & (6) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx
 \end{array}$$

Άσκηση 1086. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx & (2) \int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx & (3) \int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} dx \\
 (4) \int_4^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & (5) \int_1^e (\ln x^2 - 2)(\ln x^3 - 3) dx & (6) \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx
 \end{array}$$

Άσκηση 1087. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int_0^3 \frac{x^3 + 2x + 4}{x^2 - 1} dx & (2) \int_{-1}^2 \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x+10}} dx & (3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} xe^x \eta\mu x dx \\
 (4) \int_{-1}^0 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx & (5) \int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2} dx & (6) \int_0^1 \frac{4x^2}{x^3 + 1} dx
 \end{array}$$

28. Εμβαδά επιπέδων χωρίων

Άσκηση 1088. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις αντίστοιχες ευθείες, όταν:

- (1) $f(x) = 10x^4 + 1$, $x = -1$, $x = 0$ (2) $f(x) = 6x^2 - 5$, $x = 0$, $x = 1$
(3) $f(x) = 3x^2 - 10x$, $x = 1$, $x = 3$ (4) $f(x) = 3x^2 - 9$, $x = 0$, $x = 4$
(5) $f(x) = e^{-x}$, $x = -1$, $x = 1$ (6) $f(x) = \eta\mu x$, $x = 0$, $x = 2\pi$

Άσκηση 1089. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις αντίστοιχες ευθείες, όταν:

- (1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 0$, $x = 27$ (2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$
(3) $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ (4) $f(x) = x + \frac{4}{(1+x)^2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$
(5) $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$, $x = 2$, $x = 4$ (6) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = -1$, $x = 1$

Άσκηση 1090. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις αντίστοιχες ευθείες, όταν:

- (1) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, $x = 0$, $x = 1$ (2) $f(x) = x - e \ln x$, $x = 1$, $x = e$
(3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ (4) $f(x) = 5|x| - x^2$, $x = -1$, $x = 1$
(5) $f(x) = x(x-1)(x-2)$, $x = 0$, $x = 2$ (6) $f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$

Άσκηση 1091. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, όταν:

- (1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (2) $f(x) = x^3 - x$ (3) $f(x) = 2x - x^2$
(4) $f(x) = 9x - x^3$ (5) $f(x) = 3 - x^3 - (2-x)^3$ (6) $3\sqrt{x-1} - x - 1$

Άσκηση 1092. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , τον άξονα $x'x$ και τις αντίστοιχες ευθείες, όταν:

- (1) $f(x) = 4x$, $g(x) = x^2$, $x = 1$, $x = 3$
 (2) $f(x) = x^3$, $g(x) = x$, $x = -2$, $x = 1$
 (3) $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x = 0$, $x = 2\pi$
 (4) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$
 (5) $f(x) = \ln x - 1$, $g(x) = 2x + 1$, $x = 1$, $x = e$
 (6) $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 - x$, $x = -1$, $x = 1$

Άσκηση 1093. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , όταν:

- (1) $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 4x$ (2) $f(x) = 9x$, $g(x) = x^3$
 (3) $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = x - 2$ (4) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x - x^2$
 (5) $f(x) = 2x^2 + 5x$, $g(x) = x^2 + 8x - 2$ (6) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

Άσκηση 1094. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , όταν:

- (1) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = -x^2 + 1$ (2) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln^2 x$
 (3) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{|x|}$ (4) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \frac{x+1}{3}$
 (5) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$, $g(x) = e^x$ (6) $f(x) = 3x^4 + x^2$, $g(x) = 2(x^4 + x^2)$

Άσκηση 1095. Για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με αντίστοιχες εξισώσεις.

- (1) $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, $x = 0$, $x = e$
 (2) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, & x < 1 \\ 2\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, $x = -1$, $x = 2$

Άσκηση 1096. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x^2 - 4x|$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις:

- (1) $x = 0$ και $x = 3$ (2) $x = 0$ και $x = 5$

Άσκηση 1097. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & x < -1 \\ 6x^2, & x \geq -1 \end{cases}.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = -2$.

Άσκηση 1098. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x < 2 \\ -2x + 5, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής και να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 1099. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2 - |3 - x|$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $y = 0$.

Άσκηση 1100. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x$ και από την ευθεία με εξίσωση $y = -3$.

Άσκηση 1101. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = 2x - 1$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και την ευθεία $x = 0$.

Άσκηση 1102. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $y = 8$.

Άσκηση 1103. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln \frac{1}{x}$ και την ευθεία με εξίσωση:

(1) $y = -1$

(2) $y = \ln 2$

Άσκηση 1104. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{6}{x}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $y = 1$, $y = 3$.

Άσκηση 1105. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x$, τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, 1)$.

Άσκηση 1106. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -\ln x$, τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο $M\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Άσκηση 1107. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$.

- (1) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία A(0, 1) και B(1, e).
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις εφαπτομένες.

Άσκηση 1108. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = g(0)$, $f'(3) = 4 + g'(3)$ και

$$f''(x) = 2 + g''(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, 3]$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 3$.

Άσκηση 1109. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x + 4)e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

Άσκηση 1110. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- (1) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία A, B όπου η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.
- (2) Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η C_f διαμερίζει το τρίγωνο ABΓ σε δύο χωρία, των οποίων ο λόγος εμβαδών τους είναι 2 : 1.

Άσκηση 1111. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$.

- (1) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της τη γραφικής παράστασης της f στα σημεία O(0, 0) και A(π , 0).
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτόμενες στα σημεία O και A.

Άσκηση 1112. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$.

- (1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A(1, 3).
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της στο A και τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 1113. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

- (1) Αποδείξτε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x > 0$.
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μεικτόγραμμου τετραπλεύρου που οριοθετείται από τις C_f, C_g , την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{1}{2}$ και τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 1114. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = \ln x$ διαθέτουν κοινή εφαπτομένη. Έπειτα, να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία $y = 2$.

Άσκηση 1115. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $x = 1$.

Άσκηση 1116. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^{|x|}$ και $g(x) = |ex|$.

Άσκηση 1117. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$. Θεωρούμε το χωρίο Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ και τον άξονα $x'x$. Να βρεθεί ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, 0)$ και διαμερίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Άσκηση 1118. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ και την ευθεία $y = 9$ διαμερίζεται από την ευθεία $y = \alpha$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρεθεί η τιμή του α .

Άσκηση 1119. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$.

- (1) Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = \ln(2e - 1)$.
- (2) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η ευθεία $x = \lambda$ να διαμερίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Άσκηση 1120. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία η ευθεία $y = \alpha x$ διαμερίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Άσκηση 1121. Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$, όπου $\alpha > 0$.

- (1) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha > 0$ με $E(\alpha) = \frac{1}{2}$.
- (2) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$ και $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha)$.

Άσκηση 1122. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$. Το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y = 5$ διαμερίζεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1$, $\alpha > 0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α .

Άσκηση 1123. Θεωρούμε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η f είναι άρτια, η g περιττή, και

$$f(x) + g(x) = e^x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = 0$, $x = \alpha$, όπου $\alpha > 0$.
- (2) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

Μέρος IV

Ασκήσεις εφ' όλης της ύλης

29. Επαναληπτικές ασκήσεις I

Άσκηση 1124. Δίνεται 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, καθώς και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$$g(x) + f(x - 2) = (g \circ g)(x) + f(0), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η g είναι 1-1.
- (2) Βρείτε την τιμή $g(2)$.
- (3) Επιλύστε την εξίσωση $g(e^x - 1) = 2$.

Άσκηση 1125. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + 2f(x) = 12e^x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.
- (3) Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1.
- (4) Επιλύστε την εξίσωση $f(|x| - 3) = e^{2 \ln 2} + \ln \frac{1}{e^2}$.

Άσκηση 1126. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(f(x) - 2) = x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1.
- (2) Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.
- (3) Αποδείξτε ότι $f^{-1}(x) = f(x - 2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (4) Επιλύστε την ανίσωση $f(f(\ln(x^2 + 2)) - 2 \ln 3) < -2$.

Άσκηση 1127. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + e^{-x}$ και $g(x) = 3 \sin x - 1$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f διαθέτει ως ελάχιστο το 2.
- (2) Βρείτε τα ακρότατα της g .
- (3) Βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Άσκηση 1128. Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$$(g \circ f)(x) = -3x + 5, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, -1)$.

(1) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(2) Επιλύστε την ανίσωση $f(|x| - 1) > 3$.

Άσκηση 1129. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(1) Βρείτε τον τύπο της f .

(2) Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1 και να ορίσετε την f^{-1} .

Άσκηση 1130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \ln x$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) Βρείτε το πεδίο ορισμού D της $g \circ f$.

(2) Αν επιπλέον ισχύει $(g \circ f)(x) = x - \frac{3}{\ln x}$, για κάθε $x \in D$, βρείτε την συνάρτηση g .

(3) Μελετήστε τη g ως προς μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$.

Άσκηση 1131. Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(4) = 1$, η f είναι 1-1 και

$$(f \circ g)(x) = 2x - 3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

(2) Να βρείτε το $g(2)$.

(3) Αν επιπλέον είναι $g(x) = 3x + \alpha$, να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ και τον τύπο της f .

Άσκηση 1132. Δίνονται γνησίως φθίνουσες και περιττές συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) Βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $g(0)$.

(2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι περιττή και γνησίως αύξουσα.

(3) Επιλύστε την εξίσωση $2(f \circ g)(x) = 3f(x) + 4g(x)$.

Άσκηση 1133. Δίνονται συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα.

- (1) Να μελετήσετε ως προς μονοτονία τη συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$.
- (2) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(\ln x) \cdot g(0) > g(\ln x) \cdot f(0)$.
- (3) Αν επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται επί της ευθείας $x = 2$, να επιλύσετε την εξίσωση $h(e^x + 1) = 1$.

Άσκηση 1134. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) + f(e) = 2e + 3$ και

$$f(x) - f(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 2(x - y), \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

- (1) Να βρείτε τα $f(1)$ και $f(e)$.
- (2) Να βρείτε τον τύπο της f .
- (3) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- (4) Να επιλύσετε την ανίσωση $4(x^2 - 1) < \ln\left(\frac{x^2 + 10}{3x^2 + 8}\right)$.

Άσκηση 1135. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + 3f(x) + x = 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε το $f(0)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- (3) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- (4) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- (5) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(f(|x| + 1) - 13) < 2$.

Άσκηση 1136. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της $f \circ f$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 14)$.

- (1) Να βρείτε τον αριθμό α .
- (2) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- (3) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} .
- (4) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(f(x^2 - 4) + x - 1) - f(x + 1) = 0$.
- (5) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(f(|x| - 2) - 5) < f^{-1}(14)$.

Άσκηση 1137. Να επιλύσετε την εξίσωση $\frac{3^{x^2}}{81^x} - \frac{81}{3^x} = (4 - x)^3 - (x^2 - 4x)^3$.

Άσκηση 1138. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$(f \circ f)(x) + f^3(x) = 2x + 3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(g(x) - x) - f(\ln x + 1) = 0, \quad (**)$$

για κάθε $x > 0$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.
- (2) Να βρείτε τον τύπο της g .
- (3) Να αποδείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.
- (4) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} .
- (5) Να επιλύσετε την εξίσωση $g^{-1}(3g(|x| + 1) - 4) = 1$.
- (6) Να επιλύσετε την ανίσωση $x^2 - 4 < \ln \frac{x^2 + 7}{2x^2 + 3}$.

Άσκηση 1139. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(2) = 3$ και $f(1) = 4$.

- (1) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .
- (2) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(f(|x| + 1) - x) - f(3 - x) < 0$.
- (3) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 1) - 1) - 4 \geq 0$.
- (4) Θεωρούμε συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$(g \circ g)(x) = g(x) + f(x^3 + 1), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (i) Να αποδείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.
- (ii) Να επιλύσετε την εξίσωση $g(e^x) - g(1 - x) = 0$.

Άσκηση 1140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία.
- (2) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- (3) Να βρείτε τις συναρτήσεις f^{-1} και $f^{-1} \circ f$.
- (4) Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x^3 + x^2) = f(-x - 1)$.

Άσκηση 1141. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{x} = 7. \quad (*)$$

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu 3x}$.

Άσκηση 1142. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3 \ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$.

(1) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

(2) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) Να επιλύσετε η εξίσωση $f(x) = e^{3/2}$.

(4) Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ , για τον οποίο ισχύει

$$3 \ln(4\mu) - 3 \ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2+1)} - e^{6\mu} - 8\mu. \quad (*)$$

Άσκηση 1143. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x - 3}{x^2 + 2x} = 4. \quad (*)$$

Να βρείτε τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5 - 2f(x)| - 1}{x^2 - 3x}$$

Άσκηση 1144. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x+1} - 1} = 8. \quad (*)$$

Να βρείτε τα όρια:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 5x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x)}{x}$$

Άσκηση 1145. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και

$$f^3(x) - 4x^3 = 2x^2 f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να βρείτε τον αριθμό λ .

(2) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{x + \eta\mu x}$.

Άσκηση 1146. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και

$$f^3(x) + 4xf(x) \eta\mu x = f^2(x) \eta\mu 3x + 4x^3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να βρείτε τον αριθμό λ .

(2) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) \eta\mu 5x + f(x) \eta\mu^2 3x}{\eta\mu^3 x - 3x \eta\mu^2 x}$.

Άσκηση 1147. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \varepsilon \varphi x}{2x^2 - x} = -\infty. \quad (*)$$

- (1) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(1/x)}{f(x)}$.
- (2) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha^2 + 9)f^3(x) - 5f(x) + 4}{2\alpha f^3(x) + 7f^2(x) - 1} = 3$.

Άσκηση 1148. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$6x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 6x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu^2 x}$ δεν υπάρχει.
- (3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta \mu 3x}{\sqrt{x^2 - x + 4} - 2}$.

Άσκηση 1149. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 4} = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x)}{x^2 - 4} = \frac{9}{4}. \quad (*)$$

- (1) Να εξηγήσετε γιατί το P είναι δευτεροβάθμιο.
- (2) Να βρείτε το $P(x)$.
- (3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{P(x)} - 2x)$.

Άσκηση 1150. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + 3f(x) - 2x = 5, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- (2) Να ορίσετε την f^{-1} .
- (3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f^{-1}(x) + \eta \mu 5x + 5}{\eta \mu x}$.
- (4) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{f^{-1}(x)}$.

Άσκηση 1151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$.

- (1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (2) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .
- (3) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$.

Άσκηση 1152. Δίνεται γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 3$ και

$$(f \circ f)(x) + f(x) = 3x + 2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(1)$.
- (2) Να βρείτε την τιμή $f(3)$.
- (3) Να επιλύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$.
- (4) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$.

Άσκηση 1153. Θεωρούμε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (2) Για τη συνάρτηση g ισχύει

$$xg(x) + 2 \leq 2 \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

- (3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\epsilon\phi^2 x + x^2 g(x)}$.

Άσκηση 1154. Δίνεται συνάρτηση f με

$$(x-1)f(x) + f(1-x) = x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε τον τύπο της f .
- (2) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{3}{x} \right)$.

Άσκηση 1155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(2x + \alpha)^2 + 1 - \alpha^2} + \sqrt{(x + \alpha)^2 + 1 - \alpha^2}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

- (1) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (2) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 6$, να βρείτε τον α .

Άσκηση 1156. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\eta\mu^2 x \leq f(x) \leq x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

- (2) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

Άσκηση 1157. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$xf(x) + \eta\mu 3x = 4x - 5x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε τον τύπο της f .
- (2) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μία τουλάχιστον αρνητική και μία τουλάχιστον θετική λύση.

Άσκηση 1158. Θεωρούμε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και τη συνεχή συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa \eta\mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

- (1) Να βρείτε τους κ, λ .
- (2) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 \ln(8x + 1)$ διαθέτει λύση στο $(0, 1)$.

Άσκηση 1159. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right) + 3$.

- (1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (2) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- (3) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.
- (4) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Άσκηση 1160. Δίνονται συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g , για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στο σημείο $A(2, -1)$.
- Οι αριθμοί $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Αποδείξτε ότι:

- (1) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$,
- (2) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3)x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)x^3 + 5} = -\infty$.

Άσκηση 1161. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- (2) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (4) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = \kappa$ διαθέτει λύση στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1162. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3, x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .
- (2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1163. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι αύξουσα.
- (2) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-1, 1)$.
- (3) Να βρείτε την f^{-1} .

Άσκηση 1164. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, με $f(2) = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta \mu x}{\sqrt{x+1} - 1} = 4. \quad (*)$$

(1) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

(2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$.

Άσκηση 1165. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = -2. \quad (*)$$

(1) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

(2) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4f(x) + 3}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$.

Άσκηση 1166. Δίνεται συνεχής και περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 1. \quad (*)$$

(1) Βρείτε την τιμή $f(1)$.

(2) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \sqrt{x+2}}{x^2 - 1}$.

(3) Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{2f(x)}{f^2(x) + 1}$.

(i) Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το $[-1, 1]$.

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x}$.

Άσκηση 1167. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$ και $g(x) = \sqrt{5-x}$.

(1) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι 1-1 και να ορίσετε την συνάρτηση f^{-1} .

(2) Να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

(3) Έστω συνεχής συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{h(x) - x + 1}{\sqrt{x} - 2} = 12. \quad (*)$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(f^{-1} \circ g)(x) + h(x)}{x - 4}$.

Άσκηση 1168. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = x + e^x$ και $h(x) = \frac{2}{x} - \ln x - 1$. Θεωρούμε επίσης συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$(g \circ f)(x) = h(x), \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

- (1) Να μελετήσετε ως προς μονοτονία & τα ακρότατα τις συναρτήσεις g και h .
- (2) Να βρείτε τα σύνολα τιμών των g και h .
- (3) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- (4) Να βρείτε τη τιμή $f(1)$.
- (5) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(2x^2 + 1) - f(x^2 + 5) \geq f(1)$.

Άσκηση 1169. Δίνονται συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)f(x) - \sqrt{x+3} + 2}{x - 1} = \frac{7}{4}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) - \eta\mu x}{x^2 + x} = -1$.

- (1) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $g(0)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $3f(x_0) + g(x_0) = 4x_0$.

Άσκηση 1170. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0 \cdot 3^{x_0}$.
- (2) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu^2 x f(1/x)) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta\mu x}{x^3} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 x f(1/x) + 5x}{x^2 + \eta\mu 3x}$$

Άσκηση 1171. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + xf(x) + x^3 = 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- (1) Αποδείξτε ότι $-x^2 < f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- (2) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $6 - xf(x) = x^2 + 5x$ διαθέτει λύση στο διάστημα $(1, 2)$.
- (3) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0+} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x^2}$$

Άσκηση 1172. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f(5)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

- (1) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της g .
- (2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in A$ ώστε $g(\xi) = 0$.

Άσκηση 1173. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) + f(2) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) + (2x-1)f(x+1)$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει λύση στο διάστημα $[0, 2]$.
- (2) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .
- (3) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 1174. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f^3(x) + 3f(x) = x + 5, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- (2) Να ορίσετε την f^{-1} .
- (3) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} τέμνονται σε μοναδικό σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.
- (4) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) \eta \mu x}{x^4}$.

Άσκηση 1175. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{x^2+1}{x-2} + \frac{\eta \mu x + 2}{x-3} = 0$ διαθέτει δύο τουλάχιστον λύσεις.

Άσκηση 1176. Θεωρούμε συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, 1]$, με $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$.

- (1) Αποδείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε μοναδικό σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.
- (2) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $4f(\xi) = f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)$.

30. Επαναληπτικές ασκήσεις II

Άσκηση 1177. Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = \sqrt{x}$ διαθέτουν κοινή εφαπτομένη.

Άσκηση 1178. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 2e^x - 2$ και $g(x) = 2 \ln(x + 1)$.

- (1) Αποδείξτε ότι οι C_f, C_g διαθέτουν μοναδικό κοινό σημείο.
- (2) Αποδείξτε ότι στο κοινό τους σημείο, οι C_f, C_g διαθέτουν κοινή εφαπτομένη.
- (3) Να προσδιοριστεί η κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g .

Άσκηση 1179. Για κάθε $\alpha, \beta, \kappa > 0$ με $\beta \geq \alpha$, αποδείξτε ότι: $\ln \left(\frac{\alpha^2 + \kappa^2}{\beta^2 + \kappa^2} \right) \leq \frac{\beta - \alpha}{\kappa}$.

Άσκηση 1180. Δίνεται συνάρτηση $f : (e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e^2) = 0$ και

$$f(x) + \ln(xf'(x)) = 0, \quad (*)$$

για κάθε $x > e$.

- (1) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .
- (2) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- (3) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .

Άσκηση 1181. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$, με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & x \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x = 1 \end{cases}.$$

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- (2) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$.
- (3) Αποδείξτε ότι $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Άσκηση 1182. Θεωρούμε παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f , με $f(1) = 0$ και

$$\ln x \leq f'(x) \leq x - 1, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$. Να μελετηθεί η f ως προς μονοτονία & ακρότατα.

Άσκηση 1183. Δίνεται άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 2$ και

$$xf'(x) = -3f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \neq 0$.

- (1) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
- (2) Προσδιορίστε τον τύπο της f .
- (3) Προσδιορίστε τις ασύμπτωτες της C_f .

Άσκηση 1184. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με

$$f(x) - g(x) = x - 4, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

- (1) Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 5x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$.
- (2) Αποδείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Άσκηση 1185. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (1) Να προσδιοριστεί ο α .
- (2) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο επαφής $A(0, f(0))$.
- (3) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Άσκηση 1186. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + f(x)}{x^2} = 1. \quad (*)$$

- (1) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $A(0, f(0))$.
- (3) Να υπολογίσετε το όριο $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + f(x) + \eta\mu^2 3x}{xf(x) + f^2(x) + f(3x)f(2x)}$.
- (4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x - 1)f(x) = 3x - 2^x$ διαθέτει στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση 1187. Θεωρούμε δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, \pi]$, με $f(\pi) - f(0) = \pi^2$ και

$$f''(x) < 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, \pi]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi - \sin \xi$.

Άσκηση 1188. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) + f(2) = 0$ και

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x+1}{2(x-1)} \right). \quad (*)$$

(1) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

(2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Άσκηση 1189. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$ και

$$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να βρείτε τον τύπο της f .

(2) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία.

(3) Να επιλύσετε την ανίσωση $e^{x^2-4} \leq x^4 - 8x^2 + 17$.

Άσκηση 1190. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = \ln 2$ και

$$xf'(x) = \frac{1}{1+x} - f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

(1) Να βρείτε τον τύπο της f .

(2) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

(3) Να αποδείξετε ότι $(x^2 + 2)^{x^2+2} > (x^2 + 3)^{x^2+1}$, για κάθε $x > 0$.

(4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$.

Άσκηση 1191. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln((\lambda + 1)x^2 + x + 1) - \ln(x + 2)$, με $x > -1$, όπου $\lambda \in [-1, +\infty)$.

(1) Προσδιορίστε την τιμή του λ ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

(2) Έστω ότι $\lambda = -1$.

(i) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

(ii) Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

(iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ διαθέτει μοναδική λύση, για οποιονδήποτε $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Άσκηση 1192. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- $f(-x)f'(x) = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

- (1) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- (4) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x)f(-x)$ είναι σταθερή.
- (5) Να βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 1193. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ και

$$f(x) + f''(x) = 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.
- (2) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) - 2f(x) + (f'(x))^2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Να αποδείξετε ότι $-1 \leq f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (4) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2f(x) + 6x - f(1) - f(2) - 9$. Αποδείξτε ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, με τετμημένη $x_0 \in [1, 2]$.

Άσκηση 1194. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 1$ και

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x}, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

- (1) Να βρείτε τον τύπο της f .
- (2) Σημείο M κινείται επί της C_f . Έστω A η προβολή του M στον άξονα $x'x$. Το σημείο A απομακρύνεται από την αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων με ρυθμό 2 μονάδες ανά s. Τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του είναι ίση με 3, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:
 - (i) των αποστάσεων (AM) και (OM) ,
 - (ii) της γωνίας $\widehat{MOA}$,
 - (iii) της απόστασης (OB) , όπου B το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f στο M με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 1195. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^*$, παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$.

Άσκηση 1196. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(-2) = -12$ και

$$f'(x^3 + x) = -8x + 3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- (1) Προσδιορίστε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο επαφής $A(-2, f(-2))$.
- (2) Αποδείξτε ότι $f(0) = 4$ και $f(2) = 0$.
- (3) Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ ώστε $f(x_0) = 2x_0$.
- (4) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$, διαφορετικά μεταξύ τους, με $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 4$.

Άσκηση 1197. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$ και

$$1 - f'(x) = e^{f(x)-x}, \quad (*)$$

για κάθε $x > -1$.

- (1) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f .
- (2) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία.
- (3) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .
- (4) Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της C_f .
- (5) Να αποδείξετε ότι $x \geq \ln(x+1)$, για κάθε $x \geq -1$.

Άσκηση 1198. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$x^2 f(x) = \ln(x+1) \text{ ημ } \pi x, \quad (*)$$

για κάθε $x > -1$.

- (1) Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.
- (2) Να εξετάσετε αν η C_f διαθέτει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- (3) Θεωρούμε την συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x > -1 \\ \lambda, & x = -1 \end{cases},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) Εξετάστε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η g να είναι συνεχής.
- (ii) Για $\lambda = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ ώστε $g'(\xi) = -\frac{g(\xi)}{\xi}$.

Άσκηση 1199. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + 3f(x) = 3x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία.
- (2) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$.
- (3) Να αποδείξετε ότι $xf'(x) < f(x) < x$, για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 1200. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f^3(x) + 4f(x) = 4x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο της.
- (2) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_f (αν υπάρχουν).
- (3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = 2x - f(x)$ ως προς μονοτονία.
- (4) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(x^2 - x - 2) + 2x + 4 < 2x^2$.

Άσκηση 1201. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Αποδείξτε ότι:

- (1) $f(\alpha) \neq f(\beta)$,
- (2) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $5f(x_0) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$,
- (3) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) > 0$.

Άσκηση 1202. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία & ακρότατα.
- (2) Να επιλύσετε την ανίσωση $f(f(5x^2 - 4x)) > f\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$.
- (3) Να αποδείξετε ότι η C_f διαθέτει μοναδικό σημείο καμπής.
- (4) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(4) + f(1)$ και $f(3) + f(2)$.

Άσκηση 1203. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2} = 3$ και $f(3) = 4$.

- (1) Προσδιορίστε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.
- (2) Αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f(x) - 5x + 6 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (2, 3)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Άσκηση 1204. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(1) = 1$ και

$$f(xy) = xf(y) + yf(x), \quad (*)$$

για κάθε $x, y > 0$.

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
- (2) Να βρείτε τον τύπο της f .
- (3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ διαθέτει μοναδική λύση.

Άσκηση 1205. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = -2 - \alpha$, $f'(1) = -8$ και

$$f(x) + \alpha x + 4 \leq \frac{2}{x}, \quad f(x) \geq -4 - 6x + \frac{1}{4x}, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (1) Να βρείτε τον αριθμό α .
- (2) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- (3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \eta\mu x + 4}{xf(x) + 6x^2 + \ln x}$.

Άσκηση 1206. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$2f(x^3) - f^2(x) \geq 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ διαθέτει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(-1, 1)$.
- (2) Αποδείξτε ότι $f'(-1) = f'(0) = f'(1)$.
- (3) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f διαθέτει τουλάχιστον τέσσερα πιθανά σημεία καμπής στο διάστημα $(-1, 1)$.

Άσκηση 1207. Έστω συνεχής στο 0 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{x^2} = 4$.

- (1) Αποδείξτε ότι $f(0) = 0$.
- (2) Αποδείξτε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι η $y = 2x$.
- (3) Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = 8$.

Άσκηση 1208. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi) = 5\xi^4(f(1) - f(-1))$.

Άσκηση 1209. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ και $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ περιττοί φυσικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{a_1}{(x - \lambda_1)^{\kappa_1}} + \frac{a_2}{(x - \lambda_2)^{\kappa_2}} + \frac{a_3}{(x - \lambda_3)^{\kappa_3}} = 0 \quad (*)$$

διαθέτει ακριβώς δύο λύσεις στο διάστημα (λ_1, λ_3) .

Άσκηση 1210. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln(x-1) + \beta x^2 - 3x + 5$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Να βρείτε τις τιμές και το είδος των ακροτάτων.

Άσκηση 1211. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x - x^3 + 2$, $x \in [1, 2]$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία.
- (2) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .
- (3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Άσκηση 1212. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$.

- (1) Να μελετηθεί η f ως προς μονοτονία & ακρότατα.
- (2) Να μελετηθεί η f ως προς κυρτότητα.

Άσκηση 1213. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = 2x + f(x)$.

- (1) Αποδείξτε ότι $\ln x < x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- (2) Αποδείξτε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
- (3) Να μελετήσετε την g ως προς κυρτότητα και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της C_g , αν υπάρχουν.
- (4) Να προσδιορίσετε τη θέση της g ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = 2x$.

Άσκηση 1214. Δίνεται συνεχής και μη μηδενική συνάρτηση f , για την οποία ισχύει

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι $f(0) = 1$.
- (2) Αποδείξτε ότι η f είναι άρτια.
- (3) Αποδείξτε ότι $f(|x|) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (4) Αποδείξτε ότι αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x)f(y) - f(x)f''(y) = 0$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 1215. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- $xf''(x) = 4x - f'(x)$, για κάθε $x > 0$,
- η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 5$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $M(1, f(1))$.

(1) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

(2) Να βρείτε τον τύπο της f .

(3) Αποδείξτε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (1, e)$.

Άσκηση 1216. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2e^x - 2$. Να αποδείξετε ότι:

(1) $f'(x) = f(x) + 2xe^x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$.

(4) Η f' διαθέτει ακριβώς δύο ρίζες.

(5) Η f διαθέτει ακριβώς μία ρίζα.

Άσκηση 1217. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(1) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

(2) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και βρείτε τον τύπο της f' .

(3) Αποδείξτε ότι η f διαθέτει μοναδική ρίζα.

Άσκηση 1218. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι τα ακρότατα της f βρίσκονται επί ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αποδείξτε ότι $\beta\gamma = 9\alpha\delta$.

Άσκηση 1219. Για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

- $-x^2 \leq f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = -1$.
- $f(x) \leq x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Να βρεθεί ο τύπος της f .

Άσκηση 1220. Έστω $f(x) = \ln x$ και $0 < \alpha < \beta$.

(1) Να βρείτε το (μοναδικό) $\xi \in (\alpha, \beta)$ του συμπεράσματος του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$.

(2) Αποδείξτε ότι $\sqrt{\alpha\beta} < \xi < \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Άσκηση 1221. Έστω παραγωγίσιμη στο 0 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ και

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}, \quad (*)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή.
- (2) Αποδείξτε ότι $f(x) \neq \pm 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - f^2(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (4) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- (5) Αποδείξτε ότι $\frac{(f(x)+1)'}{f(x)+1} - \frac{(f(x)-1)'}{f(x)-1} = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (6) Προσδιορίστε τον τύπο της f .

Άσκηση 1222. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
- (2) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (3) Να προσδιορίσετε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (4) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 1223. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

- (1) Αν ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x > -1$, αποδείξτε ότι $\alpha = e$.
- (2) Για $\alpha = e$:
 - (i) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή.
 - (ii) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
 - (iii) Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$ διαθέτει λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Άσκηση 1224. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι η γραφική παράσταση της τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-2)f'(x) + f(x) = 0$ διαθέτει λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Άσκηση 1225. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1 - \ln x$.

- (1) Να βρείτε τη συνάρτηση $F = f \circ g$ και την αντίστροφή της, αν υπάρχει.
- (2) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_F που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = -x + 5$.
- (3) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων F και $G(x) = \ln(1 - f'(x))$ διαθέτουν μοναδικό κοινό σημείο.

Άσκηση 1226. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = 2x + f(x)$.

- (1) Αποδείξτε ότι $\ln x < x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- (2) Αποδείξτε ότι η g αντιστρέφεται.
- (3) Να μελετήσετε την g ως προς κυρτότητα και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της C_g , αν υπάρχουν.
- (4) Να επιλύσετε η ανίσωση $g(x) > 2$.
- (5) Να προσδιορίσετε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στην θέση του τοπικού ακροτάτου της f .
- (6) Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της g .

Άσκηση 1227. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f^2(x) + 4f(x) - 2x = e^x - 3, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

Άσκηση 1228. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν οι οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $-\infty$ και $+\infty$ είναι οι ευθείες με εξισώσεις $y = 1$ και $y = 4$, αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 3$.

Άσκηση 1229. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 14$, $f(2) = 7$ και $f(3) = -6$.

- (1) Να βρείτε τις τιμές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + f(x)$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$.
- (2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ με $f''(\xi) = -6$.

Άσκηση 1230. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f^2(x) - 4f(x) = 5 - x^2, \quad (*)$$

για κάθε $x \in (-3, 3)$.

- (1) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f δεν διαθέτει σημείο καμπής.
- (2) Αν επιπλέον $f(0) < 0$, να βρείτε τον τύπο της f .

31. Επαναληπτικές ασκήσεις ΙΙΙ

Άσκηση 1231. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε παράγουσα F της $\frac{f(x)}{x}$ στο $[1, +\infty)$ με $F(1) = 0$. Υποθέτουμε ότι

$$f(x) > F(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

- (1) Να μελετήσετε την $\frac{F(x)}{x}$ ως προς μονοτονία & ακρότατα.
- (2) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$.
- (3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Άσκηση 1232. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x + 6}{x + \beta}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η C_f διαθέτει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $y = 2$ και $x = -1$.

- (1) Να προσδιορίσετε τους α, β .
- (2) Να προσδιορίσετε παράγουσα F της f στο $(-1, +\infty)$, τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της να διέρχεται από το σημείο $M(0, 2)$.
- (3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x + 1}$ ως προς μονοτονία & ακρότατα.

Άσκηση 1233. Έστω συνάρτηση f στο $[0, +\infty)$ με

$$2f(x)f'(x) = 1 + f^2(x), \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

- (1) Αποδείξτε ότι $\frac{1 + f^2(1)}{1 + f^2(0)} = e$.
- (2) Έστω ότι $f(0) = 0$.

(i) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 |e^x f(x)| dx$.

(ii) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να προσδιοριστεί ο τύπος της f .

Άσκηση 1234. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (1) Να προσδιορίσετε τα α, β
- (2) Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της C_f .
- (3) Να υπολογίσετε το $\int_0^e f(x) dx$.

Άσκηση 1235. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$f^3(x) + f(x) = x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της.
- (2) Να υπολογιστεί το $\int_0^2 f(x) dx$.

Άσκηση 1236. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και

$$\int_0^1 x f'(x) dx = \int_0^1 (1-x) f'(x) dx = 1. \quad (*)$$

- (1) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.
- (2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$.
- (3) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x) + f(x)} dx$.
- (4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f(\xi) = f'(\xi)$.

Άσκηση 1237. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Θεωρούμε συνάρτηση f που στρέφει τα κοίλα άνω στο $[\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι:

- (1) $f(x) \leq \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} f(\beta) + \frac{x-\beta}{\alpha-\beta} f(\alpha)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- (2) $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(\alpha+\beta-x))$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- (3) $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\beta))$.

Άσκηση 1238. Δίνεται η εξίσωση

$$\ln x - \frac{2}{x} = 0 \quad (*)$$

και η συνάρτηση $f(x) = \frac{5 \ln x}{x}, x > 0$.

(1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (*) διαθέτει μοναδική λύση $x_0 > 1$.

(2) Να αποδείξετε ότι $\int_1^{x_0} f(x) dx = f(x_0)$.

Άσκηση 1239. Έστω συνάρτηση f , με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- $\int_0^1 \frac{f(x) - f''(x)}{e^x} dx = 1$,
- η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x = 0$,
- η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο $x = 1$.

(1) Να προσδιορίσετε το $f(0)$.

(2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : x + y + 1 = 0$.

Άσκηση 1240. Θεωρούμε συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και

$$f''(x) = 2f(x), \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e f(x) \ln x dx$.

(2) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f , αν επιπλέον $f(0) = 1$.

Άσκηση 1241. Θεωρούμε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν τα παρακάτω:

- Η f είναι συνεχής, με $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η $g(x)$ είναι παράγουσα της $\frac{x}{f(x) - x}$ στο $\mathbb{R}$, με $g(0) = 0$.
- $f(x) = x + 3 + g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) - 2xf(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

(3) Προσδιορίστε τους τύπους των f και g .

(4) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Άσκηση 1242. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της.

(2) Να υπολογιστεί το $\int_0^e f(x) dx$.

Άσκηση 1243. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με θετική δεύτερη παράγωγο σε όλο το $\mathbb{R}$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

(1) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει η σχέση $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$.

(2) Αποδείξτε ότι $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$.

Άσκηση 1244. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να μελετηθεί η f ως προς μονοτονία & ακρότατα.

(2) Να προσδιοριστεί το πρόσημο της f .

(3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$.

Άσκηση 1245. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

(1) Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

(3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ως προς μονοτονία.

Άσκηση 1246. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-\nu x}$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(1) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία & ακρότατα και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της C_f .

(2) Να αποδείξετε ότι $2 \leq e^2 \nu^2 \cdot \int_{\frac{2}{\nu}}^{\frac{1}{\nu}} xe^{-\nu x} dx \leq e$.

Άσκηση 1247. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + \lambda x$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Να υπολογίσετε το λ όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

(2) Για την παραπάνω τιμή του λ , υπολογίστε το $\int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx$.

Άσκηση 1248. Δίνεται η συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1)$.

(1) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να προσδιορίσετε την αντίστροφή της.

(2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f^{-1}(y)dy$.

Άσκηση 1249. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2x - 3$.

(1) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

(2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^0 f^{-1}(y)dy$.

Άσκηση 1250. Έστω κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και κυρτή. Αποδείξτε ότι:

(1) $f(x) \leq f(-1) + (x+1)f'(x)$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

(2) $\int_{-1}^1 f(x) dx \leq f(-1) + f(1)$.

Άσκηση 1251. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\int_0^1 |f(x)| dx = 4$ και

$$f(x) - x + 2 > e^{1-x}, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(1) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο και να προσδιορίσετε.

(2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 |f(x) - e^{1-x} + x^2 - 2x + 5| dx$.

Άσκηση 1252. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

(1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς μονοτονία & ακρότατα.

(2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = 3$.

Άσκηση 1253. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, με $x > 0$.

(1) Να εξετάσετε αν η C_f διαθέτει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

(2) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .

(3) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, \frac{5}{4})$ ώστε $f(\xi) = 2^{5-4\xi}$.

(4) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$.

Άσκηση 1254. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-3} - \frac{1}{x+4}$.

- (1) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f .
- (2) Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της C_f .
- (3) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία.
- (4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha > 0$ ώστε $f(\alpha) = 0$.
- (5) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{1}{f(x)}$.
- (6) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -3$ και $x = -1$.

Άσκηση 1255. Έστω συνεχής στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f και F παράγουσα της $xf(x)$, στο ίδιο διάστημα, με $F(1) = 0$. Επιπλέον, ισχύει

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{F(x)}{x^2}, \quad (*)$$

για κάθε $x > 0$.

- (1) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, για κάθε $x > 0$.
- (2) Να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών της f .
- (3) Να προσδιοριστούν οι ασύμπτωτες της C_f .
- (4) Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = e$.

Άσκηση 1256. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$.

- (1) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα Ox και τις ευθείες $x = 2$, $x = 5$.

Άσκηση 1257. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

- (1) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.
- (2) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$.
- (3) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 2$, $x = 4$.
- (4) Να προσδιορίσετε την κάθετη στον άξονα $x'x$ ευθεία που διαμερίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Άσκηση 1258. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και

$$f'(x) \sin x + f(x) \eta \mu x = f(x) \sin x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- (1) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f .
- (2) Να μελετήσετε ως προς κυρτότητα την f .
- (3) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \frac{\pi}{4}$.

Άσκηση 1259. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & x > 1 \end{cases}.$$

- (1) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
- (2) Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .
- (3) Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .
- (4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει μοναδική ρίζα x_0 στο $(0, +\infty)$.
- (5) Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = x_0$ (όπου x_0 όπως παραπάνω), να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

- (6) Αν F είναι παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$, για κάθε $x > 1$.

Άσκηση 1260. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

- (1) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = 4$.

Άσκηση 1261. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$.

- (1) Να μελετήσετε ως προς κυρτότητα την f .
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $M(2, 2)$.

Άσκηση 1262. Έστω συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, για την οποία είναι γνωστά τα παρακάτω:

- $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, 0)$.
- Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = xf^{-1}(x)$ και τους άξονες $x'x$, $y'y$ ισούται με 4.

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $h(x) = f^2(x)$ και τους άξονες $x'x$, $y'y$.

Άσκηση 1263. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.
- Η f διαθέτει ως ακρότατο το $f(1) = 1$.
- $f(-1) + f(3) = -4$.

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$, $x = 3$.

Άσκηση 1264. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$

- (1) Να προσδιορίσετε τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f .
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την πλάγια ασύμπτωτη και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = \alpha$, όπου $\alpha > 1$.
- (3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

Άσκηση 1265. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 2^x - 1 - x \ln 2$ και $g(x) = 2^x$.

- (1) Να μελετήσετε ως προς μονοτονία τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι είναι θετική.
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ και την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(0, 1)$.
- (3) Να αποδείξετε ότι $\ln 2 < \sqrt{3} - 1$.

Άσκηση 1266. Έστω f συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[1, e]$, για την οποία ισχύουν $f(1) = 1$, $f(e) = 2$ και

$$f'(x)x \geq 2 \ln x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [1, e]$.

- (1) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f στο $[1, e]$.
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = 2$.

Άσκηση 1267. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 f^2(x^2) dx = 3 \int_0^4 f(x) - 2 dx. \quad (*)$$

- (1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 (f(x^2) - 3x)^2 dx$.
- (2) Να βρείτε τον τύπο της f .
- (3) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $M(1, f(1))$.

Άσκηση 1268. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$ και

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- (3) Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{f(1)}{2}$.

Άσκηση 1269. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$.

- (1) Να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- (2) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ είναι μεγαλύτερο του $\frac{e}{2}$.

Άσκηση 1270. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x^2$, $x \neq 0$.

- (1) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς μονοτονία.
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y = 0$, $y = 2$.

Άσκηση 1271. Έστω συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$, ώστε $f(0) = 0$, $f(1) = e$ και

$$f'(x)e^{-x} \leq x + 1, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, 1]$.

- (1) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f στο $[0, 1]$.
- (2) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = e$.

Άσκηση 1272. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f^3(x) + 2f(x) = x, \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να μελετήσετε την f ως προς κυρτότητα και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της C_f .
- (2) να προσδιορίσετε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο καμπής της.
- (3) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την f^{-1} .
- (4) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x^2}$. Να προσδιορίσετε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το εμβαδό που περικλείεται από την C_g , την ασύμπτωτη και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = e$.

Άσκηση 1273. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Να προσδιοριστούν άρτια συνάρτηση f και περιττή συνάρτηση g τέτοιες ώστε $h(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Να μελετηθούν οι f, g ως προς μονοτονία & ακρότατα.
- (3) Να υπολογιστεί το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = \lambda$, όπου $\lambda > 1$.
- (4) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Άσκηση 1274. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 2$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.
- (2) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και τους άξονες $x'x$, $y'y$.

Άσκηση 1275. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.
- (2) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = e$.

Άσκηση 1276. Έστω παραγωγίσιμες στο $[0, +\infty)$ συναρτήσεις f, g . Υποθέτουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g διέρχονται από το ίδιο σημείο του $y'y$. Επίσης, υποθέτουμε ότι

$$g'(x) = e^{x^2} \text{ και } \frac{f'(x)}{g''(x)} + x = 0, \quad (*)$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$.

Άσκηση 1277. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) + x$.

- (1) Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.
- (2) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τον άξονα x' και την ευθεία με εξίσωση $x = e$.

Άσκηση 1278. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(x-\alpha)(x-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = \alpha$ διαθέτουν αντιστοίχως εξισώσεις $y = 2x$ και $y = -x + 1$.

- (1) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη $x_1 = 0$.
- (2) Υπολογίστε το εμβαδό που περικλείεται από την C_f και τις δύο παραπάνω εφαπτόμενες.

