Θεωρήματα Συνέχειας

Ασκήσεις

Άσκηση 1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$, $x \in (-\infty, 0)$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x - x - 2 = 0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x = 2 - x$ είναι αδύνατη, στο $(-\infty, 0)$.

Άσκηση 2 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + e^{-x} - \frac{\eta\mu x}{x}.$$

α. Βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Άσκηση 3 α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x\left(e^x + 3\right) + 2e^x}{x(x+2)} = \frac{e^{-x} - 1}{x - 1}$$

έχει δύο τουλάχιστον ετερόσημες ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-2, 1)$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε:

$$\frac{g(\rho_1)}{\rho_2} = \frac{g(\rho_2)}{\rho_1},$$

όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

Άσκηση 4 Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Άσκηση 5 Αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha\eta\mu x + \pi = x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \alpha + \pi]$.

Άσκηση 6 Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ για την οποία ισχύει

$$x^2 + 2f^2(x) = 2 \quad \text{για κάθε } x \in \Delta = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right].$$

Επιμέλεια: Τσορτανίδης Δημήτρης Μαθηματικός MSc MEd

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα Δ.

β. Να δείξετε ότι η $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ αν $f(0) = 1$.

γ. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

δ. Να γίνει η γραφική της παράσταση.

Άσκηση 7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}^*$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$, τότε:

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Δίνεται ότι: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 = e^{-x-1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Άσκηση 8 Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x) - 7f(x) + 12 = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 9 Έστω η συνάρτηση $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (-1, 2)$ ώστε

$$f(x_0) = \frac{2f(-1) + f(0) + 3f(2)}{6}.$$

Άσκηση 10 Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 3]$ τέτοιο ώστε

$$f(1) + 2f(2) = 3f(\xi).$$

Άσκηση 11 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε

$$3f(x_1) + f(x_2) = 4f(x_0).$$

Άσκηση 12 Έστω η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε:

$$f^5(x) + 2f^3(x) + f(x) = xe^x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$.

Άσκηση 13 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε:

$$f^2(x) + (x+1) \cdot f(x) + e^{2x} = 3e^x \cdot f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1) = f(0) - x^2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 14 Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : (1,2) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-3}{x-2} = 2 \quad \text{και} \quad 2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)\cdot f(x) \leq x^2-1 \quad \text{για κάθε } x \in (1,2).$$

α. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = f(x) - \frac{1}{x-1} + 1$.

γ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x)+1}$ έχει με την ευθεία $\varepsilon : y = x - 1$ μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,2)$.

Άσκηση 15 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) = x^2 - 2x + 3$$

, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -1$. Να δείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

β. $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Η ευθεία $y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,3)$.

Άσκηση 16 Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι η σύνθεση $f \circ g$ είναι 1-1.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$g\left(f(x) + x^3\right) = g\left(f(x) + 3x - 1\right)$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες θετικές και μία ρίζα αρνητική.