

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Οι παρακάτω ασκήσεις αφορούν την παράγραφο 2.1 του σχολικού βιβλίου.

Για την επίλυση απαιτείται να έχετε μελετήσει τις ιδιότητες των πράξεων, ειδικά τις ιδιότητες των δυνάμεων, ταυτότητες, παραγοντοποίηση και τα αντίστοιχα παραδείγματα και ασκήσεις του σχολικού βιβλίου.

Ασκήσεις

Άσκηση 1 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$\alpha. (2^4)^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-4}$$

$$\delta. \frac{(5^{-2} \cdot 5^3)^2}{5^2}$$

$$\beta. (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3$$

$$\gamma. (-3)^2 - 3^2 + (-3)^3 - 3^3 - (-3)^2 \quad \epsilon. \left(\frac{4}{2^3}\right)^3 \cdot \frac{0.25^3}{1.25^3}$$

Άσκηση 2 Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$\alpha. A = \left[(xy^2)^5 \cdot (x^2y^3)^{-4} \cdot y \right] : \left(\frac{y^3}{x^{-4}} \right)^{-2}$$

$$\beta. A = \left[(x^3y)^{-3} \cdot (yx^3)^2 \right] : \left(\frac{y^{-2}}{x^3} \right)^2$$

Άσκηση 3 Να αναπτύξετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

$$\alpha. \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\delta. \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\eta. (x-1)(x+1)$$

$$\beta. (x^2 - 1)^2$$

$$\epsilon. (x-1)^3$$

$$\theta. (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$\gamma. (-x-2)^2$$

$$\zeta. (x+3)^3$$

$$\iota. (2x+1)^2 \cdot (2x-1)^2$$

Άσκηση 4 Να αναπτύξετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

$$\alpha. (2x+1)^2 - (4x+3)(4x-3)$$

$$\beta. (x^2+x+1)^2 - (x^2+x-1)^2$$

Άσκηση 5 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\alpha. (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$\beta. \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

Άσκηση 6 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $2x^3 - 4x^2 + 6x$

δ. $4x^2 - 1$

η. $x^2 - 6x + 9$

β. $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

ε. $9(2x - 1)^2 - 4$

θ. $4x^2 - 4x + 1$

γ. $x^2 - 3x + 3y - xy$

ζ. $8x^3 - y^3$

ι. $x^2(\alpha - \beta)^3 + y^2(\beta - \alpha)^3$

Άσκηση 7 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α. $\frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}$

γ. $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}$

ε. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^2 + x^3}{(x + 1)^3}$

β. $\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x}$

δ. $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$

Άσκηση 8 α. Να δείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y , ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y , ώστε $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

Άσκηση 9 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

Άσκηση 10 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α. Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

Άσκηση 11 Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α. Να αποδείξετε ότι $y = 2x$.

β. Για $y = 2x$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

Άσκηση 12 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$$

,τότε να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$.

β. $\alpha = \beta$.

Άσκηση 13 Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy$$

α. Να αποδείξετε ότι $(2y - x)^2 = 0$

β. Να αποδείξετε ότι $y = \frac{x}{2}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $(2y - \frac{x}{2})^2 + (2y - \frac{x}{2})^2 = 10y^2$.