

ΦΩΤΗΣ Χ. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΙΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2025

Φώτης Χ. Κουτσουμπίδης

Άλγεβρα

Α Λυκείου

Τράπεζα Θεμάτων



Θεσσαλονίκη
2025

Άλγεβρα | Α Λυκείου
Τράπεζα Θεμάτων

Φώτης Χ. Κουτσομπίδης
Μαθηματικός, Θεσσαλονίκη

Στοιχειοθεσία: L^AT_EX
Σελίδες 144, Μέγεθος A4
Σεπτέμβριος 2025

Email: fkoutsoubidis@gmail.com
Ιστότοπος: fmaths.gr

Περιεχόμενα

2	Οι Πραγματικοί Αριθμοί	7
2.1	Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους	7
2.2	Διάταξη Πραγματικών Αριθμών	10
2.3	Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών	14
2.4	Ρίζες Πραγματικών Αριθμών	17
3	Εξισώσεις	23
3.1	Εξισώσεις 1 ^{ου} Βαθμού	23
3.2	Η εξίσωση $x^y = \alpha$	25
3.3	Εξισώσεις 2 ^{ου} Βαθμού	26
4	Ανισώσεις	37
4.1	Ανισώσεις 1 ^{ου} Βαθμού	37
4.2	Ανισώσεις 2 ^{ου} Βαθμού	46
5	Πρόοδοι	59
5.1	Ακολουθίες	59
5.2	Αριθμητική Πρόοδος	59
5.3	Γεωμετρική Πρόοδος	71
6	Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων	79
6.1	Η Έννοια της Συνάρτησης	79
6.2	Γραφική Παράσταση Συνάρτησης	88
6.3	Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$	115
	Ευρετήριο Θεμάτων	139

2

Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

✓ Θέμα 1

B

● B12685

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4,$$

να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2.$ (12)

β) $\alpha = \beta.$ (13)

✓ Θέμα 2

B

● B13053

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \alpha\beta\gamma \neq 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\beta + \gamma = -\alpha.$ (6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha.$ (6)

β) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$ και $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0. \quad (13)$$

✓ Θέμα 3

B

● B13088

Δίνεται η παράσταση $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = x^2$. (13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$$

είναι ίσος με το τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού, τον οποίο να προσδιορίσετε. (12)

✓ Θέμα 4

B

● B13472

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha^2 = 2\alpha + \beta \quad \text{και} \quad \beta^2 = 2\beta + \alpha.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$. (8)

ii. $\alpha + \beta = 1$. (8)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$. (9)

✓ Θέμα 5

B

● B14458

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(2y - x)^2 = 0$. (8)

ii. $y = \frac{x}{2}$. (5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$. (12)

✓ Θέμα 6

B

● B14473

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y , με $xy \neq 0$ και $x \neq 4y$, για τους οποίους ισχύει

$$\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2.$$

α) Να αποδείξετε ότι $y = 2x$. (12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$. (13)

✓ Θέμα 7

B

● B14555

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$. (12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$. (13)

✓ Θέμα 8

B

● B35388

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$, για τους οποίους ισχύουν

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$. (10)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$. (15)

✓ Θέμα 9

Γ

● C14329

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad B = \alpha^2,$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β οι παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. (10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι. (15)

✓ Θέμα 10

Δ

● D15052

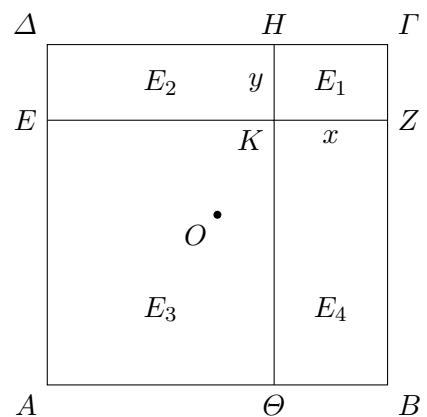
Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και τα ευθύγραμμα τμήματα EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλα στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, με $x, y \in (0, 6)$, τότε:

α) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 συναρτήσει των x, y . (8)

β) Για $x = 4$ και $y = 2$, να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 . (6)

γ) Αν, επιπλέον, ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $xy + 9 = 3(x + y)$. (6)



- ii. Να αποδείξετε ότι ένα τουλάχιστον από τα ευθύγραμμα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου. (5)

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

✓ Θέμα 11

B

● B12922

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{και} \quad B = 2\alpha\beta,$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες ισχύει $A = 0$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των α, β , ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (8)

✓ Θέμα 12

B

● B13266

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \alpha^2 + 4\alpha + 5 \quad \text{και} \quad B = (2\beta + 1)^2 - 1,$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (8)

β) i. Να αποδείξετε ότι $A + B \geq 0$ για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (9)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β ισχύει $A + B = 0$. (8)

✓ Θέμα 13

B

● B13323

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17. \quad (12)$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0. \quad (13)$$

✓ Θέμα 14

B

● B12673

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $0 < \alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}. \quad (13)$$

$$\beta) \alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}. \quad (12)$$

✓ Θέμα 15

B

● B14410

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad B = (\beta - 3)^2,$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha) \quad \text{i. Να αποδείξετε ότι } A + B \geq 0 \text{ για οποιαδήποτε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

$$\text{ii. Να βρείτε για ποιες τιμές των } \alpha, \beta \text{ ισχύει } A + B = 0. \quad (8)$$

$$\beta) \text{ Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των } \alpha, \beta, \text{ ώστε να ισχύει } A = -B. \quad (8)$$

✓ Θέμα 16

B

● B14475

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν

$$2 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3,$$

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

$$\alpha) \alpha + 2\beta, \quad (12)$$

$$\beta) \alpha - \beta. \quad (13)$$

✓ Θέμα 17

B

● B14704

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν

$$2 \leq x \leq 3 \quad \text{και} \quad 1 \leq y \leq 2,$$

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

$$\alpha) x + y, \quad (5)$$

$$\beta) 2x - 3y, \quad (10)$$

$$\gamma) \frac{x}{y}. \quad (10)$$

✓ Θέμα 18

B

● B14492

Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ικανοποιούν τις σχέσεις

$$4 \leq x \leq 7 \quad \text{και} \quad 2 \leq y \leq 3.$$

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (13)

✓ Θέμα 19

B

● B35040

Δίνονται οι παραστάσεις

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha(3 - \beta),$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$. (3)

β) Να αποδείξετε ότι $K \geq \Lambda$ για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β ισχύει $K = \Lambda$. (12)

✓ Θέμα 20

B

● B36884

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10. \quad (12)$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0. \quad (13)$$

✓ Θέμα 21

B

● B37179

Δίνονται οι παραστάσεις

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha\beta,$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $K \geq \Lambda$ για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (12)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β ισχύει $K = \Lambda$. (13)

✓ Θέμα 22

B

● B36899

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4. \quad (12)$$

$$\beta) \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16. \quad (13)$$

✓ Θέμα 23

B

● B37817

Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } A = x^4 + x^2 + 2. \quad (15)$$

$$\beta) \quad \text{i. Να αποδείξετε ότι } A > 0 \text{ για κάθε } x \neq \pm\sqrt{2}. \quad (5)$$

$$\text{ii. Να βρείτε για ποια τιμή του } x \text{ η παράσταση } A \text{ παίρνει τη μικρότερη τιμή της. (5)}$$

✓ Θέμα 24

Γ

● C14602

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } 0 < \alpha^3 < \alpha. \quad (13)$$

$\beta)$ Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}. \quad (12)$$

✓ Θέμα 25

Γ

● C14713

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha},$$

όπου $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2). \quad (7)$$

$$\beta) \quad \text{i. } A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}. \quad (8)$$

$$\text{ii. } A \geq 6 \text{ για κάθε } \alpha > 0. \text{ Πότε ισχύει η ισότητα } A = 6; \quad (10)$$

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών

✓ Θέμα 26

B

● B13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύουν

$$2 \leq \alpha \leq 3 \quad \text{και} \quad -2 \leq \beta \leq -1.$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha - 3| = 3 - \alpha \quad \text{και} \quad |\beta + 2| = \beta + 2. \quad (8)$$

β) Να αποδείξετε ότι $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$. (8)

γ) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$A = |\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$$

είναι ίση με 1. (9)

✓ Θέμα 27

B

● B14071

α) Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις K εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (5)

$$\text{A. } K = |x + 1| + |x - 2| \quad \text{B. } K = |x - 1| + |x + 2| \quad \text{Γ. } K = (|x| + 1) + (|x| - 2)$$

β) Αν $K = |x + 1| + |x - 2|$, τότε:

i. Για $x = \frac{3}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K . (10)

ii. Για $x > 2$, να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση K και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $K > 3$. (10)

✓ Θέμα 28

B

● B14412

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > \beta > 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2. \quad (12)$$

$$\beta) \alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}. \quad (13)$$

✓ Θέμα 29

B

● B14730

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Για $x = 2^3 - 3^2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A . (8)
- ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A = 5$. (10)
- β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. (7)

✓ Θέμα 30

B

● B15054

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός

$$A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$$

είναι θετικός. (16)

- β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$. (9)

✓ Θέμα 31

B

● B35041

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

- α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (12)
- β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x|$$

είναι ανεξάρτητη του x . (13)

✓ Θέμα 32

B

● B35112

Δίνεται η παράσταση $A = |3x - 6| + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι:

i. Αν $x \geq 2$, τότε $A = 3x - 4$. (6)

ii. Αν $x < 2$, τότε $A = 8 - 3x$. (6)

- β) Για $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$. (13)

✓ Θέμα 33

B

● B35412

Αν $5 < x < 10$, τότε:

- α) Να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές. (10)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$. (15)

✓ Θέμα 34

B

● B36894

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$. (15)

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$. (10)

✓ Θέμα 35

B

● B36898

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδείξετε ότι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$. (15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (10)

✓ Θέμα 36

B

● B37201

Δίνεται η παράσταση

$$A = |x-1| + |y-3|,$$

όπου x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$1 < x < 4 \quad \text{και} \quad 2 < y < 3.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$. (12)

β) $0 < A < 4$. (13)

✓ Θέμα 37

Δ

● D13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύουν

$$1 \leq \beta \leq 2 \quad \text{και} \quad 2 \leq \alpha \leq 4.$$

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, να αποδείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την παραπάνω πρόταση. (7)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$. (5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει

$$\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right|. \quad (6)$$

✓ Θέμα 38

Δ

● D33888

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β . (13)

β) Αν, επιπλέον, ισχύει $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|. \quad (12)$$

✓ Θέμα 39

Δ

● D36672

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i. $|x + 2|$, (4)

ii. $|x - 7|$. (4)

β) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $|x + 2| + |x - 7|$. (5)

γ) Να βρείτε γεωμετρικά την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$. (5)

δ) Να βρείτε αλγεβρικά την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$. (7)

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

✓ Θέμα 40

B

● B12943

Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$. (12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$. (13)

✓ Θέμα 41

B

● B14452

Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha = \sqrt{3} - 1 \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{3} + 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10. \quad (15)$$

$$\beta) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5. \quad (10)$$

✓ Θέμα 42

B

● B14599

Αν $|2x| < 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) -1 < x < 1. \quad (12)$$

$$\beta) x^2 < 1 \text{ για κάθε } x \in (-1, 1). \quad (13)$$

✓ Θέμα 43

B

● B14682

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = (\sqrt{3})^6 \quad \text{και} \quad B = (\sqrt[3]{3})^6.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) A - B = 18. \quad (12)$$

$$\beta) \sqrt[3]{3} < \sqrt{3}. \quad (13)$$

✓ Θέμα 44

B

● B14750

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί

$$\alpha = 1 + 2\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{2} - 2.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha^2 + \beta^2 = 15. \quad (12)$$

$$\beta) \sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5. \quad (13)$$

✓ Θέμα 45

B

● B14774

α) Να αποδείξετε ότι

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5} \quad \text{και} \quad (1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}. \quad (13)$$

$$\beta) \text{ Να αποδείξετε ότι } \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}. \quad (12)$$

✓ Θέμα 46

B

● B14849

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) 2 < \sqrt{5}. \quad (7)$$

$$\beta) (2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}. \quad (10)$$

$$\gamma) \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2. \quad (8)$$

✓ Θέμα 47

B

● B15051

α) Να αποδείξετε ότι

$$(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$\text{και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα της παράστασης } (2 + \sqrt{5})^2. \quad (12)$$

$$\beta) \text{ Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών } 9 - 4\sqrt{5} \text{ και } 9 + 4\sqrt{5}. \quad (13)$$

✓ Θέμα 48

B

● B34152

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \sqrt{(x-2)^2} \quad \text{και} \quad B = \sqrt[3]{(2-x)^3}.$$

$$\alpha) \text{ Για ποιες τιμές του } x \in \mathbb{R} \text{ ορίζεται η παράσταση } A; \quad (7)$$

$$\beta) \text{ Για ποιες τιμές του } x \in \mathbb{R} \text{ ορίζεται η παράσταση } B; \quad (8)$$

$$\gamma) \text{ Να αποδείξετε ότι } A = B \text{ για κάθε } x \leq 2. \quad (10)$$

✓ Θέμα 49

B

● B34157

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = 2 - \sqrt{3} \quad \text{και} \quad B = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } A \cdot B = 1. \quad (12)$$

$$\beta) \text{ Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης } \Pi = A^2 + B^2. \quad (13)$$

✓ Θέμα 50

B

● B36778

$$\text{Δίνεται η παράσταση } K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}.$$

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (13)

✓ Θέμα 51

B

● B37192

Στον πίνακα μιας τάξης είναι γραμμένες οι παρακάτω προσεγγίσεις:

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \qquad \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73 \qquad \sqrt{7} \approx 2,64$$

α) Να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς

$$\sqrt{20}, \sqrt{45} \quad \text{και} \quad \sqrt{80}. \quad (12)$$

β) Χωρίς τις προσεγγιστικές τιμές των ριζών, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}. \quad (13)$$

✓ Θέμα 52

B

● B37197

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A ; Να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (13)

β) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$. (12)

✓ Θέμα 53

B

● B37198

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση B ; Να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι $B^2 + 6B = B^4$. (12)

✓ Θέμα 54

B

● B37199

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = (\sqrt{2})^6 \quad \text{και} \quad B = (\sqrt[3]{2})^6.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) A - B = 4. \quad (13)$$

$$\beta) 1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}. \quad (12)$$

✓ Θέμα 55

Γ

● C14805

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει

$$\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|.$$

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } \alpha = \sqrt{2}. \quad (10)$$

$$\beta) \text{ Να αποδείξετε ότι } \alpha^3 = 2\alpha. \quad (5)$$

$$\gamma) \text{ Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης } A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2. \quad (10)$$

Δίνεται ότι: $\sqrt{2} \approx 1,41$

✓ Θέμα 56

Γ

● C34155

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \sqrt[3]{5}, \quad B = \sqrt{3} \quad \text{και} \quad \Gamma = \sqrt[6]{5}.$$

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}. \quad (15)$$

$$\beta) \text{ Να συγκρίνετε τους αριθμούς } A \text{ και } B. \quad (10)$$

✓ Θέμα 57

Γ

● C37172

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6 \quad \text{και} \quad \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6.$$

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } A + B + \Gamma = 23. \quad (13)$$

$$\beta) \text{ Να συγκρίνετε τους αριθμούς } \sqrt[3]{3} \text{ και } \sqrt[6]{6}. \quad (12)$$

✓ Θέμα 58

Δ

● D14931

Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \quad \text{και} \quad \beta = 1 - \sqrt{2}.$$

$$\alpha) \text{ Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης } A = \alpha^2 - \beta^2. \quad (7)$$

$$\beta) \text{ Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης } B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}. \quad (8)$$

$$\gamma) \text{ Αν } A = 4\sqrt{2} \text{ και } B = 2, \text{ να αποδείξετε ότι } \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}. \quad (10)$$

3

Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

✓ Θέμα 59

B

● B12857

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = 2\lambda - 2$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$. (7)

ii. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης, να βρείτε την τιμή του λ . (10)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. (8)

✓ Θέμα 60

B

● B13169

Αν $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$. (10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$. (15)

✓ Θέμα 61

B

● B14224

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{x + 1}{x}$. (8)

β) i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται. (8)

ii. Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. (9)

✓ Θέμα 62

B

● B14649

Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$. (12)

β) i. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 4$. (8)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K για κάθε λύση x της παραπάνω εξίσωσης. (5)

✓ Θέμα 63

B

● B34146

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για:

i. $\alpha = 1$. (5)

ii. $\alpha = -3$. (8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (12)

✓ Θέμα 64

B

● B34872

Δίνεται η εξίσωση $kx + 3 = 2x$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $k = 1$ και για $k = 3$. (13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $k = 2$. (12)

✓ Θέμα 65

B

● B35033

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = |2x - 4| \quad \text{και} \quad B = |x - 3|.$$

α) Αν $2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι $A = 2x - 4$. (7)

β) Αν $2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x \in (2, 3)$, ώστε να ισχύει $A + B = 2$. (9)

✓ Θέμα 66

B

● B36896

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Επιλέγοντας τρεις τιμές για το λ , να γράψετε τις αντίστοιχες εξισώσεις. (9)

β) i. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση. (8)

- ii. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης να είναι ίση με 4. (8)

✓ Θέμα 67

Δ

● D13170

Υποθέτουμε ότι ένα κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν τραπεζικό λογαριασμό αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\%$, όπου $\varepsilon\%$ είναι το ετήσιο επιτόκιο της τράπεζας.

- α) Να αποδείξετε ότι, αν σε μια τράπεζα καταθέσουμε κεφάλαιο $x \in \mathbb{E}$ με επιτόκιο $\varepsilon\%$, τότε μετά από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο

$$x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \in \mathbb{E}. \quad (7)$$

- β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο το καταθέτουμε στην τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο ποσό στην τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από δύο έτη εισπράτουμε και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 14.811 €. Αν ονομάσουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1,03^2 - 1,02^2)y = 15.811 - 15.000 \cdot 1,02^2. \quad (10)$$

- ii. Να βρείτε το ποσό που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα. (8)

✓ Θέμα 68

Δ

● D36673

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$. (10)

- β) Αν, επιπλέον, ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, τότε:

- i. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (7)

- ii. Χρησιμοποιώντας τον άξονα, να προσδιορίσετε τον αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Στη συνέχεια, να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας. (8)

3.2 Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$

✓ Θέμα 69

Γ

● C14052

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$. (6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| + x = 0$. (9)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$. (10)

✓ Θέμα 70

Δ

● D14820

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ (4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$ (4)

β) Να αποδείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A . (5)

ii. Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$. (6)

3.3 Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

✓ Θέμα 71

B

● B14577

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -1 είναι ρίζα της εξίσωσης. (8)

β) Να βρείτε τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης. (8)

γ) Για $x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$. (9)

✓ Θέμα 72

B

● B14741

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$. (13)

β) i. Να αποδείξετε ότι $K \neq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. (6)

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει $K(K - 2) = 0$. (6)

✓ Θέμα 73

B

● B34149

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$. (9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| < 2$. (9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις παραπάνω σχέσεις. (7)

✓ Θέμα 74

B

● B34150

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -64$. (8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς α, β . (10)γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β . (7)

✓ Θέμα 75

B

● B34154

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}.$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$A + B = 3 \quad \text{και} \quad A \cdot B = \frac{1}{2}. \quad (12)$$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς A, B . (13)

✓ Θέμα 76

B

● B34161

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$. (12)

β) Αν α, β , με $\alpha < \beta$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, να λύσετε την εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0. \quad (13)$$

✓ Θέμα 77

B

● B34436

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A + B = \frac{1}{2}$. (8)

ii. $A \cdot B = \frac{1}{20}$. (8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς A, B . (9)

✓ Θέμα 78

B

● B34920

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $3x^2 + 6x - 12$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$. (13)

β) Να βρείτε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $4x_1, 4x_2$. (12)

✓ Θέμα 79

B

● B35038

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha\beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$. (10)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς α, β , τους οποίους και να βρείτε. (15)

✓ Θέμα 80

B

● B35100

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$. (15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$. (10)

✓ Θέμα 81

B

● B35382

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$. (10)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K . (7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K . (8)

✓ Θέμα 82

B

● B36890

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$. (10)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει τις ίδιες ρίζες με την εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος. (15)

✓ Θέμα 83

B

● B37171

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -15$. (10)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς α, β , τους οποίους και να βρείτε. (15)

✓ Θέμα 84

B

● B37178

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ m και x m.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. (10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος είναι 90 m^2 , να βρείτε τις διαστάσεις του. (15)

✓ Θέμα 85

B

● B37181

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η εξίσωση έχει λύση τον αριθμό 1, να βρείτε την τιμή του λ . (13)

β) Για $\lambda = 2$, να λύσετε την εξίσωση. (12)

✓ Θέμα 86

Γ

● C14749

α) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x}{x - |x|}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A . (9)

ii. Να αποδείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$. (7)

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^3}{x - |x|} = \frac{3}{2}x + 2$. (9)

✓ Θέμα 87

Γ

● C14578

Δίνεται η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Π . (10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\Pi = 0$. (15)

✓ Θέμα 88

Δ

● D12683

Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τετράγωνη βάση και ύψος ίσο με το $\frac{1}{4}$ της πλευράς της βάσης.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16 m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της. (8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου, η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με ορθογώνια βάση και ύψος 2 m . Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2 m μικρότερο από το μήκος της, αλλά ο όγκος της παραμένει 16 m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της βάσης της. (9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10 m^3 πετρέλαιο, να υπολογίσετε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου στη δεξαμενή. (8)

✓ Θέμα 89

Δ

● D14406

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$, για τους οποίους ισχύει

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$. (7)

Αν, επιπλέον, οι αριθμοί α, β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και έχουν άθροισμα $\frac{5}{2}$, τότε:

γ) Να βρείτε τους αριθμούς α και β . (8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσουμε σε έναν από τους α, β , ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο. (5)

✓ Θέμα 90

Δ

● D14490

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω . (5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \Omega$.

i. Να βρείτε το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (10)

ii. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει αντίστροφες ρίζες. (6)

γ) Για $\lambda = 3$, να λύσετε την εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος. (4)

✓ Θέμα 91

Δ

● D14543

Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός a γράφεται στη μορφή $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3, 5, 7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων. (6)

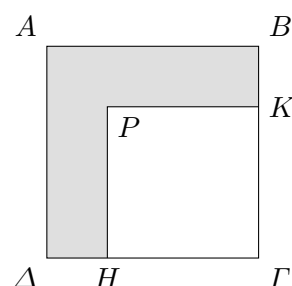
β) i. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται με έναν περιττό ακέραιο. (6)

ii. Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων. (6)

γ) Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $\Gamma H P K$ είναι τετράγωνα και ισχύουν

$$\Gamma H = \Gamma K = \nu \quad \text{και} \quad \Delta H = B K = 1.$$

Αν το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ισούται με 45, να βρείτε την τιμή του θετικού ακεραίου ν . (7)



✓ Θέμα 92

Δ

● D14651

Τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0,$$

με παράμετρο $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου. (6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$ για κάθε $\lambda > 0$. (7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι συμπεραίνετε τότε για το ορθογώνιο; (6)

✓ Θέμα 93

Δ

● D14759

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$ για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (8)

β) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$. (6)

γ) Για $\alpha = 2$ και $\beta = -6$:

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$. (6)

ii. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου υποερωτήματος, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}. \quad (5)$$

✓ Θέμα 94

Δ

● D33584

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (6)

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$. (4)

γ) Αν, επιπλέον, ισχύει $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$. (7)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης καθώς και την τιμή του λ . (8)

✓ Θέμα 95

Δ

● D33585

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (5)

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης συναρτήσει του α . (10)

γ) Αν $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$, να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει

$$|\rho_1 - \rho_2| = 2. \quad (10)$$

✓ Θέμα 96

Δ

● D33826

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση

$$(1): x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0,$$

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν $\gamma < 0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 - 4\gamma > 0$. (3)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες. (12)

✓ Θέμα 97



● D33889

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$(1): 3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad \text{και} \quad (2): 8x^2 - 14x + 3 = 0. \quad (10)$$

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι αριθμοί των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα συμβαίνει για κάθε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής

$$(3): ax^2 + bx + \gamma = 0 \quad \text{και} \quad (4): \gamma x^2 + bx + a = 0,$$

με $a\gamma \neq 0$. Να επιβεβαιώσετε τον ισχυρισμό του μαθητή, αποδεικνύοντας ότι αν ένας αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3), τότε:

i. $\rho \neq 0$, (5)

ii. ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4). (10)

✓ Θέμα 98



● D34310

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή. (8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ . (7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2. (10)

✓ Θέμα 99



● D34327

α) Να λύσετε την εξίσωση (1): $x^2 - 3x - 4 = 0$. (10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει

$$\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός α είναι τετραπλάσιος του αριθμού β . (8)

✓ Θέμα 100

Δ

● D34390

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις k, λ , του οποίου η περίμετρος είναι 14 cm και η διαγώνιος 5 cm.

i. Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(k + \lambda)^2 = k^2 + 2k\lambda + \lambda^2,$$

να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με 12 cm^2 . (7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι διαστάσεις k, λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 7x + 12 = 0. \quad (7)$$

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις k και λ του ορθογωνίου. (4)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε ορθογώνιο με περίμετρο 14 cm έχει εμβαδόν E που ικανοποιεί τη σχέση $E \leq \frac{49}{4}$. (7)

✓ Θέμα 101

Δ

● D34544

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (2\lambda - 4)^2$. (7)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (9)

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (9)

✓ Θέμα 102

Δ

● D36651

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης για $\lambda = -2$ και για $\lambda = 3$. (8)

β) i. Αν $\lambda = 5$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα. (3)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει μία διπλή ρίζα. (6)

γ) Αν, επιπλέον, ισχύει

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5, \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\},$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (8)

✓ Θέμα 103

Δ

● D36661

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού. (6)

Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα:

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0. \quad (6)$$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης. (6)

✓ Θέμα 104

Δ

● D36663

Για την κάλυψη μέρους ενός τοίχου με τετράγωνα πλακάκια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε πλακάκια τύπου A με πλευρά d cm είτε πλακάκια τύπου B με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, συναρτήσει του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου A και κάθε πλακάκι τύπου B. (6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου A είτε με 128 τύπου B, να βρείτε:

i. τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (12)

ii. το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτεται. (7)

✓ Θέμα 105

Δ

● D36675

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε το άθροισμα $x_1 + x_2$ καθώς και το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ συναρτήσει του λ . (5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$. (5)

ii. Να βρείτε την τιμή του λ . (5)

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} Βαθμού

✓ Θέμα 106

B

● B12909

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (-2, 8)$. (9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x . (7)

γ) Αν A είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους. (9)

✓ Θέμα 107

B

● B14295

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 1| \geq 6$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη θέση του πραγματικού αριθμού x στον άξονα, επιλέγοντας μία από τις παρακάτω αναπαραστάσεις. (12)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα. (13)

✓ Θέμα 108

B

● B13025

α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$. (10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$. (10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (5)

✓ Θέμα 109

B

● B14319

α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x-5| < 3$. (12)

β) Αν ο αριθμός α είναι μία από τις λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5). \quad (13)$$

✓ Θέμα 110

B

● B14491

α) Να λύσετε την ανίσωση $|y-3| < 1$. (12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με

$$1 < x < 3 \quad \text{και} \quad 2 < y < 4,$$

να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου. (13)

✓ Θέμα 111

B

● B14572

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει

$$|x+2| < 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$. (10)

β) $|2x+4| < 2$. (15)

✓ Θέμα 112

B

● B14617

Δίνεται η ανίσωση $|x-7| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $6 < x < 8$. (12)

β) Αν $6 < k < 8$, να αποδείξετε ότι $3 < \frac{24}{k} < 4$. (13)

✓ Θέμα 113

B

● B34148

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

i. $|2x - 3| \leq 5$ (9)

ii. $|2x - 3| \geq 1$ (9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (7)

✓ Θέμα 114

B

● B35043

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $|x - 2| < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 5$. (12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|x + 1| + |x - 5|}{3}$. (13)

✓ Θέμα 115

B

● B35044

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός y για τον οποίο ισχύει $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $y \in (1, 3)$. (12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2}$. (13)

✓ Θέμα 116

B

● B35404

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $y \in \mathbb{R}$ ισχύει $|y - 3| < 1$. (15)

β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν

$$1 < x < 3 \quad \text{και} \quad 2 < y < 4,$$

να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$. (10)

✓ Θέμα 117

B

● B35415

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| - |x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Για $1 < x < 2$, να αποδείξετε ότι $A = 2x - 3$. (13)

β) Για $x < 1$, να αποδείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή, δηλαδή ανεξάρτητη του x , την οποία και να προσδιορίσετε. (12)

✓ Θέμα 118

B

● B35549

Στο διπλανό σχήμα από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρείται το τετράγωνο $\Gamma\Delta E H$ πλευράς y .

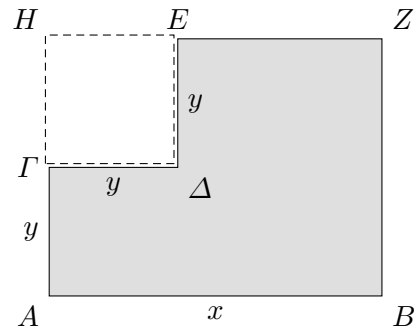
- α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του σκιασμένου χωρίου $EZBA\Gamma\Delta$ που απομένει δίνεται από τη σχέση

$$\Pi = 2x + 4y. \quad (10)$$

- β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν

$$5 < x < 8 \quad \text{και} \quad 1 < y < 2,$$

να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου Π του σκιασμένου χωρίου. (15)



✓ Θέμα 119

B

● B36777

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y για τα οποία ισχύουν

$$|x - 3| \leq 2 \quad \text{και} \quad |y - 6| \leq 4.$$

- α) Να αποδείξετε ότι

$$1 \leq x \leq 5 \quad \text{και} \quad 2 \leq y \leq 10. \quad (12)$$

- β) Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις $2x$ και y . (13)

✓ Θέμα 120

B

● B36886

- α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$. (8)

- β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$. (8)

- γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το εκφράσετε ως διάστημα ή ένωση διαστημάτων. (9)

✓ Θέμα 121

B

● B36888

- α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$. (7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$. (8)

γ) Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων. (10)

✓ Θέμα 122

B

● B36893

α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 1| \leq 7$. (9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| > 2$. (9)

γ) Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων. (7)

✓ Θέμα 123

B

● B36895

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x + 4| = 10$. (9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| > 1$. (9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης. (7)

✓ Θέμα 124

B

● B37170

Η θερμοκρασία T (σε °C) σε βάθος x km κάτω από την επιφάνεια της Γης δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση

$$T = 15 + 25x, 0 \leq x \leq 200.$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία σε βάθος 30 km κάτω από την επιφάνεια της Γης. (7)

β) Να υπολογίσετε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι 290 °C. (10)

γ) Από ποιο βάθος και μετά η θερμοκρασία γίνεται μεγαλύτερη από 440 °C; (8)

✓ Θέμα 125

B

● B37191

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

i. $|1 - 2x| < 5$ (9)

ii. $|1 - 2x| \geq 1$ (9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις. (7)

✓ Θέμα 126

B

● B37193

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A . (12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (13)

✓ Θέμα 127

B

● B37195

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων. (13)

β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι $A^2 + A - 6 = 0$. (12)

✓ Θέμα 128

B

● B37196

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων. (12)

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$. (13)

✓ Θέμα 129

B

● B37200

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x+1| < 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (-3, 1)$. (12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$$

είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (13)

✓ Θέμα 130

Γ

● C14753

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \in [-1, 1]$. (10)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός x απέχει από τον αριθμό -3 απόσταση το πολύ 4. (5)

γ) Να γράψετε την παράσταση

$$A = |2x - 3| - |4 - 3x|$$

χωρίς απόλυτες τιμές. (10)

✓ Θέμα 131

Γ

● C35296

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$. (8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από τον αριθμό 5 απόσταση το πολύ 3. (9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των προηγούμενων ερωτημάτων. (8)

✓ Θέμα 132

Δ

● D13114

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{|x - 1| - |3 - 3x| + |2x - 4|}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $K = d(x, 2) - d(x, 1)$. (9)

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2 αντίστοιχα, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $K = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της. (8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $K = 0$. (8)

✓ Θέμα 133

Δ

● D13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν άθροισμα 6 και γινόμενο λ , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta \leq 9$. (6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 9$, αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. (5)

γ) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. (7)

✓ Θέμα 134

Δ

● D13474

Δίνονται οι ανισώσεις

$$(1): |x - 1| \leq \sqrt{3} \quad \text{και} \quad (2): 3 - \frac{x + 4}{2} < 0.$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (5)

- β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της ανίσωσης (1). (5)
- γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (7)
- δ) Αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2), να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι κοινή λύση τους. (8)

✓ Θέμα 135

Δ

● D14650

- α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \leq 3$. (7)
- β) Να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της παραπάνω ανίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$. (5)
- γ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - 1| \leq 3$. (5)
- δ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση $||x| - 1| \leq 3$. (8)

✓ Θέμα 136

Δ

● D33586

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει toner για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της επιχείρησης ανέρχονται στο ποσό των 6500 € (ενοίκιο, παροχές, μισθοί, φόροι κ.ά.). Το κόστος γεμίματος ενός toner είναι 15 €, ενώ η χρέωση ανά γέμισμα είναι 25 €.

- α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(\nu)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν toner τον μήνα. (5)
- β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα $E(\nu)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν toner τον μήνα. (5)
- γ) Να βρείτε πόσα toner πρέπει να γεμίζονται κάθε μήνα, ώστε η επιχείρηση:
- να μην έχει ζημία. (7)
 - να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 €. (8)

✓ Θέμα 137

Δ

● D33893

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$. (7)
- β) Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό x , του οποίου η απόσταση από τον αριθμό 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.
- Να αποδείξετε ότι $3x - 4 > 0$. (5)

- ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του x από τον αριθμό 4 είναι μεγαλύτερη από 2 και μικρότερη από 14. (5)
- iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από τον αριθμό 19. (8)

✓ Θέμα 138

Δ

● D33896

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύουν

$$|\alpha - 2| < 1 \quad \text{και} \quad |\beta - 3| \leq 2.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$. (4)
- β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο αριθμός β . (5)
- γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha - 3\beta$. (7)
- δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha}{\beta}$. (9)

✓ Θέμα 139

Δ

● D34322

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση

$$(1): \lambda = (2x + 5)^2 - 8x.$$

- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ ; (4)
- β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x ; (6)
- γ) i. Να αποδείξετε ότι η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή
- $$4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0. \quad (2)$$
- ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να πάρει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (6)
- iii. Να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ . (7)

✓ Θέμα 140

Δ

● D34325

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (10)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες. (6)
- γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$0 < d(x_1, x_2) < 2. \quad (9)$$

✓ Θέμα 141

Δ

● D36671

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (5)

β) Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο τη απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα. (10)

δ) Να αποδείξετε ότι $|x + 4| + |x - 14| = 18$. (5)

4.2 Ανισώσεις 2^{ου} Βαθμού

✓ Θέμα 142

B

● B12722

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $f(x)$. (12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $-2f(x) < 0$. (13)

✓ Θέμα 143

B

● B12976

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$. (12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$. (13)

✓ Θέμα 144

B

● B14189

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να αποδείξετε ότι $-1 < x < 4$. (12)

β) Δίνεται η παράσταση

$$A = |2x + 2| + |x - 5|.$$

Αν $-1 < x < 4$, να αποδείξετε ότι $A = x + 7$. (13)

✓ Θέμα 145 B ● B13321

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης. (8)

✓ Θέμα 146 B ● B14474

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του τριωνύμου. (12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (13)

✓ Θέμα 147 B ● B34162

α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 5| \leq 3$. (7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x - 1 \geq 0$. (9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (9)

✓ Θέμα 148 B ● B34919

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$. (13)

β) Αν $3 < x < 7$, να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = |x^2 - 10x + 21| + x^2 - 10x + 22$$

είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (12)

✓ Θέμα 149 B ● B35030

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|. \quad (15)$$

✓ Θέμα 150 B ● B35035

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 + 9x - 12$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (13)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης. (12)

✓ Θέμα 151

B

● B36887

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου. (7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - 3x + 1 < 0$. (9)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης. (9)

✓ Θέμα 152

B

● B36892

α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x|}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3}$. (9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$. (9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης. (7)

✓ Θέμα 153

B

● B37168

Δίνονται οι ανισώσεις

$$-x^2 + 5x - 6 < 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 16 \leq 0.$$

α) Να βρείτε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (12)

β) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές λύσεις τους. (13)

✓ Θέμα 154

B

● B37169

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$. (12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (13)

✓ Θέμα 155

B

● B37182

Δίνεται το τριώνυμο $A(x) = x^2 - x - 2$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$. (8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $A(x) > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (12)

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα και να εξετάσετε αν είναι λύση της ανίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος. (5)

✓ Θέμα 156

B

● B38203

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 25 = 0$. (7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 16 \leq 0$. (9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης. (9)

✓ Θέμα 157

Γ

● C14601

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|2x - 1| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$. (12)

β) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς

$$1, x, x^2. \quad (13)$$

✓ Θέμα 158

Γ

● C34910

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$. (13)

β) Αν οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι λύση της ανίσωσης. (12)

✓ Θέμα 159

Δ

● D13174

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1} \quad \text{και} \quad B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}.$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B . (8)

β) Να αποδείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$. (8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $B - A < 2d(x, 4) - 5$. (9)

✓ Θέμα 160

Δ

● D13176

Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x - 1| < 2 \quad \text{και} \quad x^2 - 3x + 2 \geq 0.$$

α) Να βρείτε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$. (8)

γ) i. Αν οι αριθμοί ρ_1, ρ_2 είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$$\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1] \quad \text{και} \quad \rho_1 < \rho_2,$$

να εξετάσετε αν και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση τους. (4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1, ρ_2 είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$$\rho_1 \in (-1, 1] \quad \text{και} \quad \rho_2 \in [2, 3),$$

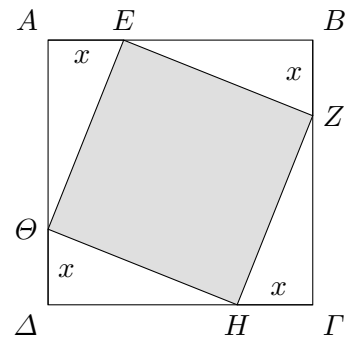
να εξετάσετε αν και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση τους. (5)

✓ Θέμα 161



● D13368

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α , καθώς και το τετράγωνο $EZH\Theta$, του οποίου οι κορυφές βρίσκονται πάνω στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από τη σχέση

$$(EZH\Theta) = x^2 + (\alpha - x)^2, \quad 0 \leq x \leq \alpha. \quad (6)$$

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$. (11)

γ) Αν για $x = 1$ ισχύει

$$(EZH\Theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta),$$

να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (8)

Δίνεται ότι: $\sqrt{3} \approx 1,73$

✓ Θέμα 162



● D14123

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha + 1)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. (7)

β) Αν $\alpha > -2$, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$. (4)
- ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος των λύσεων της ανίσωσης $f(x) \leq 0$ είναι ίσο με 2024. (7)
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της τιμής $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. (7)

✓ Θέμα 163

Δ

● D14615

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (6)
- β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση. (7)

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

- γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 8. (6)
- δ) Αν $\rho_1 < k < \rho_2$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Pi = k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$. (6)

✓ Θέμα 164

Δ

● D14652

- α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 > x$. (8)
- β) Δίνεται ο πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.
- i. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς
- $$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}. \quad (10)$$
- ii. Να κάνετε το αντίστοιχο για τους αριθμούς
- $$\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}. \quad (7)$$

✓ Θέμα 165

Δ

● D14653

Δίνεται η ανίσωση $|x - 1| \leq 3$.

- α) Να λύσετε την παραπάνω ανίσωση. (7)
- β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης. (3)
- γ) Να βρείτε μια ανίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με τη δοσμένη ανίσωση. (8)
- δ) Αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, να αποδείξετε ότι η απόστασή του από τον αριθμό 1 δεν ξεπερνάει το 3. (7)

✓ Θέμα 166

Δ

● D14654

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$. (10)

β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha < \beta$, για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι. (10)

ii. Να αποδείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$. (5)

✓ Θέμα 167

Δ

● D14924

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\pi + 9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi + 9}{3}\right) - 12 > 0$. (9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει

$$(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha \in (-1, 1)$. (8)

✓ Θέμα 168

Δ

● D14963

Δίνεται η εξίσωση $|x - 4| - |x - 2| = 2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης. (8)

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί. (8)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$|x - 4| - |x - 2| = 2,$$

να αποδείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. (9)

✓ Θέμα 169

Δ

● D33587

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$. (9)

β) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(2,999) \cdot f(-1,002)$. (7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$. (9)

✓ Θέμα 170

Δ

● D32682

α) i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$. (4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$. (7)

β) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$. (7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$|x^2 + 9x + 18| = x^2 + 9x + 18. \quad (7)$$

✓ Θέμα 171

Δ

● D33582

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x cm και περίμετρο 40 cm.

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (4)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση

$$E(x) = 20x - x^2, \quad 0 < x < 20. \quad (8)$$

γ) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq 100$ για κάθε $x \in (0, 20)$. (6)

δ) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm. (7)

✓ Θέμα 172

Δ

● D33698

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x)$. (5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (7)γ) Για $3 < \lambda < 12$:

i. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο θετικές και άνισες ρίζες. (6)

ii. Αν x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του τριωνύμου και k, μ είναι δύο αριθμοί με $k < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου

$$kf(k) \cdot \mu f(\mu). \quad (7)$$

✓ Θέμα 173

Δ

● D33711

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 2x - 8$. (10)

β) Αν $k = -\frac{8889}{4444}$, τότε η τιμή της παράστασης

$$A = k^2 - 2k - 8$$

είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (8)

γ) Αν $-4 < \mu < 4$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $B = \mu^2 - 2|\mu| - 8$. (7)

✓ Θέμα 174

Δ

● D33712

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 + \beta x + \beta^2$, με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου. (4)

β) i. Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (7)

ii. Αν $\beta = 0$, πώς αλλάζει η προηγούμενη απάντησή σας; (6)

γ) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα μηδέν, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0. \quad (8)$$

✓ Θέμα 175

Δ

● D33855

α) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες. (6)

ii. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η εξίσωση να έχει μία διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (7)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$. (6)

✓ Θέμα 176

Δ

● D33890

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$. (10)

β) Δίνονται οι αριθμοί k, λ οι οποίοι είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης και ικανοποιούν, επιπλέον, τη σχέση

$$(\lambda - 1)(k - 1) < 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των k και λ . (8)

ii. Να αποδείξετε ότι $|k - \lambda| \geq \frac{3}{2}$. (7)

✓ Θέμα 177

Δ

● D33892

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$. (8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$. (5)

γ) Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α και $\alpha + 1$, όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1.$$

Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. (7)

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. (5)

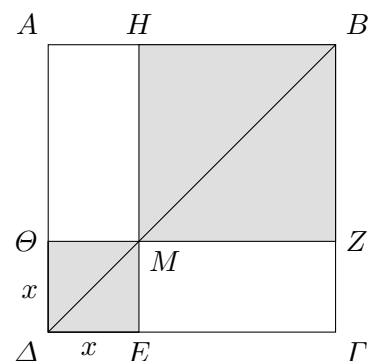
✓ Θέμα 178

Δ

● D34182

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 3 cm και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο $B\Delta$ εσωτερικά, δηλαδή το M δεν ταυτίζεται με τα άκρα της διαγωνίου.

α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\Theta ME\Delta$ συναρτήσει του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το x . (9)



Αν $E(x) = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0, 3)$. (7)

γ) Να βρείτε για ποια θέση του σημείου M το συνολικό εμβαδόν E γίνεται ελάχιστο. (9)

✓ Θέμα 179

Δ

● D34185

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$. (9)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6. \quad (7)$$

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. (9)

✓ Θέμα 180

Δ

● D34186

Οι διαστάσεις x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0,$$

με παράμετρο $\lambda \in (0, 2)$.

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο του ορθογωνίου. (6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$ για κάθε $\lambda \in (0, 2)$. (7)

γ) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι συμπεραίνετε τότε για το ορθογώνιο; (6)

✓ Θέμα 181

Δ

● D34319

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $k \in \mathbb{R}$. (10)

β) Να εξετάσετε αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (5)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο αριθμοί με $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου

$$\alpha f(\alpha) \cdot \beta f(\beta). \quad (10)$$

✓ Θέμα 182

Δ

● D34323

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (10)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει μία ρίζα διπλή. (6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$. (4)

ii. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου και στη συνέχεια να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς

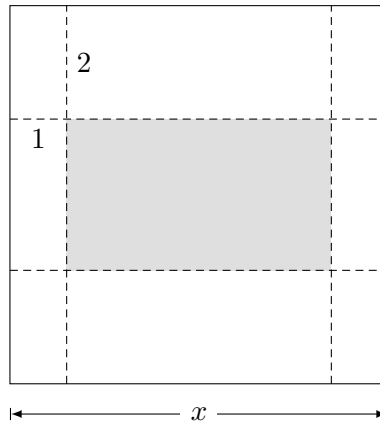
$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1). \quad (5)$$

✓ Θέμα 183

Δ

● D35724

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγουμε τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm, με $5 \leq x \leq 10$, στο οποίο η περιοχή τύπωσης των στοιχείων περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των στοιχείων (σκιασμένη περιοχή) δίνεται από τη σχέση

$$E = (x - 2)(x - 4), \quad 5 \leq x \leq 10. \quad (8)$$

- β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε το εμβαδόν E να είναι 35 cm^2 . (7)

- γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το εμβαδόν E είναι τουλάχιστον 24 cm^2 . (10)

✓ Θέμα 184

Δ

● D36670

Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x + 1| \leq 2 \quad \text{και} \quad x^2 - x - 2 > 0.$$

- α) Να λύσετε τις παραπάνω ανισώσεις. (10)

- β) Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$. (5)

- γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων, να αποδείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$. (10)

✓ Θέμα 185

Δ

● D36678

- α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$. (8)

- β) Δίνεται ο πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}. \quad (10)$$

ii. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$. (7)

✓ Θέμα 186

Δ

● D36658

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο βρίσκεται η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε s) μετά την εκτόξευση δίνεται από τη σχέση

$$y = 60t - 5t^2, t \geq 0.$$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος 175 m; (8)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στο οποίο η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m. (9)

✓ Θέμα 187

Δ

● D36669

Δίνονται οι ανισώσεις

$$1 \leq |x| \leq 3 \quad \text{και} \quad x^2 - 4x < 0.$$

α) Να βρείτε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$. (5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή λύση τους. (10)

5

Πρόοδοι

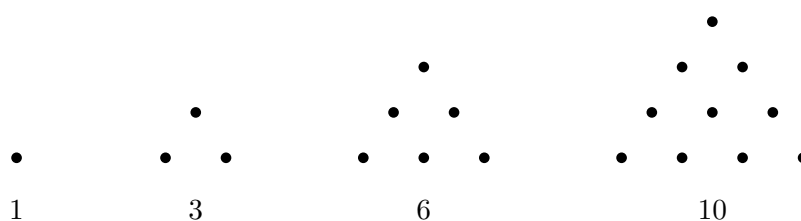
5.1 Ακολουθίες

✓ Θέμα 188

Δ

● D13056

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10 και γενικά όσοι μπορούν να παρασταθούν με τελείες σε τριγωνική διάταξη, όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λέγονται τριγωνικοί.



Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο

$$T_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \nu \in \mathbb{N}^*.$$

α) Να υπολογίσετε τον δέκατο τριγωνικό αριθμό. (6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός. (9)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου. (10)

5.2 Αριθμητική Πρόοδος

✓ Θέμα 189

B

● B13319

Δίνονται οι αριθμοί

$$1 - x, \frac{x}{2}, 2x - 1,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) . (13)

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν η διαφορά της προόδου (α_n) είναι ίση με 5. (12)

✓ Θέμα 190

B

● B14259

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι δύο πρώτοι όροι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (4)

β) Να αποδείξετε ότι ο εικοστός όρος της προόδου ισούται με 97. (12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = 2 + 7 + 12 + \dots + 97. \quad (9)$$

✓ Θέμα 191

B

● B14476

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) των θετικών περιττών αριθμών 1, 3, 5, 7, ...

α) i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά ω της προόδου. (4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό όρο της προόδου. (8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 . (13)

✓ Θέμα 192

B

● B14512

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$. (9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των παραπάνω εξισώσεων σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια:

i. Να αποδείξετε ότι οι λύσεις, με αυτή τη σειρά, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_n) , της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω . (9)

ii. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) . (7)

✓ Θέμα 193

B

● B14573

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (10)

β) Αν το άθροισμα των 3 πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (15)

✓ Θέμα 194

B

● B14574

Ο πρώτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με 2 και ο τρίτος όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (12)

β) Αν $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35. (13)

✓ Θέμα 195

B

● B14597

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει 10 σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει 4 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Να αποδείξετε ότι τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου (α_n) . (8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς. (8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά; (9)

✓ Θέμα 196

B

● B14656

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι όροι $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = -3$. (12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν για τον οποίο ισχύει $\alpha_\nu = \nu$. (13)

✓ Θέμα 197

B

● B34145

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$. (13)

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (12)

✓ Θέμα 198

B

● B34153

Οι αριθμοί

$$x + 6, \quad 5x + 2, \quad 11x - 6$$

είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) με διαφορά ω .

α) Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. (12)

β) Αν $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων της προόδου. (13)

✓ Θέμα 199

B

● B34147

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) , με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (12)

β) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι μηδέν. (13)

✓ Θέμα 200

B

● B34158

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται οι όροι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (12)

β) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (13)

Δίνεται ότι: $\sqrt{1849} = 43$

✓ Θέμα 201

B

● B34871

α) Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ώστε οι αριθμοί

$$x + 2, x + 1, 3x + 2$$

να είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) . (13)

β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου (α_ν) . (12)

✓ Θέμα 202

B

● B34877

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$. (13)

β) Αν x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (12)

✓ Θέμα 203

B

● B35046

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) , με $\alpha_1 = 2$, ισχύει $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (12)

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 52. (13)

✓ Θέμα 204

B

● B35143

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) , με διαφορά ω , δίνονται οι όροι $\alpha_2 = 0$ και $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$. (10)

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = 2\nu - 4$ και στη συνέχεια να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 98. (15)

✓ Θέμα 205

B

● B35299

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) το πλήθος των καθισμάτων της νιοστής σειράς. (9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (8)

✓ Θέμα 206

B

● B35375

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύουν

$$\alpha_1 = 19 \quad \text{και} \quad \alpha_{10} - \alpha_6 = 24.$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (9)

β) Να βρείτε τον εικοστό όρο της προόδου. (8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (8)

✓ Θέμα 207

B

● B35408

Οι αριθμοί

$$A = 1, \quad B = x + 4, \quad \Gamma = x + 8$$

είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) .

α) Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$. (10)

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της προόδου, να βρείτε:

i. τη διαφορά ω της προόδου. (7)

ii. τον εικοστό όρο της προόδου. (8)

✓ Θέμα 208

B

● B36897

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \dots, \nu$. (12)

- β) Να βρείτε πόσους πρώτους θετικούς ακεραίους πρέπει να πάρουμε για να έχουν άθροισμα 45. (13)

✓ Θέμα 209

Γ

● C34746

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς

$$x_1 = \beta - 2 \quad \text{και} \quad x_2 = \beta + 2. \quad (12)$$

- β) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (13)

✓ Θέμα 210

Δ

● D12694

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 s για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 s. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου (α_n) .

- α) i. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (3)
ii. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος; (4)

Δίνεται, επιπλέον, ότι το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 s.

- β) Να βρείτε το πλήθος των επιπέδων του παιχνιδιού. (6)
γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι. (6)
δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 s, το επίπεδο 2 σε 150 s, το επίπεδο 3 σε 153 s και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 s επιπλέον. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι; (6)

✓ Θέμα 211

Δ

● D12764

Σε μια από τις κερκίδες ενός γηπέδου καλαθοσφαίρισης υπάρχουν 40 σειρές καθισμάτων και στη δέκατη σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά, κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

- α) Να αποδείξετε ότι τα καθίσματα κάθε σειράς αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου (α_n) , της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά ω . (9)
β) Να βρείτε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα. (9)

- γ) Αν σε έναν αγώνα, για λόγους ασφαλείας, επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθημένους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα. (7)

✓ Θέμα 212

Δ

● D12945

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) , με διαφορά ω , δίνονται οι όροι $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$. Έστω, επιπλέον, η αριθμητική πρόοδος (β_ν) των περιττών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 56.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. (7)
- β) Να εξετάσετε αν ο όρος β_2 της προόδου (β_ν) είναι και όρος της προόδου (α_ν) . (8)
- γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της προόδου (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της προόδου (β_ν) , να βρείτε τον αριθμό $\nu \in \mathbb{N}^*$. (10)

✓ Θέμα 213

Δ

● D13089

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο, το οποίο το διάβασε δύο φορές γιατί της άρεσε πολύ. Την πρώτη φορά, διάβασε την πρώτη ημέρα 1 σελίδα, τη δεύτερη ημέρα 2 σελίδες, την τρίτη ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τον τρόπο διαβάσματος. Την πρώτη ημέρα διάβασε 13 σελίδες, τη δεύτερη ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δύο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

- α) i. Να αποδείξετε ότι οι σελίδες του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) , της οποίας να βρείτε τον νιοστό όρο α_ν . (4)
- ii. Να αποδείξετε ότι οι σελίδες του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου (β_ν) , της οποίας να βρείτε τον νιοστό όρο β_ν . (4)
- β) Να αποδείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. (7)
- γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. (5)
- δ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, \dots, 7$. (5)

✓ Θέμα 214

Δ

● D13171

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu, \nu \in \mathbb{N}^*.$$

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο της ακολουθίας. (5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1$, $\nu \geq 2$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος της ακολουθίας είναι $a_\nu = 4\nu + 1$. (7)

δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω . (7)

✓ Θέμα 215

Δ

● D13173

Δίνεται η ακολουθία (a_ν) με νιοστό όρο $a_\nu = 10 + 3\nu$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος. (6)

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο και την διαφορά ω της προόδου. (3)

β) Να βρείτε ποιοι και πόσοι όροι της προόδου βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 41 και 401. (8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων της προόδου που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 41 και 401. (8)

✓ Θέμα 216

Δ

● D14758

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια, κάθε μήνα κατασκευάζονται 13 οχήματα περισσότερα από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα κατασκευάζονται κάθε μήνα κατά το πρώτο εξαμήνο. (6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου (a_ν) . (6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάζονται συνολικά τα 4 πρώτα χρόνια; (6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα κατασκευαστεί το 250^ο όχημα; (7)

✓ Θέμα 217

Δ

● D14927

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 €, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11.910 €. Επιπλέον, ο ενδιαφερόμενος πρέπει να πληρώσει ένα πάγιο ποσό για τη δέσμευση του χώρου, ακόμη και αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (a_ν) .

α) Να αποδείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $a_\nu = 107\nu + 1210$. (9)

β) Να ερμηνεύσετε, στο πλαίσιο του προβλήματος, τη σημασία:

- i. του αριθμού 1210. (5)
- ii. της διαφοράς ω της προόδου. (5)
- γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους. (6)

✓ Θέμα 218

Δ

● D14809

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ κ.ο.κ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓ...

- α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις στις οποίες συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. (6)
- β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για εικοστή τρίτη φορά το γράμμα Β. (10)
- γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση της διαδοχής. (9)

✓ Θέμα 219

Δ

● D14962

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά $\omega = 3$, της οποίας ακριβώς τρεις διαδοχικοί όροι ανήκουν στο διάστημα $\Delta = [2, 8]$.

- α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 0 είναι όρος της προόδου. (6)
- β) Να βρείτε τους τρεις διαδοχικούς όρους της (α_n) που ανήκουν στο διάστημα Δ . (7)
- γ) Αν $\alpha_6 = 14$, να βρείτε:
- i. τον πρώτο όρο της προόδου. (6)
- ii. το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της προόδου που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά τους να είναι μεγαλύτερο από 186. (6)

Δίνεται ότι: $\sqrt{4489} = 67$

✓ Θέμα 220

Δ

● D32741

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, ρωτάει τον γυμναστή του σχολείου, ο οποίος της απαντά με το εξής πρόβλημα: «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές ανά σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x - 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

- α) Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$. (6)
- β) Να αποδείξετε ότι η Α' τάξη έχει 90 μαθητές. (6)
- γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας ως εξής: η πρώτη ομάδα θα έχει 2 μαθητές και κάθε επόμενη ομάδα θα έχει 2 μαθητές περισσότερους από την προηγούμενη. Να βρείτε την τιμή του ν , δηλαδή σε πόσες ομάδες θα χωριστούν οι μαθητές. (13)

✓ Θέμα 221



● D33579

Οι αριθμοί

$$A = x^2 + 5, \quad B = x^2 + x, \quad \Gamma = 2x + 4$$

είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) .

- α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$. (6)
- β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός A είναι ο τέταρτος όρος της προόδου, τότε:
- Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (5)
 - Να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (6)
 - Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24}. \quad (8)$$

✓ Θέμα 222



● D33581

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται οι όροι $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_8 = 23$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά ω της προόδου. (9)
- Αν $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$, τότε:
- β) Να βρείτε τον τριακοστό πρώτο όρο της προόδου. (6)
- γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31). \quad (10)$$

✓ Θέμα 223



● D33583

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) , με διαφορά ω , δίνονται οι όροι $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 3$. (8)
- β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x, y της (α_n) τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}. \quad (9)$$

✓ Θέμα 224

Δ

● D33858

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι όροι

$$\alpha_2 = k^2 \quad \text{και} \quad \alpha_3 = (k+1)^2,$$

όπου k ακέραιος με $k > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός. (8)

β) Αν $\alpha_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του k και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. (8)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου. (9)

✓ Θέμα 225

Δ

● D36650

Σύμφωνα με τον ιδιοκτήτη ενός ταξιδιωτικού γραφείου, όταν τα εισιτήρια μιας συγκεκριμένης διαδρομής κοστίζουν 21 € το καθένα, τότε πωλούνται κατά μέσο όρο 30 εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3 € και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5 € περισσότερα από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (4)

β) Αν ο αριθμός α_n εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο νιοστός επιβάτης, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{51}$ αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. (6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο πενήντοστός πρώτος επιβάτης. (7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια πρέπει να πωληθούν, ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά της είσπραξη που θα έκανε αν πωλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € το καθένα. (8)

Δίνεται ότι: $\sqrt{10 \cdot 201} = 101$

✓ Θέμα 226

Δ

● D36653

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι όροι

$$\alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4, \quad \alpha_3 = x^2 - 2,$$

όπου x ακέραιος αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$. (10)

β) Να βρείτε τον νιοστό όρο a_n της προόδου και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με 2014. (8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}. \quad (7)$$

✓ Θέμα 227

Δ

● D36660

Ένας μελισσοκόμος τοποθέτησε 20 κυψέλες σε μια ευθεία που περνά από την αποθήκη του. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 m από την αποθήκη, η δεύτερη 4 m από την αποθήκη, η τρίτη 7 m και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη 3 m περισσότερο από την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου (a_n) , της οποίας να βρείτε τον νιοστό όρο a_n . Τι εκφράζει ο πρώτος όρος και τι η διαφορά της προόδου; (6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη βρίσκεται η εικοστή κυψέλη; (6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινά από την αποθήκη, συλλέγει κάθε φορά το μέλι από μία κυψέλη και το μεταφέρει πίσω στην αποθήκη.

i. Να υπολογίσετε την απόσταση που διανύει ο μελισσοκόμος για να μεταφέρει στην αποθήκη του το μέλι από τις τρεις πρώτες κυψέλες. (6)

ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που διανύει ο μελισσοκόμος για να μεταφέρει στην αποθήκη του το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (7)

✓ Θέμα 228

Δ

● D36662

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά έχει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (10)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου. (5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου, προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα του σταδίου από την έβδομη έως και την δέκατη τέταρτη σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (10)

✓ Θέμα 229

Δ

● D36674

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15 και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου (a_n) , της οποίας να βρείτε τον νιοστό όρο a_n . (4)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (7)

γ) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι όρος της προόδου. (7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που σταμάτησε ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να υπολογίσετε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (7)

✓ Θέμα 230

Δ

● D37204

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό. Η πρώτη σειρά έχει 16 καθίσματα και η έβδομη σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να αποδείξετε ότι τα καθίσματα κάθε σειράς αποτελούν όρους αριθμητική προόδου (a_n) , της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά ω . (5)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο a_n της προόδου. (4)

γ) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η αίθουσα του θεάτρου. (5)

δ) Αν στην πρώτη σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη δεύτερη σειρά 9 κενά καθίσματα, στην τρίτη σειρά 12 κενά και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και μετά θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (5)

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές αυτής της αίθουσας. (6)

5.3 Γεωμετρική Πρόοδος

✓ Θέμα 231

B

● B12763

Δίνεται η ακολουθία (a_n) με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος. (12)

- β) Να αποδείξετε ότι η (α_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον νιοστό της όρο α_n . (13)

✓ Θέμα 232

B

● B12787

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$. (10)

- β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο k , ώστε οι αριθμοί

$$k - 1, k, 2k + 3$$

να είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (15)

✓ Θέμα 233

B

● B14920

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_n) , με λόγο $\lambda > 0$ και $\alpha_1 = 4$, ισχύει $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (9)

- β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου. (8)

- γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου. (8)

✓ Θέμα 234

B

● B34156

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (10)

- β) Αν το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 200, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (15)

✓ Θέμα 235

B

● B34874

- α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$. (13)

- β) Αν x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (12)

✓ Θέμα 236

B

● B35042

Οι αριθμοί

$$A = x + 4, B = 2 - x, \Gamma = 6 - x$$

είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) .

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$. (13)

β) Αν $x = 5$ και ο αριθμός Γ είναι ο τέταρτος όρος της προόδου, να βρείτε:

i. τον λόγο λ της προόδου. (6)

ii. τον πρώτο όρο της προόδου. (6)

✓ Θέμα 237

B

● B35205

α) Να βρείτε τον παραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί

$$x, 2x + 1, 5x + 4$$

να είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρική προόδου (α_n) . (13)

β) Να βρείτε τον λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου (α_n) , όταν:

i. $x = 1$. (6)

ii. $x = -1$. (6)

✓ Θέμα 238

B

● B36891

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_n) , με λόγο $\lambda > 0$, δίνονται οι όροι $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο λ της προόδου. (13)

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος της προόδου είναι $\alpha_n = 2^{n-3}$. (12)

✓ Θέμα 239

Γ

● C35037

Οι αριθμοί

$$k - 2, 2k, 7k + 4,$$

με $k \in \mathbb{N}$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $k = 4$ και να βρείτε τον λόγο λ της προόδου. (12)

β) i. Να εκφράσετε τον δεύτερο, πέμπτο και τέταρτο όρο της προόδου συναρτήσει του α_1 . (6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$. (7)

✓ Θέμα 240

Γ

● C35411

α) Αν οι αριθμοί $4 - x, x, 2$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x . (9)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x . (9)

γ) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι και αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x . (7)

✓ Θέμα 241

Δ

● D12731

Δίνονται οι αριθμοί

$$\frac{k}{\lambda}, k, k\lambda,$$

όπου $k \neq 0$, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (a_n) . (8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των παραπάνω αριθμών είναι πάντα διάφορο του μηδενός. (10)

γ) Αν $k > 0$ και οι αριθμοί $\frac{k}{\lambda}$ και $k\lambda$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 + 10x + 16 = 0,$$

να βρείτε τους αριθμούς $\frac{k}{\lambda}$, k , $k\lambda$. (7)

✓ Θέμα 242

Δ

● D12998

Οι αριθμοί

$$\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$$

είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (a_n) .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι παραπάνω αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$. (5)

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε τον νιοστό όρο a_n της προόδου. (7)

γ) Αν $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με

$$\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}. \quad (8)$$

✓ Θέμα 243

Δ

● D14375

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \mu x - 2$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. (6)

β) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες οι αριθμοί -2 και 3 βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ και ο αριθμός 1 βρίσκεται εντός αυτού του διαστήματος. (6)

γ) Αν, επιπλέον, οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) , τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ . (7)

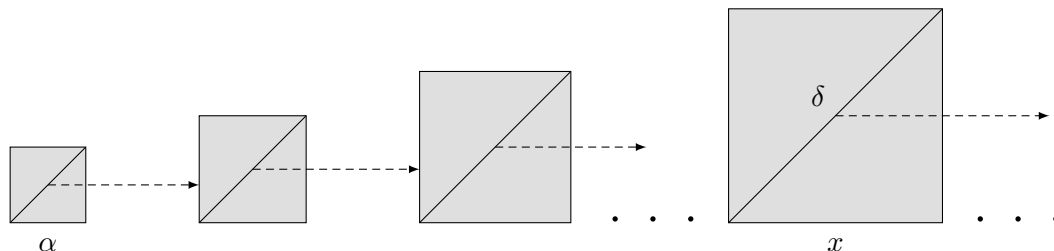
ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$, να βρείτε τον λόγο λ της προόδου. (6)

✓ Θέμα 244

Δ

● D14645

Ένας μαθητής ξεκινά από ένα τετράγωνο πλευράς α και σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα, παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου τη διαγώνιο του προηγούμενου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$. (4)

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = \alpha^2 \cdot 2^{n-1}$. (7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 m^2 , να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου. (8)

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 m^2 . (6)

✓ Θέμα 245

Δ

● D33891

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_n) , με λόγο $\lambda > 0$, δίνονται οι όροι $\alpha_3 = 4$ και $\alpha_5 = 16$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο λ της προόδου. (8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με γενικό όρο $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της προόδου (α_ν) . (9)

γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου (α_ν) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου (β_ν) , να αποδείξετε ότι

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} \cdot S_{10}. \quad (8)$$

✓ Θέμα 246

Δ

● D34180

α) Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ώστε οι αριθμοί 2, x , 8 να είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (5)

β) Να βρείτε τον αριθμό $x \in \mathbb{R}$, ώστε οι αριθμοί 2, x , 8 να είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (7)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_ν) η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ..., τότε:

i. Να υπολογίσετε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της προόδου (α_ν) . (5)

ii. Να βρείτε την τιμή του ν , ώστε για το άθροισμα S_ν του προηγούμενου υποερωτήματος να ισχύει

$$2(S_\nu + 24) = \beta_7. \quad (8)$$

✓ Θέμα 247

Δ

● D34181

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α, β και εμβαδόν E . Οι αριθμοί α, β, E είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (10)

β) Αν $E = 1$ και $\alpha + \beta = 10$, τότε:

i. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β . (5)

ii. Να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου. (10)

✓ Θέμα 248

Δ

● D36649

Σε έναν οργανισμό αρχικά υπάρχουν 204.800 βακτήρια. Μετά την πρώτη ώρα υπάρχουν 102.400 βακτήρια, μετά τη δεύτερη ώρα υπάρχουν 51.200 και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε ώρα.

α) Να βρείτε πόσα βακτήρια υπάρχουν στον οργανισμό μετά από 6 ώρες. (6)

β) Τη χρονική στιγμή που τα βακτήρια είναι 3200, ο οργανισμός παρουσιάζει ξαφνική επιδείνωση, με αποτέλεσμα ο αριθμός τους να τριπλασιάζεται κάθε ώρα. Το φαινόμενο αυτό διαρκεί 5 ώρες. Αν β_ν είναι το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά τη στιγμή της επιδείνωσης, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο λ . (6)
- ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν . (6)
- iii. Να βρείτε πόσα βακτήρια υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά τη στιγμή της επιδείνωσης. (7)

✓ Θέμα 249



● D36677

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο προγράμματα που της προτείνονται. Στο πρόγραμμα Α καταθέτει τον πρώτο μήνα 1 €, τον δεύτερο μήνα 2 €, τον τρίτο 4 € και γενικά κάθε μήνα καταθέτει ποσό διπλάσιο από εκείνο του προηγούμενου μήνα. Στο πρόγραμμα Β καταθέτει τον πρώτο μήνα 100 €, τον δεύτερο μήνα 110 €, τον τρίτο 120 € και γενικά κάθε μήνα καταθέτει ποσό κατά 10 € μεγαλύτερο από εκείνο του προηγούμενου μήνα.

α) Να βρείτε:

- i. το ποσό α_ν που καταθέτει τον νιοστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (4)
 - ii. το ποσό β_ν που καταθέτει τον νιοστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (4)
 - iii. το ποσό A_ν που θα συγκεντρωθεί στον λογαριασμό μετά από ν μήνες στο πρόγραμμα Α. (5)
 - iv. το ποσό B_ν που θα συγκεντρωθεί στον λογαριασμό μετά από ν μήνες στο πρόγραμμα Β. (5)
- β) i. Τι ποσό θα συγκεντρωθεί στον λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (3)
- ii. Αν κάθε πρόγραμμα διαρκεί 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί είναι μεγαλύτερο; (4)

✓ Θέμα 250



● D37205

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο, το οποίο στο τέλος της πρώτης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (mi^2), στο τέλος της δεύτερης ημέρας 6 mi^2 , στο τέλος της τρίτης ημέρας 12 mi^2 και γενικά στο τέλος κάθε ημέρας καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από εκείνη της προηγούμενης ημέρας.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της πέμπτης ημέρας μετά το ατύχημα. (7)

- β) Πόσες ημέρες μετά το ατύχημα το πετρέλαιο θα καλύπτει επιφάνεια 768 mi^2 ; (9)
- γ) Στο τέλος της ένατης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και σταματά η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 mi^2 και στη συνέχεια μειώνεται κατά 6 mi^2 την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά το ατύχημα η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί σε 12 mi^2 . (9)

6

Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συναρτήσης

✓ Θέμα 251

B

● B12765

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (13)

β) Να βρείτε τις τιμές της f για όποιους από τους αριθμούς

$$-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$$

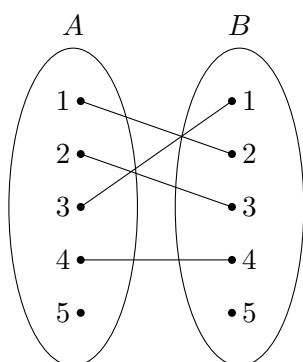
είναι αυτό δυνατό. (12)

✓ Θέμα 252

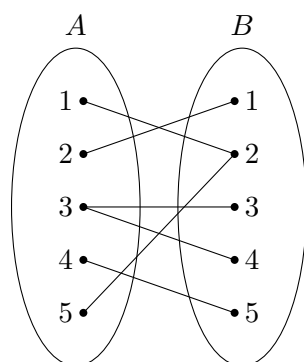
B

● B12908

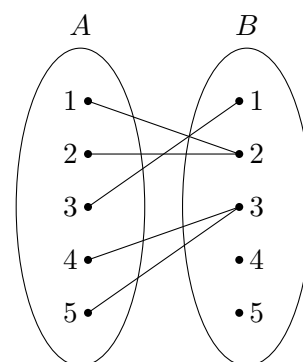
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τρεις αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B , ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B . (9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f , τότε:

- i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της f . (4)
- ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της f . (4)
- iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$. (8)

✓ Θέμα 253

B

● B12997

Έστω ότι έχουμε τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' Λυκείου. Σχηματίζουμε το σύνολο A που περιέχει τα μικρά ονόματα των μαθητών του τμήματος και το σύνολο B που περιέχει τα επώνυμα των ίδιων μαθητών. Επίσης, ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$, όπου κάθε μικρό όνομα μαθητή αντιστοιχίζεται στο επώνυμό του, και την αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$, όπου κάθε επώνυμο μαθητή αντιστοιχίζεται στο μικρό του όνομα.

- α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B . (10)
- β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να αναφέρετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή. (15)

✓ Θέμα 254

B

● B13026

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$. (10)
- β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) = 4x - 1$. (15)

✓ Θέμα 255

B

● B13032

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - 3x \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x + 5}.$$

- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των f και g . (8)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(-1) = g(11)$. (8)
- γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε να ισχύει $f(x) = g(4)$. (9)

✓ Θέμα 256

B

● B13031

Δίνεται η συνάρτηση $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x = 2$, $x = 0$ και $x = -\frac{1}{2}$. (9)
- β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η G . (7)
- γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται μέσω της G στο 3. (9)

✓ Θέμα 257

B

● B14681

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$. (12)
- β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 8$. (13)

✓ Θέμα 258

B

● B14728

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(1)$. (12)
- β) Για $x \geq 0$, να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 2$. (13)

✓ Θέμα 259

B

● B14781

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \mapsto y$, με το x να παίρνει μόνο τις τιμές που φαίνονται στον πίνακα.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

- α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η αντιστοίχιση $x \mapsto y$ είναι συνάρτηση. (6)
- ii. Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $y \mapsto x$ είναι συνάρτηση. (7)
- β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \mapsto y$. (12)

✓ Θέμα 260

B

● B34446

Η απόσταση y (σε km) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση

$$y = 35 + 0,8x.$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; (12)

β) Μετά από πόσα λεπτά το αυτοκίνητο θα απέχει 75 km από την πόλη Α; (13)

✓ Θέμα 261

B

● B35298

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & \text{αν } x < 0 \\ x - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) = f(3)$. (13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $f(x) = 0$. (12)

✓ Θέμα 262

B

● B35405

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (15)

β) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$. (10)

✓ Θέμα 263

B

● B37175

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-5) = f(4)$. (13)

β) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $f(x) = 9$. (12)

✓ Θέμα 264

B

● B37185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f και να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x^2 + 4x \text{ για κάθε } x \in A. \quad (15)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$. (10)

✓ Θέμα 265

B

● B37189

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$. (10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$. (15)

✓ Θέμα 266

B

● B37202

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$. (12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (5)

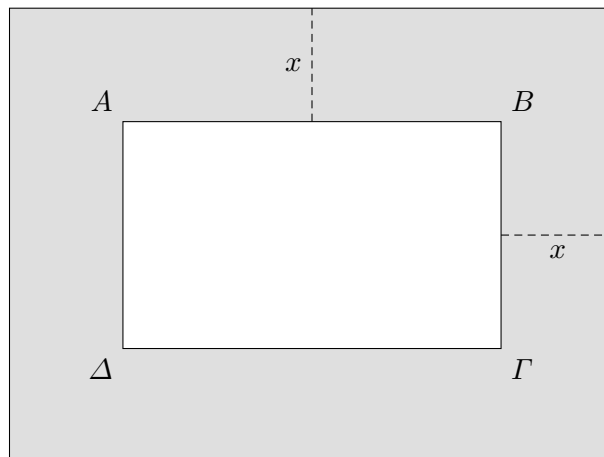
ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x-3}$ για κάθε $x \in A$. (8)

✓ Θέμα 267

Δ

● D12911

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις 15 m και 25 m. Για λόγους ασφαλείας, ο δήμος προτίθεται να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη (σκιασμένη περιοχή) σταθερού πλάτους x m, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ της ζώνης δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = 4x^2 + 80x, x > 0. \quad (9)$$

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν $E = 500 \text{ m}^2$. (7)

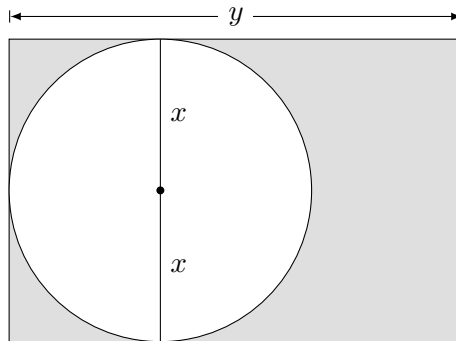
γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (9)

✓ Θέμα 268



● D14122

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Στο εσωτερικό του υπάρχει κύκλος ακτίνας x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



- α) i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι

$$y = 5 - 2x, x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (5)$$

- ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E_{\text{ορθ}}$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (5)$$

- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E της σκιασμένης περιοχής, δηλαδή του μέρους του ορθογωνίου εκτός του κύκλου, δίνεται από τη σχέση

$$E = 10x - (\pi + 4)x^2, x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (6)$$

- γ) Αν το εμβαδόν E του προηγούμενου ερωτήματος είναι ίσο με $(6 - \pi)$ cm² και ο αριθμός x είναι ρητός, να βρείτε:

- i. την ακτίνα x του κύκλου. (6)
 ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου. (3)

✓ Θέμα 269



● D14629

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων τύπου «Σωστό – Λάθος» σε ένα πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα, ενώ κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας, δηλαδή αφαιρείται 1 μονάδα για κάθε τρεις λανθασμένες απαντήσεις.

- α) Αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, να αποδείξετε ότι η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = \frac{4}{3}(x - 25), 0 \leq x \leq 100. \quad (7)$$

- β) Αν ένας φοιτητής βαθμολογηθεί με 88, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα. (4)
- γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 90. Επίσης, να βρείτε πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι οι 50 μονάδες. (8)
- δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δύο φοιτητών είναι 140. Πόσες είναι οι λανθασμένες απαντήσεις και των δύο μαζί; (6)

✓ Θέμα 270

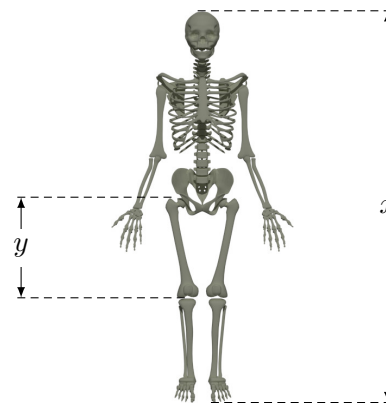


● D32753

Για την εκτίμηση του ύψους ενός ενήλικα, οι ανθρωπολόγοι χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις, οι οποίες περιγράφουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) του μηριαίου οστού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα, ανάλογα με το φύλο του.

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$



- α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (8)
- β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άνδρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άνδρα. Είναι πιθανό το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (8)
- γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (9)

✓ Θέμα 271



● D14655

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2), x \in (0, 10). \quad (8)$$

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$. (7)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. (6)

γ) Αν $x = 5$, τι συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου $ABΓ$ ως προς τις πλευρές; (4)

✓ Θέμα 272

Δ

● D14702

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις x m και $(2x - 1)$ m.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας του πάρκου ως συναρτήσεις του x . (8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περιφέρεια του πάρκου να μην ξεπερνά τα 8 m. (7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας να είναι το πολύ 1 m^2 . (10)

✓ Θέμα 273

Δ

● D34184

Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $ABΓ$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$. (9)

Αν $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, $x \in (0, 10)$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$. (9)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $ABΓ$; (7)

✓ Θέμα 274

Δ

● D34317

Το ποσό (σε €) που πληρώνει ένας κάτοικος μιας πόλης A , όταν καταναλώνει x κυβικά μέτρα (m^3) νερού σε έναν χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 12, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει κάποιος κάτοικος, αν:

i. λείπει από το σπίτι του και δεν καταναλώσει καθόλου νερό. (2)

ii. καταναλώσει 10 m^3 νερού. (3)

iii. καταναλώσει 50 m^3 νερού. (5)

β) Σε μια άλλη πόλη B, το ποσό (σε €) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση $x \text{ m}^3$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$g(x) = 12 + 0,6x, x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στον λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατοίκους κατανάλωσε περισσότερα από 60 m^3 νερού. (15)

✓ Θέμα 275

Δ

● D36654

Δύο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους επάγγελμα. Επειδή τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια, ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα διαθέτουν διαδικτυακά. Κατά τη διάρκεια ενός μήνα, τα έξοδα κατασκευής (σε €) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$, ενώ τα έσοδα από την πώλησή τους (σε €) δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση σε κάποιον μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, θα έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν, ώστε τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα, δηλαδή να μην έχει ζημία η επιχείρηση. (6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια, θα έχουν κέρδος εκείνον τον μήνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (9)

✓ Θέμα 276

Δ

● D36668

Για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιούνται οι κλίμακες Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές από την κλίμακα Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν περιγράφονται από τις παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 1: Για να μετατρέψουμε τους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με το 1,8 και προσθέτουμε το 32.

Πρόταση 2: Για να μετατρέψουμε τους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε Κέλβιν (K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (8)

β) Να αποδείξετε ότι η σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε Κέλβιν (K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (F) περιγράφεται από την εξίσωση

$$K = \frac{F - 32}{1,8} + 273. \quad (7)$$

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας, η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 K μέχρι 283 K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$. (10)

✓ Θέμα 277

Δ

● D36679

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x| - 2$ για κάθε $x \in A$. (9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$. (10)

✓ Θέμα 278

Δ

● D36680

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5, x \in \mathbb{R},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α . (7)

β) Για $\alpha = 1$:

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. (8)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq g(x)$. (5)

iii. Να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$. (5)

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

✓ Θέμα 279

B

● B12680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1, -2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (8)

✓ Θέμα 280

B

● B12686

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (9)

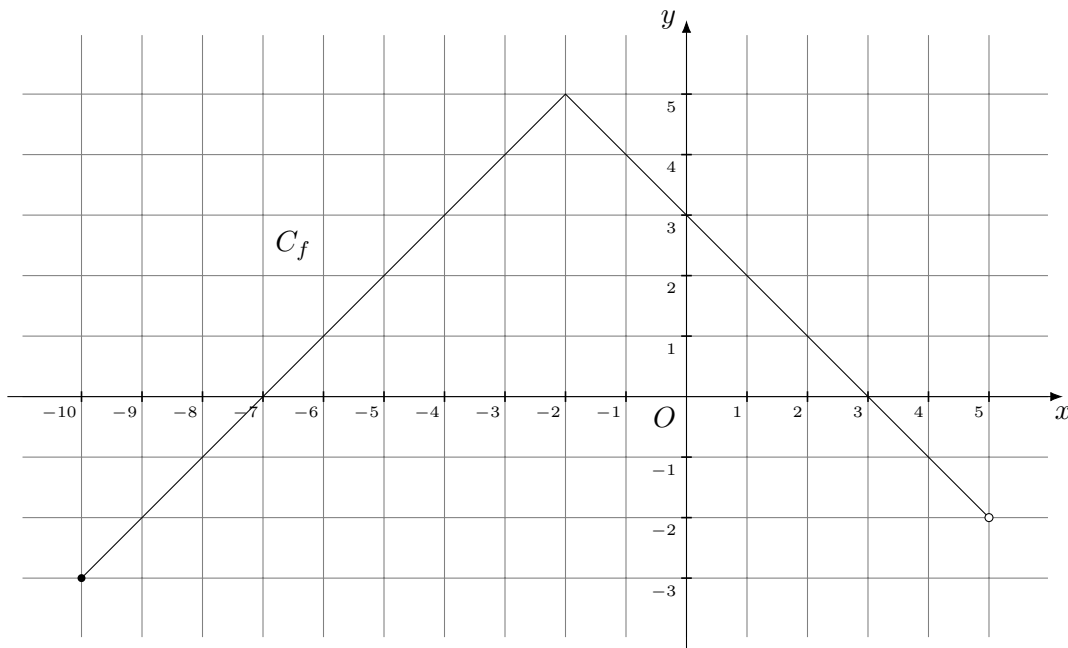
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' και y' . (8)

✓ Θέμα 281

B

● B12910

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών $f(A)$ της f . (8)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$ και $f(3)$. (6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$. (4)

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) < 0$. (7)

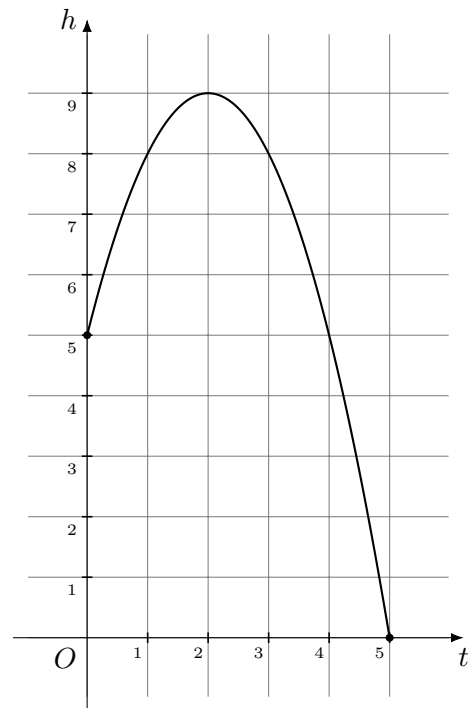
✓ Θέμα 282

B

● B12729

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η απόσταση h (σε m) του σώματος από το έδαφος σε σχέση με τον χρόνο t (σε s). Με βάση το διάγραμμα, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα με αιτιολόγηση.

- α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή; (6)
- β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό; (6)
- γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 m από το έδαφος. (7)
- δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα συναντά το έδαφος. (6)



✓ Θέμα 283

B

● B13322

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x - 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g . (8)
- β) Να βρείτε, εφόσον ορίζονται, τις τιμές της g για $x = 1$, $x = -2$ και $x = 2$. (9)
- γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$. (8)

✓ Θέμα 284

B

● B14072

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (8)
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (8)
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (9)

✓ Θέμα 285

B

● B14596

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$, $x \neq -1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$. (13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$. (12)

✓ Θέμα 286

B

● B14603

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & \text{αν } x \leq 3 \\ x^2, & \text{αν } 3 < x < 10 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (6)

β) Να εξετάσετε αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (10)

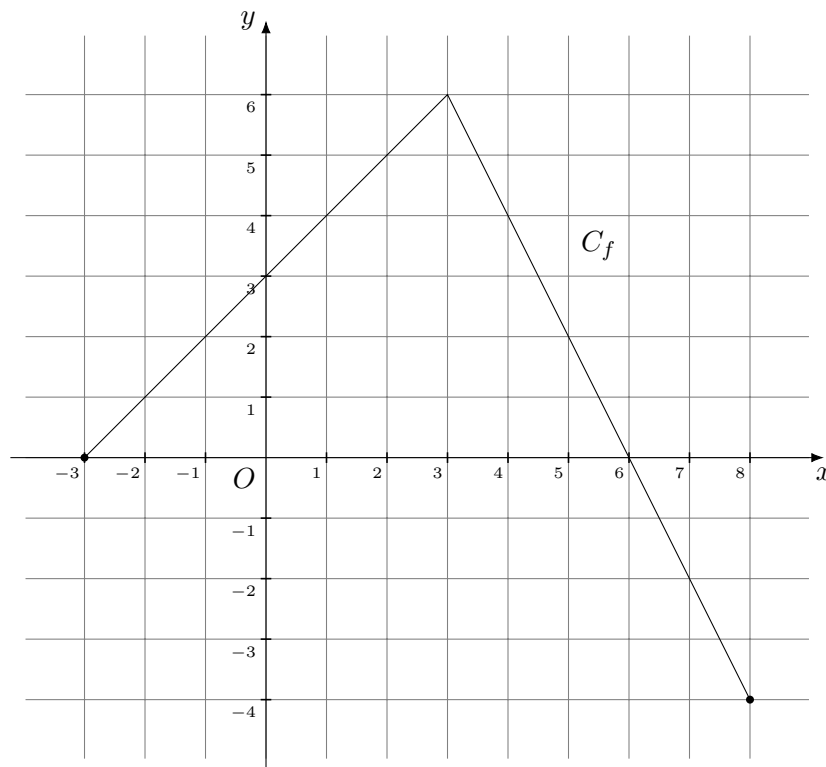
γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y/y . (9)

✓ Θέμα 287

B

● B35034

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f . (6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών. (6)

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η f παίρνει θετικές τιμές. (7)

✓ Θέμα 288

B

● B34159

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f . (9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (9)

✓ Θέμα 289

B

● B35201

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$ και $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β . (13)

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (12)

✓ Θέμα 290

B

● B35413

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (12)

✓ Θέμα 291

B

● B36885

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (5)

β) i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$. (6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$. (6)

- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (8)

✓ Θέμα 292

B

● B15000

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

- α) Να βρείτε τις τιμές της f για

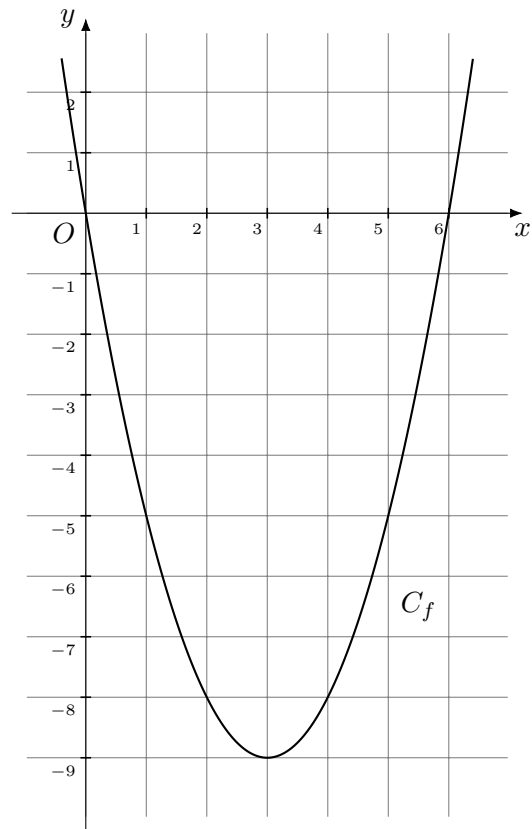
$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 3 \quad \text{και} \quad x = 5. \quad (8)$$

- β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση

$$f(x) = 0. \quad (6)$$

- γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$$f(x) < 0. \quad (11)$$



✓ Θέμα 293

B

● B36889

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 14$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$. (10)

- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (15)

✓ Θέμα 294

Γ

● C14604

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & \text{αν } x \leq 3 \\ x^2, & \text{αν } 3 < x < 10 \end{cases}$.

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f σε μορφή διαστήματος. (6)

- β) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (6)

- γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (6)

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$. (7)

✓ Θέμα 295

Γ

● C14752

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (10)

✓ Θέμα 296

Γ

● C14754

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (4)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$. (6)

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 6x$, $x \in \mathbb{R}$. (8)

✓ Θέμα 297

Γ

● C37190

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$. (13)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{3}{x}, x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - x + 3, x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $M(1, 3)$. (12)

✓ Θέμα 298

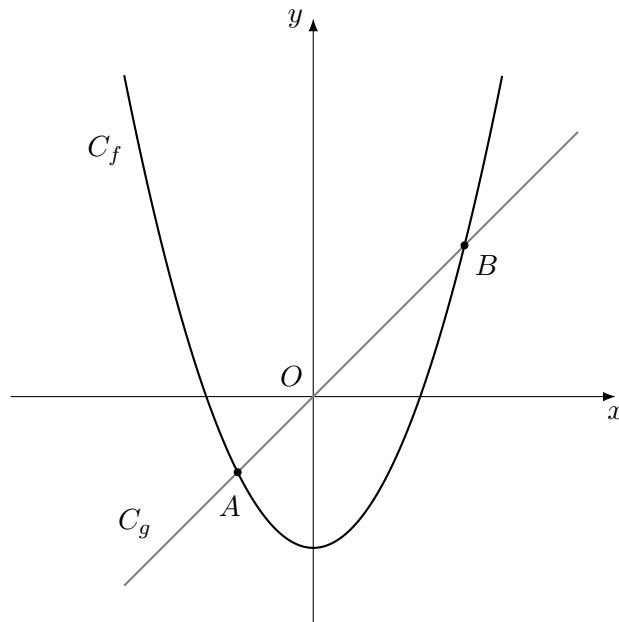
Γ

● C14673

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x, x \in \mathbb{R},$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία A και B , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι $A(-1, -1)$ και $B(2, 2)$. (9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$. (8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$. (8)

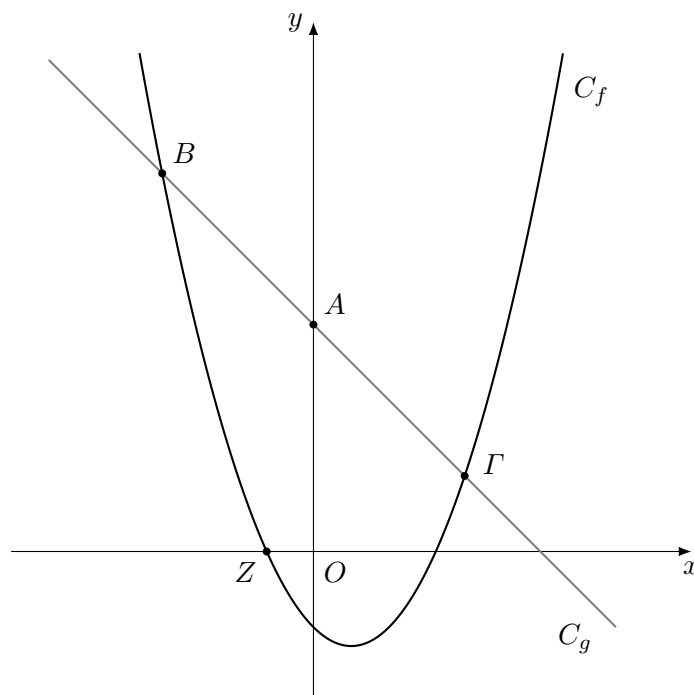
✓ Θέμα 299

Δ

● D12628

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 - x - 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 3 - x, x \in \mathbb{R},$$



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z . (10)
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (6)
- γ) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1. (9)

✓ Θέμα 300

Δ

● D12941

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9 - x^2}{3 - |x|}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (6)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$ για κάθε $x \in A$. (5)
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (6)
- δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 3 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. (8)

✓ Θέμα 301

Δ

● D13030

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \quad \text{και} \quad g(x) = |x + 3|.$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f και g . (10)
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g . (7)
- γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (8)

✓ Θέμα 302

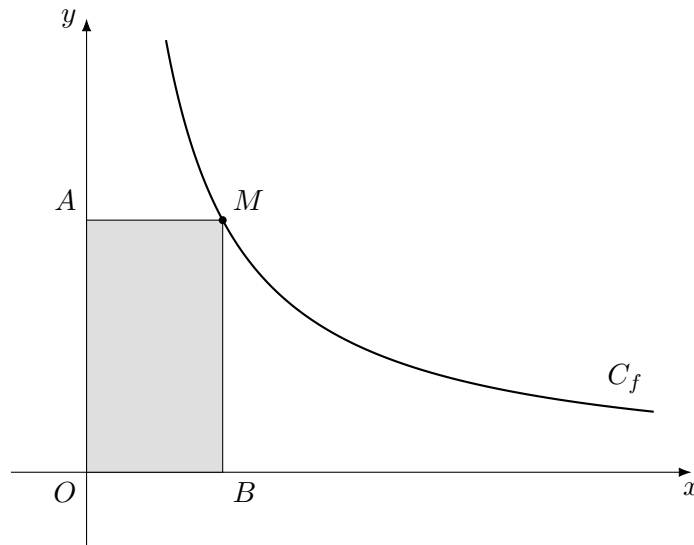
Δ

● D13090

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{16}{x}, \quad x > 0$$

και ένα σημείο $M(x, y)$ που κινείται στη γραφική παράσταση της f , με τα σημεία A, B να είναι οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να αποδείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16, ενώ η περιμετρός τους δίνεται από τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}, x > 0. \quad (8)$$

- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M , ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20. (7)

- γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f για το οποίο το ορθογώνιο $OAM'B$ είναι τετράγωνο, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι το σημείο M' έχει τετμημένη 4. (4)
- ii. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι

$$\Pi(x) \geq \Pi(4) \text{ για κάθε } x > 0. \quad (6)$$

✓ Θέμα 303

Δ

● D13120

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (8)
- β) Για $\lambda \neq 0$, να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. (5)
- γ) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4, 4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (7)
- δ) Για $\lambda = -1$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (5)

✓ Θέμα 304

Δ

● D13313

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (6)
- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (6)
- γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$. (6)
- δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A . (7)

✓ Θέμα 305

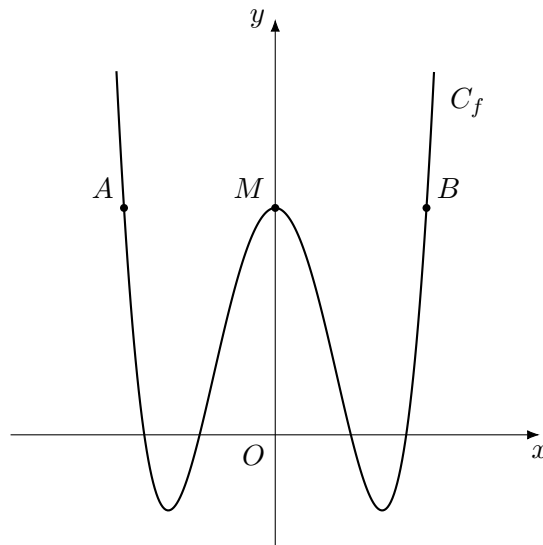
Δ

● D13454

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma, x \in \mathbb{R},$$

με $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $M(0, 3)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 3$. (6)
- β) Αν τα σημεία $A(\alpha^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3\alpha, 3)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f , να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f . (7)
- γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (6)
- δ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$. (6)

✓ Θέμα 306

Δ

● D13479

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|,$$

με $|x| \leq 4$.

α) Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς απόλυτες τιμές. (9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$, να βρείτε:

- i. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (8)
- ii. την ακέραια τιμή του μ για την οποία το σημείο $M(\mu+1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (8)

✓ Θέμα 307

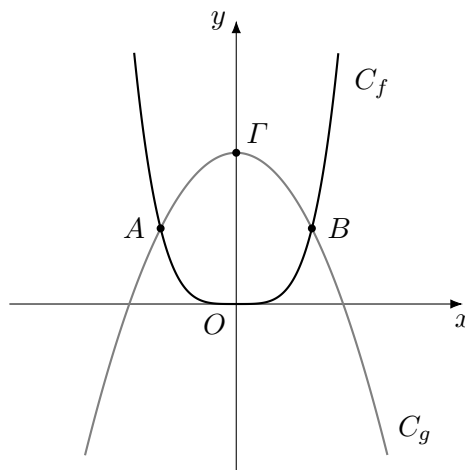
Δ

● D14307

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^4 \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x^2.$$

Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των C_f, C_g , ενώ το σημείο Γ είναι το σημείο τομής της C_g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ . (9)

Αν $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(0, 2)$, τότε:

β) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (6)

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα. (10)

✓ Θέμα 308

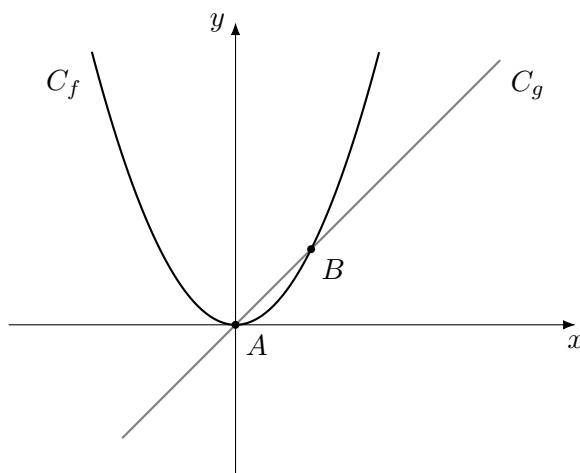
Δ

● D13557

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x, x \in \mathbb{R},$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία A και B , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B . (7)

β) Αν $A(0,0)$ και $B(1,1)$, τότε:

i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (5)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα. (7)

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}.$$

Να αποδείξετε ότι $|\alpha| < |\beta|$. (6)

✓ Θέμα 309

Δ

● D14190

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη. (8)

γ) Έστω M ένα μεταβλητό σημείο της γραφικής παράστασης της f , με τετμημένη $\beta > 0$. Από το σημείο M φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες και έστω A και Δ τα σημεία τομής των ευθειών με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ ισούται με $[\sqrt{2}(\beta+1)]^2$, όπου O η αρχή των αξόνων. (9)

✓ Θέμα 310

Δ

● D14744

α) Να αποδείξετε ότι

$$x - x^2 \leq \frac{1}{4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

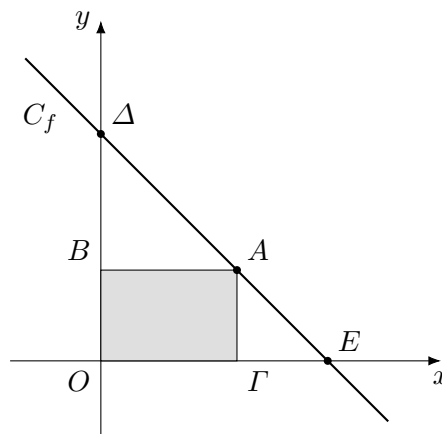
Πότε ισχύει η ισότητα;

(8)

β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 1 - x, x \in \mathbb{R},$$

η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο A , με τετμημένη α , κινείται στη γραφική παράσταση της f , μεταξύ των σημείων Δ και E , ενώ τα σημεία B και Γ είναι οι προβολές του A στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου $ABOG$ συναρτήσει του α . (10)ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου $ABOG$ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου A επιτυγχάνεται αυτή η τιμή; (7)

✓ Θέμα 311

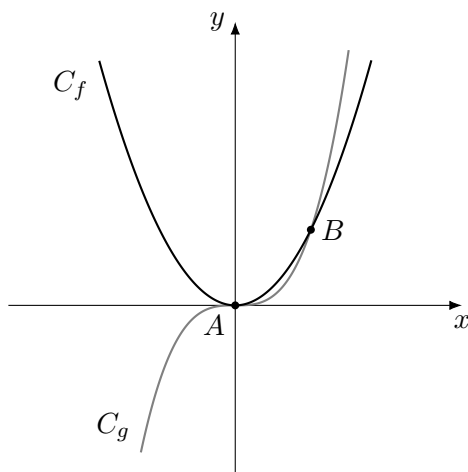
Δ

● D14665

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^3,$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία A και B , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B . (8)

Αν $A(0,0)$ και $B(1,1)$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $x^3 < x^2$ για κάθε $x \in (0,1)$. (6)

γ) Να εξετάσετε αν ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού είναι μεγαλύτερος από το τετράγωνο του. (5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$, να αποδείξετε ότι:

i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$. (3)

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$. (3)

✓ Θέμα 312

Δ

● D14760

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}}\right)^3 \cdot (x^2 - 16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της g . (8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε $x \in A$. (9)

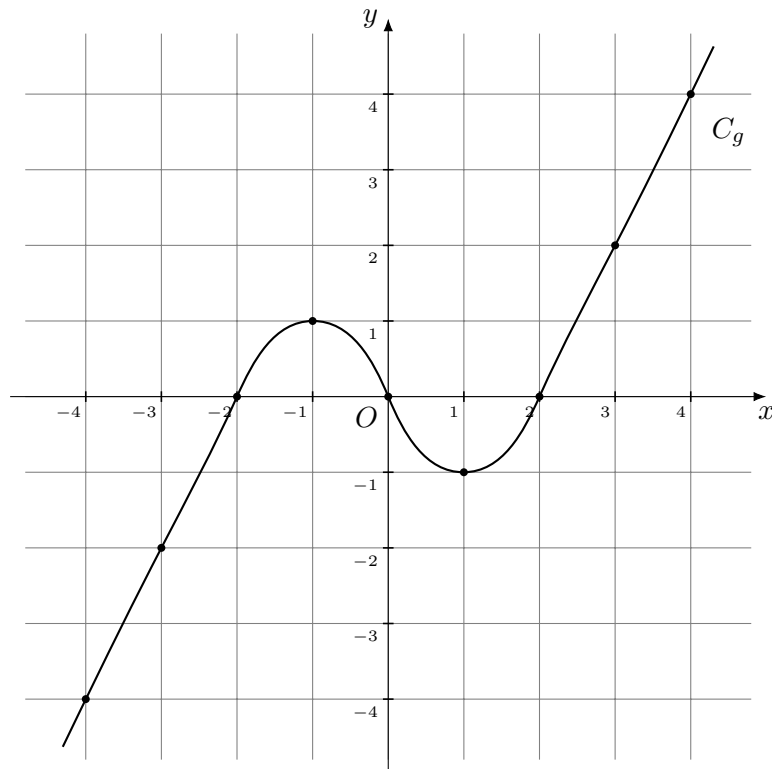
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (8)

✓ Θέμα 313

Δ

● D14745

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Ορισμένα σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες σημειώνονται με έντονη κουκίδα.



α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$. (6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$. (7)

γ) i. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των εξισώσεων

$$g(x) = \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad g(x) = -1. \quad (6)$$

ii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$g(x) = k$$

για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$. (6)

✓ Θέμα 314

Δ

● D14763

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 8x + \lambda}}{x - 4} + 2, \quad x \neq 4,$$

όπου $\lambda \geq 16$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $M(0, -1)$. (7)

β) Για $\lambda = 16$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 4 \\ 5, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$. (7)

- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (5)
- iii. Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f των οποίων η απόσταση από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι ίση με 10. (6)

✓ Θέμα 315

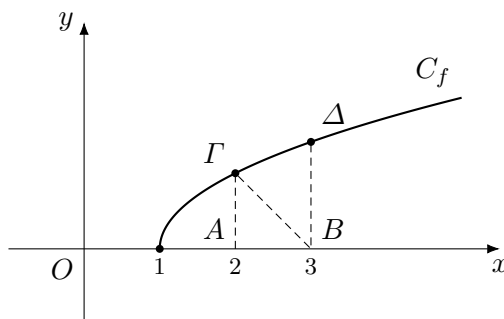
Δ

● D14771

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x - \alpha},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Γ και Δ . Τα σημεία A, B είναι οι προβολές των Γ, Δ αντίστοιχα στον άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$. (6)
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (5)
- γ) i. Να αποδείξετε ότι $\Gamma(2, 1)$ και $\Delta(3, \sqrt{2})$. (5)
- ii. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$. (4)
- iii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (5)

✓ Θέμα 316

Δ

● D14786

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2 - \lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς τον άξονα $x'x$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των λ, μ . (7)
- β) Αν, επιπλέον, το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων, να βρείτε την τιμή του λ . (6)
- γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$:
- i. Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων A και B . (7)
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων. (5)

✓ Θέμα 317

Δ

● D14810

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 7x + k, x \in \mathbb{R},$$

με $k \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $k = 10$. (5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (6)

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, όπου $\alpha < \beta$, δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$. (6)

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τεταγμένη

$$x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$$

βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$. (8)

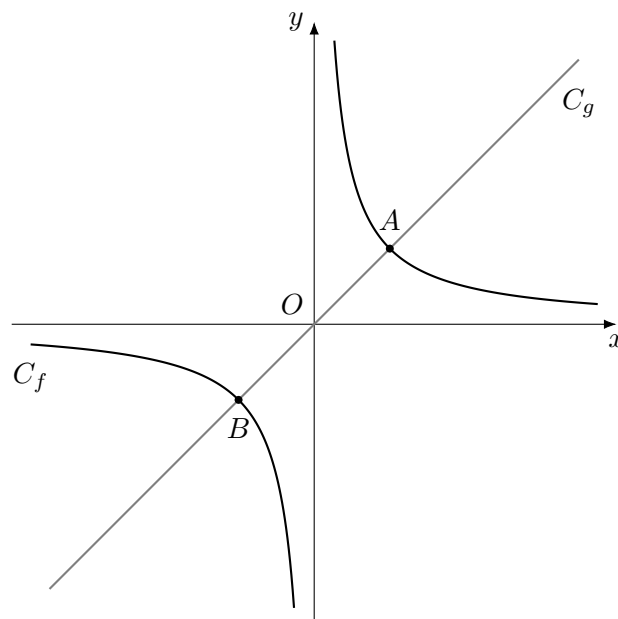
✓ Θέμα 318

Δ

● D14925

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x, x \in \mathbb{R}.$$



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής A, B των γραφικών παραστάσεων των f, g και να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB . (9)

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f .

- β) Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο M' του M ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει και αυτό στη γραφική παράσταση της f . (8)

- γ) Αν $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$ και $M'(-x, -y)$, να αποδείξετε ότι

$$(AB) \leq (MM') \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

και να εξετάσετε πότε ισχύει $(AB) = (MM')$. (8)

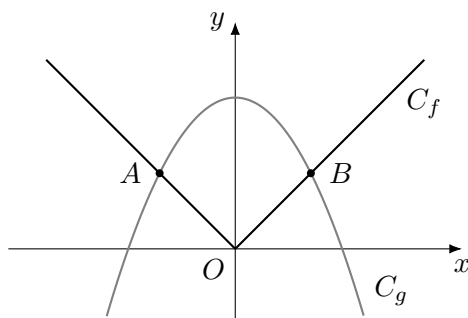
✓ Θέμα 319

Δ

● D14926

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x^2, x \in \mathbb{R}.$$



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής A, B των γραφικών παραστάσεων των f, g . (10)

- β) Αν $A(-1, 1)$ και $B(1, 1)$, τότε:

- i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) < g(x)$. (6)
- ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$, επαληθεύοντας την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα. (9)

✓ Θέμα 320

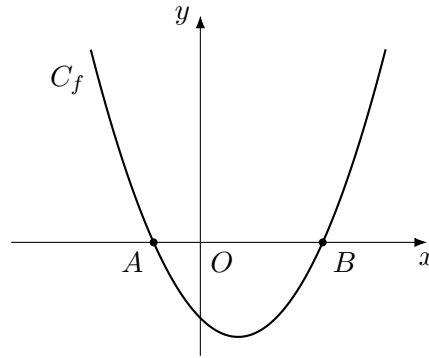
Δ

● D14961

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

και τα σημεία της $A(\omega, 0)$ και $B(\varphi, 0)$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\omega + \varphi = 1$. (4)

ii. $\omega \cdot \varphi = -1$. (4)

β) Να αποδείξετε ότι $(OB) > (OA)$. (6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να αποδείξετε ότι $\beta > \varphi$. (6)

δ) Να αποδείξετε ότι $\varphi < \frac{5}{3}$. (5)

✓ Θέμα 321

Δ

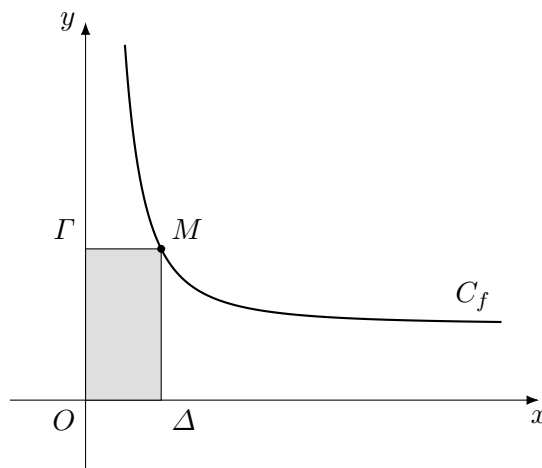
● D16153

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (7)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f και ένα τυχαίο σημείο της M με τετμημένη $\alpha > 0$. Τα σημεία Γ, Δ είναι οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.



Αν E είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } E = \alpha + \frac{4}{\alpha}. \quad (7)$$

$$\text{ii. } E \geq 4. \quad (6)$$

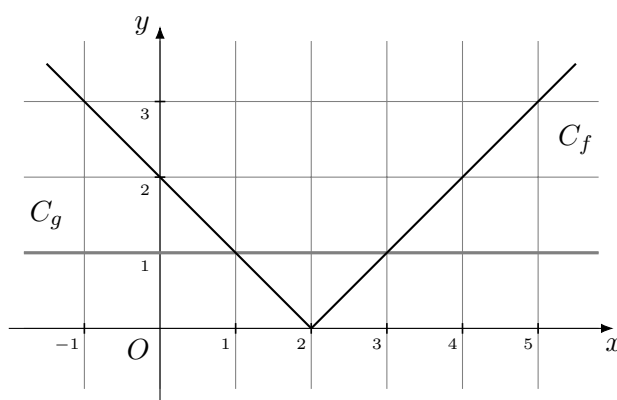
✓ Θέμα 322

Δ

● D33597

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x - 2|, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 1, x \in \mathbb{R}.$$



α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

$$\text{i. τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των } f \text{ και } g. \quad (5)$$

$$\text{ii. τις τιμές του } x \text{ για τις οποίες η γραφική παράσταση της } f \text{ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της } g. \quad (5)$$

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις στα προηγούμενα υποερωτήματα. (10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{1 - f(x)}}{f(x)}$$

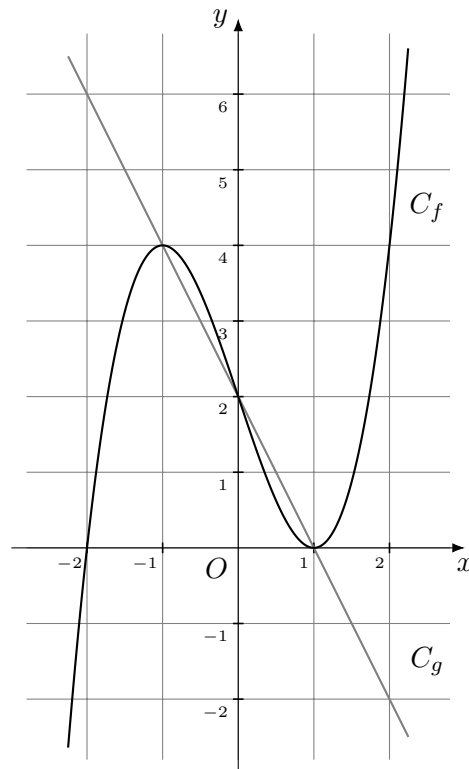
ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (5)

✓ Θέμα 323

Δ

● D32742

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2, x \in \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$. (6)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$. (6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (6)

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η παράσταση

$$A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$$

ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (7)

✓ Θέμα 324

Δ

● D33701

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = |x - 1| + 2, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g . (12)

✓ Θέμα 325



● D33754

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τη σχέση

$$y = 60 + 0,2x,$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύεται σε km και y το ποσό της χρέωσης σε €.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης, αν σε μία ημέρα ταξιδέψει 400 km; (5)

β) Πόσα km ταξίδεψε ένας πελάτης, αν για μία ημέρα πλήρωσε 150 €; (5)

γ) Μια άλλη εταιρεία Β χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τη σχέση

$$y = 80 + 0,1x.$$

Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (10)

δ) Αν

$$f(x) = 60 + 0,2x, x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = 80 + 0,1x, x \geq 0$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από τις συντεταγμένες στο πλαίσιο του προβλήματος. (5)

✓ Θέμα 326



● D33895

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$ για κάθε $x \in A$. (8)

γ) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1, -1)$. (7)

δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (5)

✓ Θέμα 327



● D34309

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x + \alpha, x \in \mathbb{R},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g . (5)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο σημεία. (10)
- γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (10)

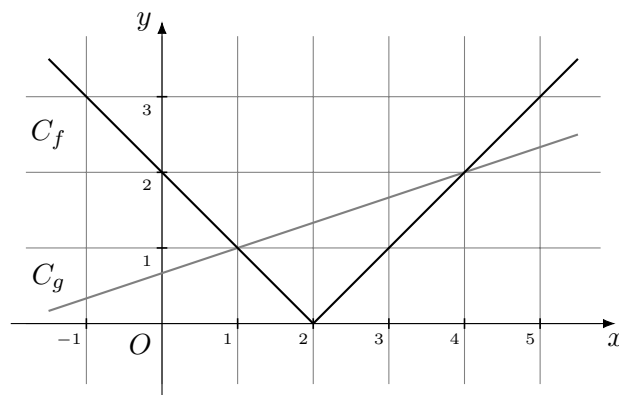
✓ Θέμα 328



● D34312

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x - 2|, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}.$$



- α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g . (6)
- β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα. (8)
- γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (6)
- δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}$$

ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (5)

✓ Θέμα 329

Δ

● D36657

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \lambda x + 1 - \lambda, x \in \mathbb{R},$$

όπου $\lambda \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο για κάθε $\lambda \neq 0$. (8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε. (8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f, g , να βρείτε την τιμή του λ , ώστε να ισχύει

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2. \quad (9)$$

✓ Θέμα 330

Δ

● D35409

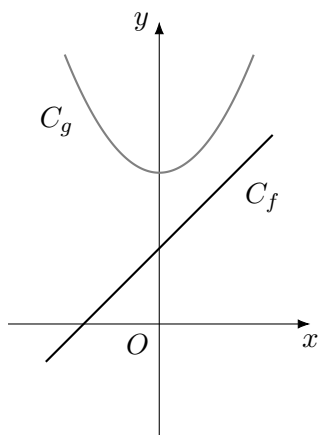
Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$. (5)

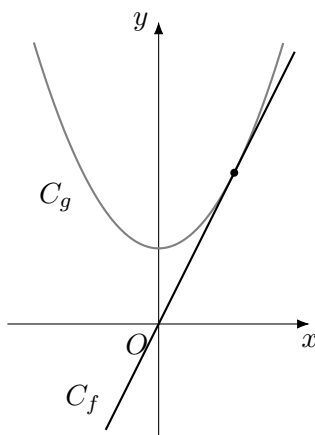
β) Θεωρούμε, επιπλέον, τις συναρτήσεις

$$f(x) = \lambda x - \lambda + 2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - \lambda + 3, x \in \mathbb{R}.$$

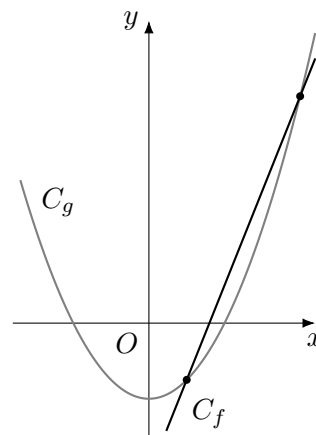
- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$. (5)
- ii. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των f και g , όπου σε κάθε σχήμα αντιστοιχεί διαφορετική τιμή της παραμέτρου λ . Αν $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή του λ σε κάθε ένα από τα σχήματα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (15)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

✓ Θέμα 331



● D35410

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

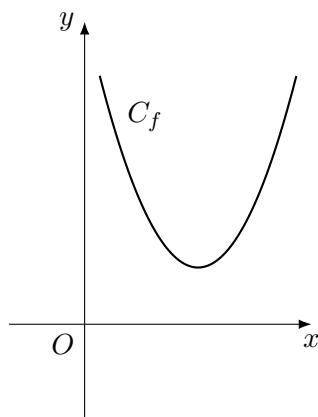
α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$. (5)

β) Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση

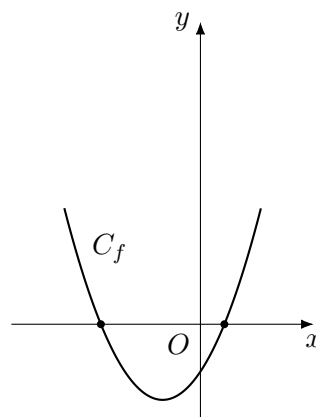
$$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5, x \in \mathbb{R}.$$

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση της f , όπου σε κάθε σχήμα αντιστοιχεί διαφορετική τιμή της παραμέτρου λ .

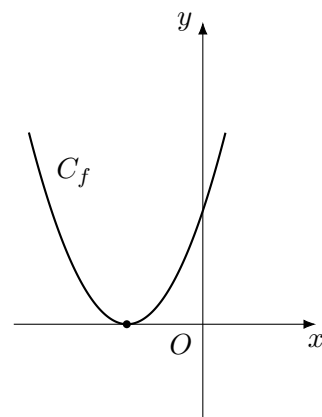
- i. Αν για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι $\lambda \in \{-2, 4\}$, να βρείτε την τιμή του λ σε κάθε ένα από τα σχήματα αυτά, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (10)
- ii. Για το σχήμα 3, να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος λ , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (10)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

✓ Θέμα 332



● D35385

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 + \beta, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x + \beta, x \in \mathbb{R},$$

όπου $\beta \in \mathbb{R}$, με τη γραφική παράσταση της g να διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$. (6)

β) i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' και $y'y$. (5)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (7)

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$. (7)

✓ Θέμα 333



● D36681

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, x \in \mathbb{R},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο. (8)

δ) Για $\lambda = 1$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (10)

✓ Θέμα 334



● D37206

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 + 3x + 2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε. (10)

β) Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση $h(x) = x + \alpha, x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Για $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, h έχουν δύο κοινά σημεία. (8)

ii. Για $\alpha < 1$, να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, h δεν έχουν κοινά σημεία. (7)

✓ Θέμα 335



● D36676

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \alpha x - \alpha + 2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - \alpha + 3, x \in \mathbb{R},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. (7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$. (4)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο σημείο τομής μεταξύ των C_f και C_g . (4)

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0.$$

Στη συνέχεια, για $\alpha = 3$, $\alpha = -2$, $\alpha = 1$ να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής. (10)

6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

✓ Θέμα 336

B

● B12630

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β . (8)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$. (8)

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (9)

✓ Θέμα 337

B

● B12631

Δίνονται δύο ευθείες, η ε_1 με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και η ε_2 που διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην ε_1 .

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε_2 . (7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 . (9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε_2 με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (9)

✓ Θέμα 338

B

● B12684

Δίνονται δύο ευθείες, η ε_1 με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και η ε_2 που διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι παράλληλη στην ε_1 .

- α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας ε_1 και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (9)
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα $x'x$. (7)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 και τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (9)

✓ Θέμα 339

B

● B12730

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$. (13)
- β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k, λ για τους οποίους η ευθεία $\delta: y = kx + \lambda$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2. (12)

✓ Θέμα 340

B

● B12856

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + 5$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\delta: y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην ε , τότε:

- α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε . (6)
- ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (7)
- β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (12)

✓ Θέμα 341

B

● B12913

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$. (8)
- β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (5)
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$. (4)
- iii. Να παραστήσετε γραφικά την f . (8)

✓ Θέμα 342

B

● B12939

Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των α, β . (13)

- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 που είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (6)
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες ε_1 και ε_2 . (6)

✓ Θέμα 343

B

● B13033

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 4$.

- α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε . (4)
- ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (4)
- β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ε . (9)
- γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $M(k, 5)$ να είναι σημείο της ε . (8)

✓ Θέμα 344

B

● B13054

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: y = (3\alpha + 4)x - 4 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = (3 - 4\alpha)x + 4,$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:
- i. τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 . (6)
- ii. το είδος της γωνία που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$. (6)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (13)

✓ Θέμα 345

B

● B13178

Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία M και $O(0, 0)$. (9)
- β) Δίνεται, επιπλέον, το σημείο $N(-3, \lambda)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .
- i. Να βρείτε την τιμή του λ . (8)
- ii. Αν $N(-3, -4)$, να εξετάσετε αν τα σημεία M και N είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς την αρχή των αξόνων. (8)

✓ Θέμα 346

B

● B13318

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$ και $f^2(-\sqrt{2})$. (12)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη C_f . (13)

✓ Θέμα 347

B

● B13400

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (9)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (9)

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (7)

✓ Θέμα 348

B

● B13471

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$, καθώς και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε και στη συνέχεια να εξετάσετε αν και το σημείο Γ βρίσκεται πάνω σε αυτήν. (14)

✓ Θέμα 349

B

● B14575

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in A$. (8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f . (9)

✓ Θέμα 350

B

● B14628

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$. (7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 3$. (10)

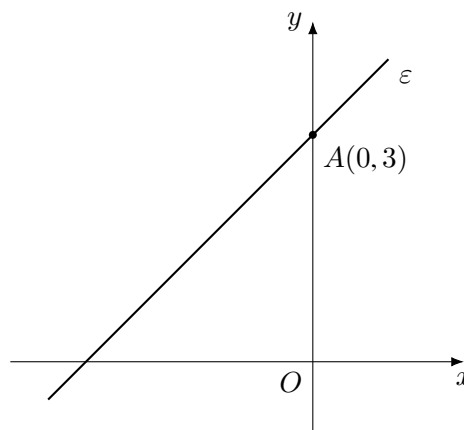
✓ Θέμα 351

B

● B14641

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια ευθεία ε που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε . (7)
- β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε . (9)
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$. (9)



Δίνεται ότι: $\varepsilon\phi 45^\circ = 1$

✓ Θέμα 352

B

● B21239

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των α και β . (12)
- β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία ε βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (13)

✓ Θέμα 353

B

● B37183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

$$f(0) = 5 \quad \text{και} \quad f(1) = 3.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$. (10)
- β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (7)
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (8)

✓ Θέμα 354

Γ

● C14576

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (10)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in A$. (10)
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f . (5)

✓ Θέμα 355

Δ

● D12681

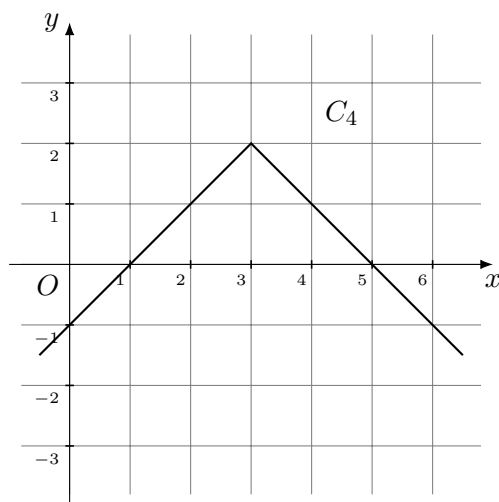
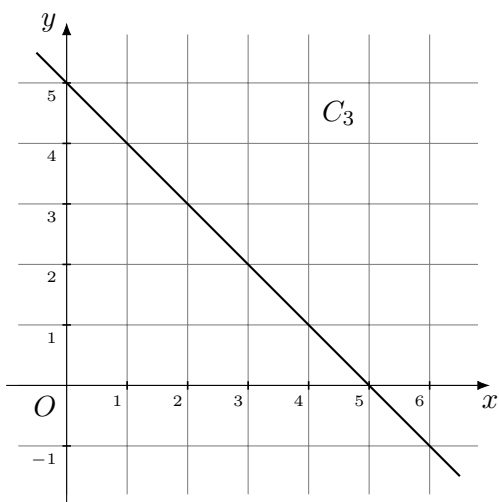
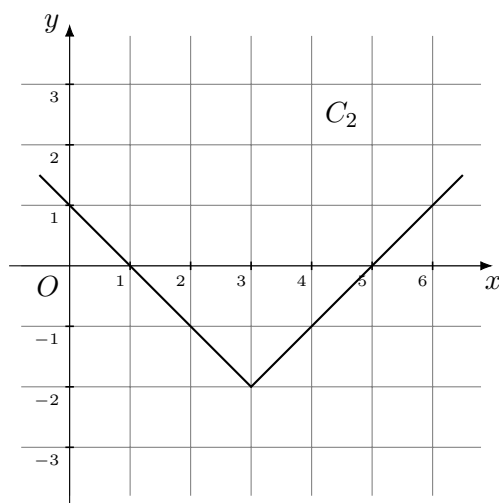
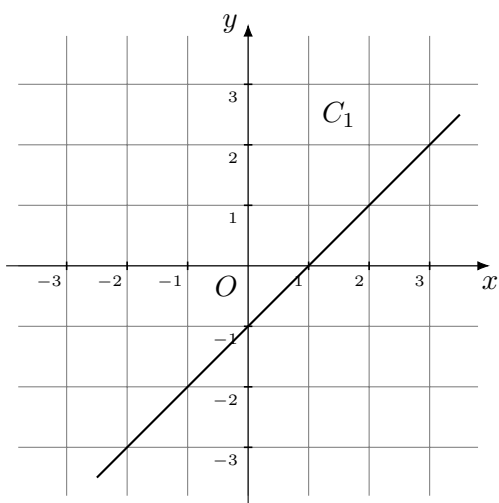
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4 - (|6 - 2x| + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 - |x - 3|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5)

β) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 5 - x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}.$$

Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (9)



γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της f , να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$$2 - |x - 3| > -1 \quad (5)$$

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα. (6)

✓ Θέμα 356

Δ

● D12682

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - (x - 1)^2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = |x - 1| + 2, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x + 3, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g . (10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (7)

✓ Θέμα 357

Δ

● D12689

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $y_1(t)$ (σε μέτρα) από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση

$$y_1(t) = 150 + 50t, t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα 5 λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για 10 λεπτά ακόμη, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του $y_2(t)$ από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία 10 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση

$$y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο; (6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το πέμπτο μέχρι το δέκατο λεπτό της κίνησής του; (5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y_2(t)$ και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερού από τη θάλασσα είναι 250 m. (6)

δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (4)

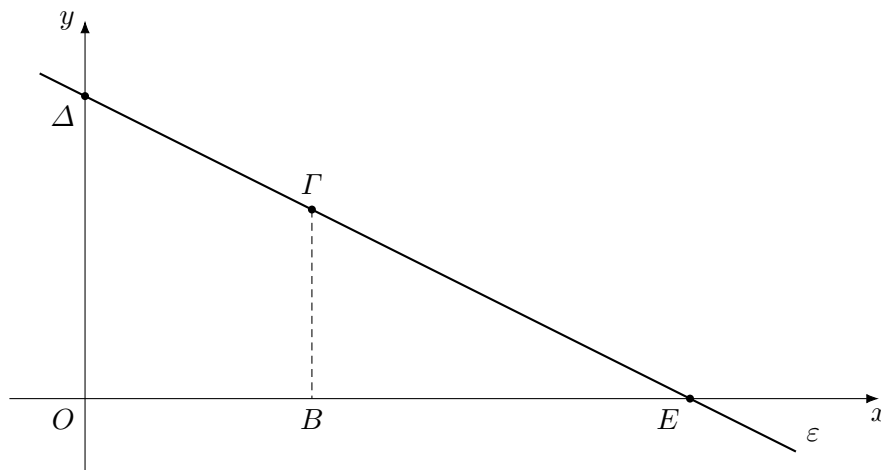
ii. Στα τελευταία 10 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (4)

✓ Θέμα 358

Δ

● D12728

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y + \frac{1}{2}x = 4$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία E και Δ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E . (6)

Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και B ένα σημείο του άξονα x/x τέτοιο, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ να είναι παράλληλο στον άξονα y/y .

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να αποδείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$$

εκφράζει το εμβαδόν του τραpezίου $OB\Gamma\Delta$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος. (7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραpezίου $OB\Gamma\Delta$ ισούται με 9,75, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ . (6)

✓ Θέμα 359

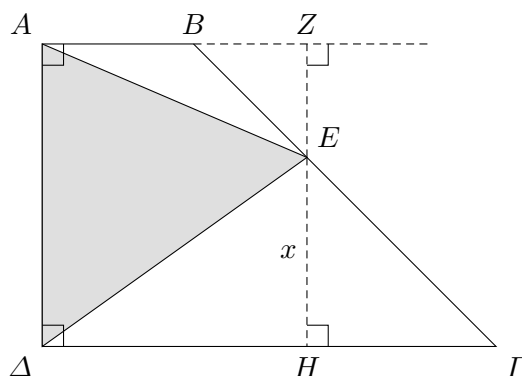
Δ

● D12834

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το τραpezίο $AB\Gamma\Delta$ για το οποίο ισχύει

$$AB = 2, \quad A\Delta = 4 \quad \text{και} \quad \Gamma\Delta = 6,$$

ενώ η πλευρά $A\Delta$ είναι κάθετη στις AB και $\Gamma\Delta$. Το σημείο E μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί της πλευράς $B\Gamma$ και έστω x η απόστασή του από την πλευρά $\Gamma\Delta$.



- α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου $AE\Delta$ είναι

$$f(x) = -2x + 12$$

και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f στο πλαίσιο του προβλήματος. (10)

- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (7)

- γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right). \quad (8)$$

✓ Θέμα 360

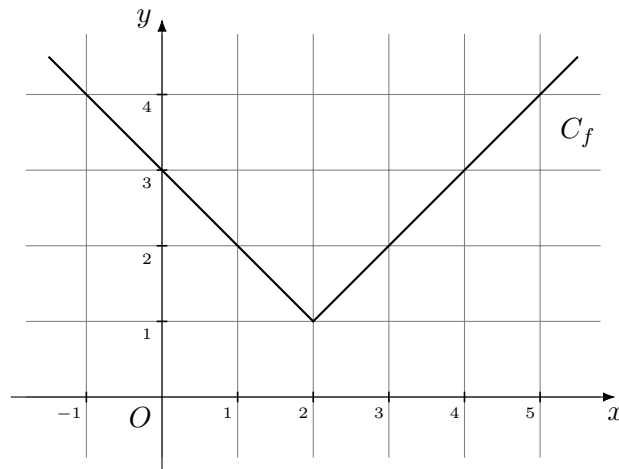
Δ

● D12914

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = |x - 2| + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.



- α) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε για ποιες τιμές του c η ευθεία ε και η C_f έχουν κοινά σημεία. (4)
 ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα. (5)

Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δύο κοινά σημεία A, B .

- β) Να αποδείξετε ότι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$. (8)

- γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε για ποιες τιμές του c το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το πολύ 2. (4)
 ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα. (4)

✓ Θέμα 361

Δ

● D12788

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$. (7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$. (9)

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$. (9)

✓ Θέμα 362

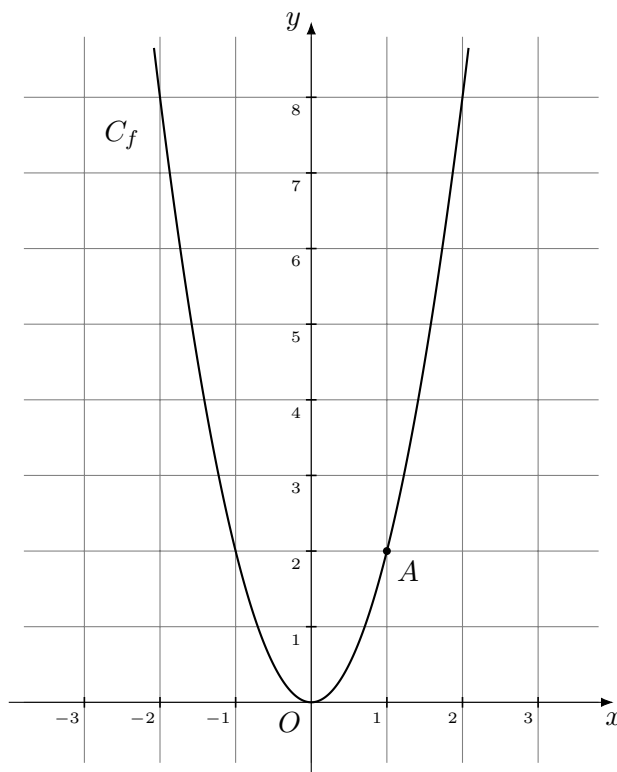
Δ

● D12942

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^2, x \in \mathbb{R},$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$. (6)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(1, 6)$ και έχει κλίση 2. (4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε στο παραπάνω σχήμα την ευθεία ε . (4)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2x + 4$. (4)

δ) Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < 2x + 4$. (7)

✓ Θέμα 363

Δ

● D12921

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2k|x| - 2, x \in \mathbb{R},$$

καθώς και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - k^2$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $k \in \mathbb{R}$. (5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε $k \in \mathbb{R}$. (8)

γ) Για $k = -3$, να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τη C_f . (5)

δ) Αν A, B είναι τα σημεία τομής του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε την απόσταση (AB) . (7)

✓ Θέμα 364

Δ

● D12944

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x - \frac{1}{x}, x \neq 0.$$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right). \quad (7)$$

β) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) - g^2(x) = 4$ για κάθε $x \neq 0$. (8)

γ) Αν η ευθεία $y = \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$. (10)

✓ Θέμα 365

Δ

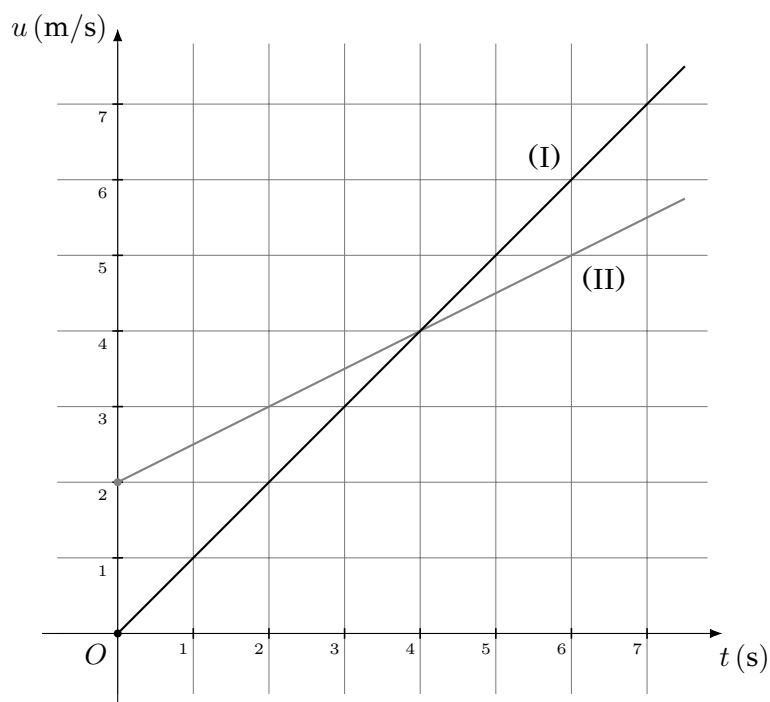
● D12999

Ένα όχημα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση έχει ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$u = u_0 + \alpha t,$$

όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και α η επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 είναι η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

- α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς τον χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή, καθώς και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής. (6)
- β) Ένα όχημα A που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4s έχει ταχύτητα 4m/s, ενώ ένα άλλο όχημα B που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση έχει αρχική ταχύτητα 2m/s. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι ευθείες (I), (II) που περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.



- i. Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος A και ποια την ταχύτητα του οχήματος B; (6)
- ii. Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα A, B κινείται ταχύτερα σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [3, 5]$. (7)
- iii. Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/s και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος A, να σχεδιάσετε στο παραπάνω σχήμα μια ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του. (6)

✓ Θέμα 366

Δ

● D13055

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbb{R},$$

καθώς και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + \beta$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2+x) = f(2-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (6)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48). \quad (6)$$

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία ε , όταν $\beta = -5$. (6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία ε . (7)

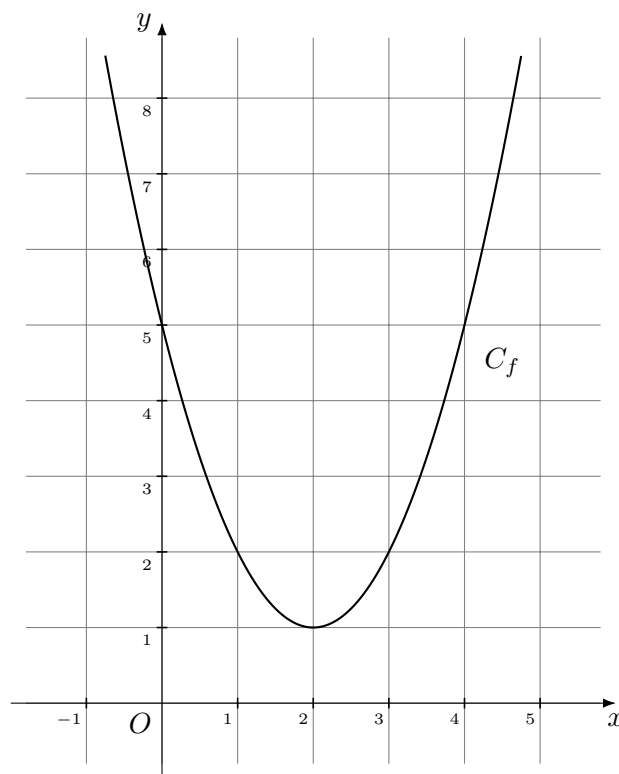
✓ Θέμα 367



● D13091

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbb{R}.$$



α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας. (6)

β) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (6)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα. (7)

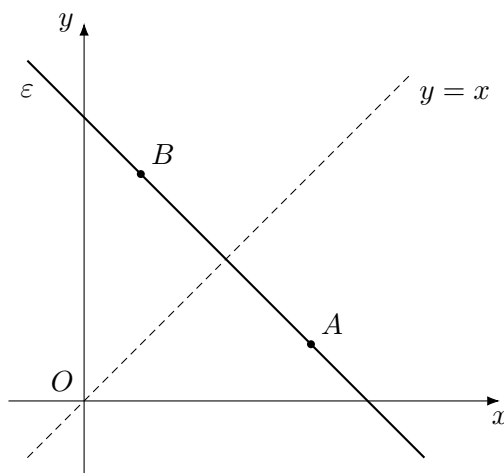
- γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , όπου $x_1 < x_2$. Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$. (6)

✓ Θέμα 368



● D13298

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο σημεία A και B του 1^{ου} τεταρτημορίου, τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων.



- α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B . (3)
- β) Να αποδείξετε ότι η κλίση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι ίση με -1 . (6)
- γ) Αν, επιπλέον, είναι $A(4, k^2 - 3k + 1)$ και $B(k - 2, 4)$, με $k \in \mathbb{R}$, τότε:
- Να αποδείξετε ότι $k = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A, B . (8)
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . (8)

✓ Θέμα 369



● D13168

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma, x \in \mathbb{R},$$

με $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y/y στο σημείο $M(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- $\gamma = -1$. (5)
- για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$. (7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία

$$A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0) \quad \text{και} \quad B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0). \quad (7)$$

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (6)

✓ Θέμα 370



● D13367

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$, να βρείτε το είδος της γωνίας φ που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (9)

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία φ είναι αμβλεία, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (6)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. (5)

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (5)

✓ Θέμα 371



● D13473

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A . (6)

β) Για $1 \leq x \leq 3$:

i. Να αποδείξετε ότι $A = 2$. (4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$. (5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 3 - x, x \in [1, 3] \quad \text{και} \quad g(x) = x - 1, x \in [1, 3]. \quad (6)$$

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|f(x) - g(x)| = 2$. (4)

✓ Θέμα 372

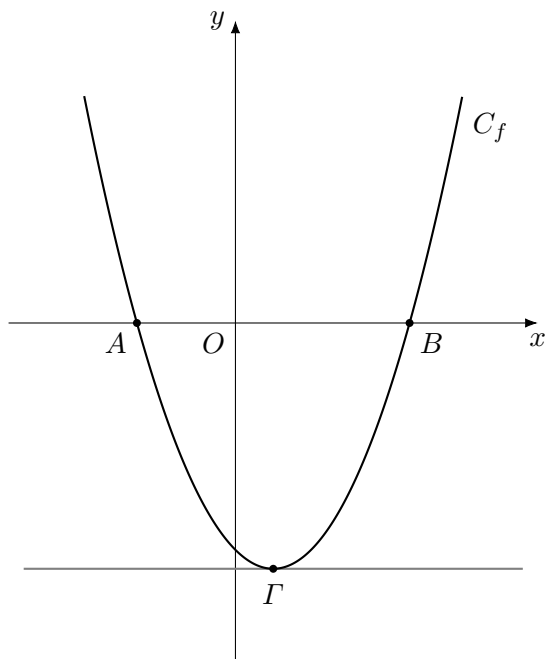


● D13314

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - x - 3, x \in \mathbb{R}.$$

Τα σημεία $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ και $\Gamma(\gamma, \delta)$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, ανήκουν στη γραφική παράσταση της f , ενώ η παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ευθεία που διέρχεται από το σημείο Γ έχει με τη C_f μοναδικό κοινό σημείο.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. (6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. (6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ, δ . (7)

✓ Θέμα 373

Δ

● D14184

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (8)

γ) Αν $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. (7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (6)

✓ Θέμα 374

Δ

● D14185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ για κάθε $x \in A$. (4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$. (7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 1$. (8)

✓ Θέμα 375



● D14562

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (7)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$. (8)

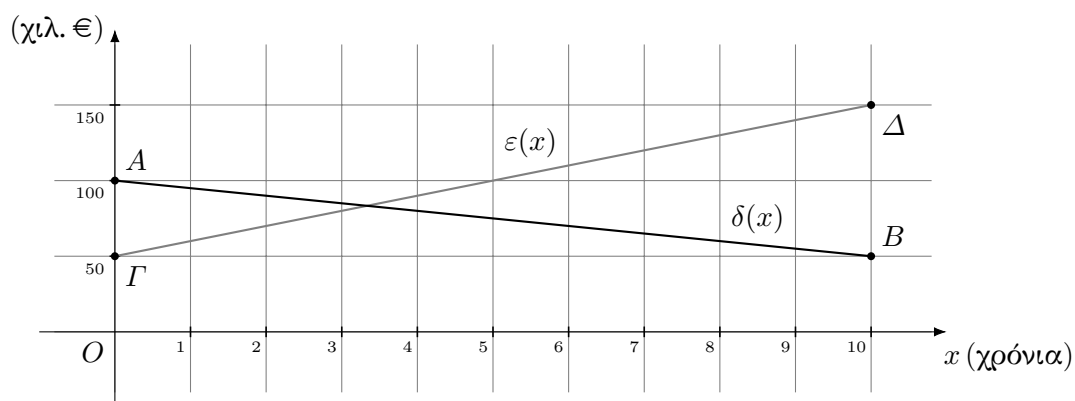
β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f(x)|$. (10)

✓ Θέμα 376



● D14477

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία AB με $A(0, 100)$ και $B(10, 50)$, καθώς και η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0, 50)$ και $\Delta(10, 150)$. Η ευθεία AB παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$, η οποία εκφράζει τις ετήσιες δαπάνες (σε χιλιάδες ευρώ) μιας εταιρείας στα x χρόνια λειτουργίας της, ενώ η ευθεία $\Gamma\Delta$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varepsilon(x)$, η οποία εκφράζει τα ετήσια έσοδα (σε χιλιάδες ευρώ) της ίδιας εταιρείας. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες της εταιρείας τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της. (4)

β) i. Να προσδιορίσετε του τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$ και $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε τις εκτιμήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα. (15)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (6)

✓ Θέμα 377

Δ

● D14225

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8$ για κάθε $x \in A$. (7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 3$. (6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^4 - 6x - 4$, $x \in \mathbb{R}$. (7)

✓ Θέμα 378

Δ

● D14320

Σε έναν τόπο, μια χειμερινή ημέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Η θερμοκρασία (σε $^{\circ}\text{C}$), x ώρες μετά τις 6 το πρωί, δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & \text{αν } x \in [0, 6] \\ 16, & \text{αν } x \in (6, 9] \\ 25 - x, & \text{αν } x \in (9, 12] \end{cases} .$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία σε αυτόν τον τόπο στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα. (6)

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

i. διατηρείται σταθερή. (4)

ii. είναι μεγαλύτερη από 14°C . (7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (8)

✓ Θέμα 379

Δ

● D14459

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R},$$

καθώς και η ευθεία $y = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' . (5)

β) Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δύο κοινά σημεία με την ευθεία και να βρείτε τις τετμημένες των σημείων αυτών. (10)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$. (10)

✓ Θέμα 380

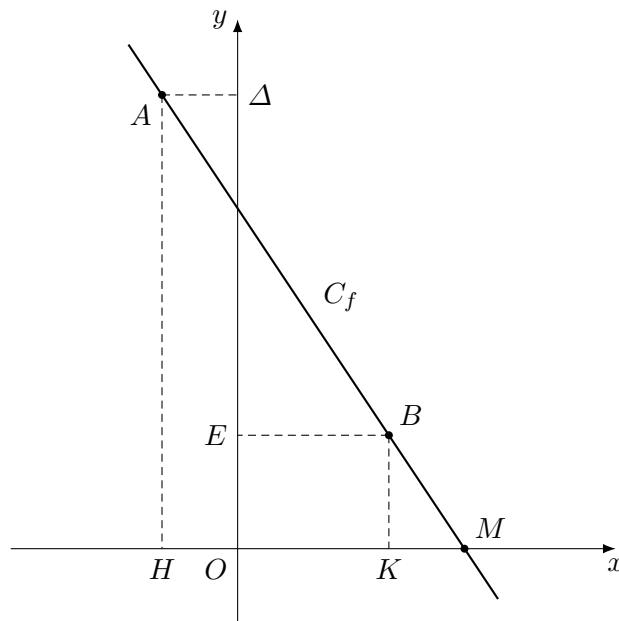
Δ

● D14556

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \alpha x + \beta, x \in \mathbb{R},$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της f , των οποίων οι προβολές στους άξονες x' και $y'y$ είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα, με $HK = 6$ και $\Delta E = 9$.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$. (9)

Αν, επιπλέον, το σημείο M έχει τετμημένη 6 και ισχύει $OK = 4$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\beta = 9$. (7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ που διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς τη γραφική παράσταση της f . (9)

✓ Θέμα 381

Δ

● D33894

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{αν } x > 2 \\ -x + 3, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$. (7)

- γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f . (4)
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (4)
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$. (5)

✓ Θέμα 382



● D34183

Σε μια πόλη της Ευρώπης, μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 € με την είσοδο στο ταξί και 0,6 € για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 € με την είσοδο στο ταξί και 0,4 € για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 km.

- α) i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε €) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x km, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών. (3)

x	0	2	8
$f(x)$			

- ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε €) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x km, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών. (3)

x			
$g(x)$	2	3,2	4,8

- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g του προηγούμενου ερωτήματος. (8)
- γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (8)
- δ) Αν δύο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης Α διανύσει 3 km περισσότερα από τον πελάτη Β, να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. (3)

✓ Θέμα 383



● D36652

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 4x + 2, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 9, x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $x'x$. (6)

- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$. (4)
- γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$. (8)
- δ) Να βρείτε συνάρτηση h , της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του θετικού ημιάξονα Ox . (7)

✓ Θέμα 384



● D36655

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (10)
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (7)
- γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία A και B . (8)

✓ Θέμα 385



● D36659

Ένας αθλητής όταν κολυμπάει ύπτιο καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο στόχος του αθλητή είναι να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

- α) Αν ο αθλητής κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να πετύχει τον στόχο του; (5)
- β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.
- i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής θα κολυμπήσει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει τον χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να πετύχει τον στόχο του είναι
- $$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x. \quad (7)$$
- ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f στο πλαίσιο του προβλήματος. (4)
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (9)

✓ Θέμα 386

Δ

● D36682

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα x' . (5)
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (10)
- γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει

$$|2x - 1| < 3,$$

να αποδείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (10)

✓ Θέμα 387

Δ

● D36683

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$. (3)
- β) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = 3$ και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (5)
- ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς τον άξονα $y'y$. (4)
- γ) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία. (5)
- ii. Για τις τιμές του α που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα, να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του υποερωτήματος (βii). (8)

✓ Θέμα 388

Δ

● D36684

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 2x, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 3x - 4, x \in \mathbb{R}.$$

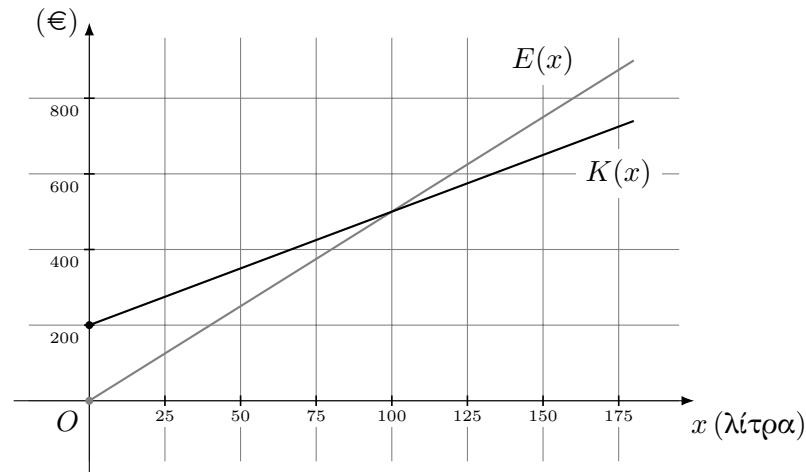
- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g . (5)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (10)
- γ) Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, με $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f . (10)

✓ Θέμα 389

Δ

● D37203

Μια μικρή εταιρεία διαθέτει βιολογικό ελαιόλαδο μέσω διαδικτύου. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που εκφράζουν τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων ελαιολάδου σε έναν μήνα.



- α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του στο πλαίσιο του προβλήματος. (6)
- β) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της εταιρείας; (5)
- γ) Πόσα λίτρα ελαιολάδου πρέπει να πωληθούν για να μην έχει ζημία η εταιρεία; (6)
- δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή στο προηγούμενο ερώτημα. (8)

Ευρετήριο Θεμάτων

B12630, 115	B13318, 117	B14617, 38	B34446, 81
B12631, 115	B13319, 59	B14628, 118	B34871, 62
B12673, 11	B13321, 47	B14641, 119	B34872, 24
B12680, 88	B13322, 90	B14649, 23	B34874, 72
B12684, 115	B13323, 40	B14656, 61	B34877, 62
B12685, 7	B13400, 118	B14681, 81	B34919, 47
B12686, 89	B13471, 118	B14682, 18	B34920, 28
B12722, 46	B13472, 8	B14704, 11	B35030, 47
B12729, 90	B14071, 14	B14728, 81	B35033, 24
B12730, 116	B14072, 90	B14730, 14	B35034, 91
B12763, 71	B14189, 46	B14741, 26	B35035, 47
B12765, 79	B14224, 23	B14750, 18	B35038, 28
B12787, 72	B14259, 60	B14774, 18	B35040, 12
B12856, 116	B14295, 37	B14781, 81	B35041, 15
B12857, 23	B14319, 38	B14849, 19	B35042, 72
B12908, 79	B14410, 11	B14920, 72	B35043, 39
B12909, 37	B14412, 14	B15000, 93	B35044, 39
B12910, 89	B14452, 17	B15051, 19	B35046, 62
B12913, 116	B14458, 8	B15054, 15	B35100, 28
B12922, 10	B14473, 8	B21239, 119	B35112, 15
B12939, 116	B14474, 47	B34145, 61	B35143, 62
B12943, 17	B14475, 11	B34146, 24	B35201, 92
B12976, 46	B14476, 60	B34147, 62	B35205, 73
B12997, 80	B14491, 38	B34148, 39	B35298, 82
B13025, 38	B14492, 12	B34149, 27	B35299, 63
B13026, 80	B14512, 60	B34150, 27	B35375, 63
B13031, 81	B14555, 8	B34152, 19	B35382, 28
B13032, 80	B14572, 38	B34153, 61	B35388, 9
B13033, 117	B14573, 60	B34154, 27	B35404, 39
B13053, 7	B14574, 61	B34156, 72	B35405, 82
B13054, 117	B14575, 118	B34157, 19	B35408, 63
B13088, 7	B14577, 26	B34158, 62	B35412, 15
B13169, 23	B14596, 90	B34159, 92	B35413, 92
B13177, 14	B14597, 61	B34161, 27	B35415, 39
B13178, 117	B14599, 18	B34162, 47	B35549, 40
B13266, 10	B14603, 91	B34436, 28	B36777, 40

B36778, 19	B38203, 49	D12945, 65	D14490, 30
B36884, 12		D12998, 74	D14543, 31
B36885, 92	C14052, 25	D12999, 125	D14556, 133
B36886, 40	C14329, 9	D13030, 96	D14562, 131
B36887, 48	C14576, 119	D13055, 126	D14615, 51
B36888, 40	C14578, 30	D13056, 59	D14629, 84
B36889, 93	C14601, 49	D13089, 65	D14645, 75
B36890, 29	C14602, 13	D13090, 96	D14650, 44
B36891, 73	C14604, 93	D13091, 127	D14651, 31
B36892, 48	C14673, 94	D13114, 43	D14652, 51
B36893, 41	C14713, 13	D13120, 97	D14653, 51
B36894, 16	C14749, 29	D13168, 128	D14654, 52
B36895, 41	C14752, 94	D13170, 25	D14655, 85
B36896, 24	C14753, 42	D13171, 65	D14665, 101
B36897, 63	C14754, 94	D13173, 66	D14702, 86
B36898, 16	C14805, 21	D13174, 49	D14744, 101
B36899, 13	C34155, 21	D13176, 49	D14745, 102
B37168, 48	C34746, 64	D13179, 16	D14758, 66
B37169, 48	C34910, 49	D13298, 128	D14759, 31
B37170, 41	C35037, 73	D13312, 43	D14760, 102
B37171, 29	C35296, 43	D13313, 98	D14763, 103
B37175, 82	C35411, 73	D13314, 129	D14771, 104
B37178, 29	C37172, 21	D13367, 129	D14786, 104
B37179, 12	C37190, 94	D13368, 50	D14809, 67
B37181, 29	D12628, 95	D13454, 98	D14810, 105
B37182, 48	D12681, 120	D13473, 129	D14820, 26
B37183, 119	D12682, 121	D13474, 43	D14924, 52
B37185, 82	D12683, 30	D13479, 99	D14925, 105
B37189, 82	D12689, 121	D13557, 100	D14926, 106
B37191, 41	D12694, 64	D14122, 84	D14927, 66
B37192, 20	D12728, 121	D14123, 50	D14931, 21
B37193, 42	D12731, 74	D14184, 130	D14961, 106
B37195, 42	D12764, 64	D14185, 130	D14962, 67
B37196, 42	D12788, 124	D14190, 100	D14963, 52
B37197, 20	D12834, 122	D14225, 132	D15052, 9
B37198, 20	D12911, 83	D14307, 99	D16153, 107
B37199, 20	D12914, 123	D14320, 132	D32682, 53
B37200, 42	D12921, 125	D14375, 75	D32741, 67
B37201, 16	D12941, 96	D14406, 30	D32742, 108
B37202, 83	D12942, 124	D14459, 132	D32753, 85
B37817, 13	D12944, 125	D14477, 131	D33579, 68

D33581, 68	D33893, 44	D34544, 34	D36670, 57
D33582, 53	D33894, 133	D35385, 113	D36671, 46
D33583, 68	D33895, 110	D35409, 112	D36672, 17
D33584, 32	D33896, 45	D35410, 113	D36673, 25
D33585, 32	D34180, 76	D35724, 57	D36674, 71
D33586, 44	D34181, 76	D36649, 76	D36675, 35
D33587, 52	D34182, 55	D36650, 69	D36676, 114
D33597, 108	D34183, 134	D36651, 34	D36677, 77
D33698, 53	D34184, 86	D36652, 134	D36678, 57
D33701, 109	D34185, 55	D36653, 69	D36679, 88
D33711, 53	D34186, 56	D36654, 87	D36680, 88
D33712, 54	D34309, 111	D36655, 135	D36681, 114
D33754, 110	D34310, 33	D36657, 112	D36682, 136
D33826, 32	D34312, 111	D36658, 58	D36683, 136
D33855, 54	D34317, 86	D36659, 135	D36684, 136
D33858, 69	D34319, 56	D36660, 70	D37203, 137
D33888, 17	D34322, 45	D36661, 34	D37204, 71
D33889, 33	D34323, 56	D36662, 70	D37205, 77
D33890, 54	D34325, 45	D36663, 35	D37206, 114
D33891, 75	D34327, 33	D36668, 87	
D33892, 55	D34390, 34	D36669, 58	



Θεσσαλονίκη
2025

