

ΦΩΤΗΣ Χ. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΙΔΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2024

Φώτης Χ. Κουτσουμπίδης

Μαθηματικά

Προσανατολισμού

Β Λυκείου

Τράπεζα Θεμάτων



Θεσσαλονίκη

2024

Μαθηματικά Προσανατολισμού | Β Λυκείου
Τράπεζα Θεμάτων

Φώτης Χ. Κουτσομπίδης
Μαθηματικός, Θεσσαλονίκη

Στοιχειοθεσία: L^AT_EX
Σελίδες 98, Μέγεθος A4
Ιούνιος 2024

Email: fkoutsoubidis@gmail.com

Ιστότοπος: www.fmaths.gr

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|-------------------------------------|-----------|
| 1 | Διανύσματα | 7 |
| 1.2 | Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων | 7 |
| 1.3 | Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα | 8 |
| 1.4 | Συντεταγμένες στο Επίπεδο | 9 |
| 1.5 | Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων | 15 |
| 2 | Η Ευθεία στο Επίπεδο | 27 |
| 2.1 | Εξίσωση Ευθείας | 27 |
| 2.2 | Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας | 33 |
| 2.3 | Εμβαδόν Τριγώνου | 39 |
| 3 | Κωνικές Τομές | 51 |
| 3.1 | Ο Κύκλος | 51 |
| 3.2 | Η Παραβολή | 73 |
| 3.3 | Η Έλλειψη | 82 |
| 3.4 | Η Υπερβολή | 88 |
| | Ευρετήριο Θεμάτων | 95 |

1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων

✓ Θέμα 1

B

● B22055

Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$.

α) Να εξηγήσετε γιατί:

i. το μήκος της πλευράς BA είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'A'$ και (3)

ii. το μήκος της πλευράς $A\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $A'\Gamma'$. (3)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$. (10)

ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'\Gamma'$. (3)

γ) Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

«Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα».

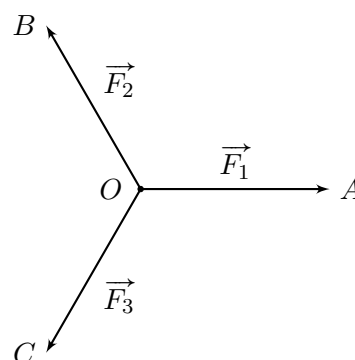
Θα μπορούσε η πρόταση αυτή να αποτελεί κριτήριο ισότητας τριγώνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (6)

✓ Θέμα 2

Δ

● D22068

Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120° , έτσι ώστε το υλικό σημείο O να ισορροπεί.



- α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας; (5)
- β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ και \vec{F}_3 είναι αντίθετα. (5)
- γ) Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο O), να αποδείξετε ότι:
- $A\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Delta = 60^\circ$. (5)
 - $O\hat{\Delta}B = 60^\circ$. (5)
- δ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$. (5)

1.3 Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

✓ Θέμα 3

B

● B15010

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}, \vec{\Gamma E}$ τέτοια, ώστε

$$\vec{B\Delta} = \vec{B\Lambda} + \vec{B\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma\Lambda} + \vec{\Gamma B}.$$

- α)
 - Να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$. (8)
 - Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι αντίθετα. (8)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά. (9)

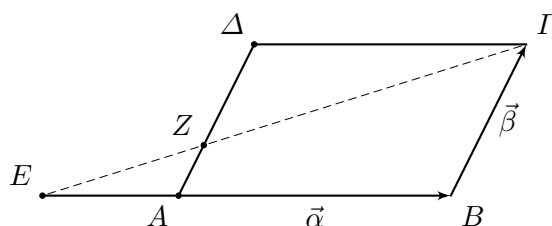
✓ Θέμα 4

B

● B21165

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια, ώστε

$$\vec{A\Gamma} = -\frac{1}{2}\vec{AB} \quad \text{και} \quad \vec{AZ} = \frac{1}{3}\vec{A\Delta}.$$



- α) Να αποδείξετε ότι

$$\vec{EZ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}. \quad (10)$$

- β) Να αποδείξετε ότι $\vec{Z\Gamma} = 2\vec{EZ}$. (9)

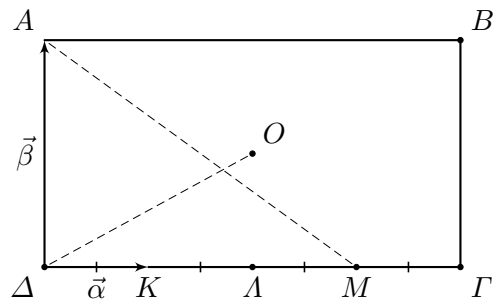
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Z και Γ είναι συνευθειακά. (6)

✓ Θέμα 5

B

● B22042

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O . Τα σημεία K, Λ, M χωρίζουν την πλευρά $\Delta\Gamma$ σε τέσσερα ίσα τμήματα.



Αν $\overrightarrow{\Delta K} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{\Delta A} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$.

α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ (8)

β) $\overrightarrow{M\Lambda}$ (8)

γ) $\overrightarrow{O\Delta}$ (9)

✓ Θέμα 6

Δ

● D21885

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ, E εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{A\Delta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE},$$

όπου κ, λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$. (8)

β) i. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{B\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Delta E} \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa \cdot |\overrightarrow{\Delta E}|. \quad (10)$$

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (7)

1.4 Συντεταγμένες στο Επίπεδο

✓ Θέμα 7

B

● B14666

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{a} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{a} - 9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} . (9)

β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ, M αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (7)

✓ Θέμα 8

B

● B15002

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$, $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$, $\overrightarrow{AD} = (3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(3, 6)$. (11)

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (8)

✓ Θέμα 9

B

● B15043

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στον χάρτη.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (6)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και έτσι υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιαστεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς. (7)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ . (12)

(Οι αποστάσεις εκφράζονται σε km)

✓ Θέμα 10

B

● B15854

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$. (10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$. (7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (8)

✓ Θέμα 11

B

● B16147

Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}, \quad \vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}, \quad \vec{\gamma} = -3\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{\delta} = (-1, 1).$$

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$. (9)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ με τον άξονα x' . (10)

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (6)

✓ Θέμα 12

B

● B16151

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x' . (16)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. (9)

✓ Θέμα 13

B

● B16579

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$.

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα \overrightarrow{AB} σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (7)

β) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{v} . (8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και \vec{v} είναι αντίρροπα. (10)

✓ Θέμα 14

B

● B16580

Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (8)

γ) του σημείου Δ . (5)

✓ Θέμα 15

B

● B16581

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. (7)

✓ Θέμα 16

B

● B17070

Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (8)

✓ Θέμα 17

B

● B18878

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε πριν τρεις ημέρες από την κατασκήνωσή του (σημείο O : αρχή των αξόνων) για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφτασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφτασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφτασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του περιγράφονται από τα διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \quad \overrightarrow{AB} = (2, 4) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BT} = (2, 5\sqrt{3} - 5).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = (5, 5\sqrt{3})$. (13)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση, στο τέλος της τρίτης ημέρας. (12)

(Οι αποστάσεις εκφράζονται σε km)

✓ Θέμα 18

B

● B19038

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

α) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. (9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$. (8)

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ , έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γράφεται στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$. (8)

✓ Θέμα 19

B

● B21681

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ και $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$. (10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (8)

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. (7)

✓ Θέμα 20

B

● B22038

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο του \vec{a} και να έχει μέτρο ίσο με 1. (12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο του \vec{a} και να έχει μέτρο ίσο με 7. (13)

✓ Θέμα 21

B

● B22044

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να τοποθετήσετε τα σημεία A, B, Γ σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. (15)

✓ Θέμα 22

B

● B22052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-2, 5)$ και $\vec{\beta} = (1, -3)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$. (12)

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v} = (8, -21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$. (13)

✓ Θέμα 23

B

● B22060

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{A\Delta}$, $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{B\Delta}$. (12)

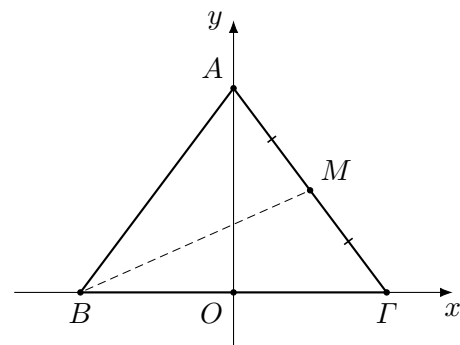
β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{B\Delta}| = |\vec{B\Gamma}|$. Τι είδους σχήμα είναι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$; (13)

✓ Θέμα 24

B

● B22557

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B, Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι κορυφές του τριγώνου είναι τα σημεία $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$. (9)

ii. το μέσο της πλευράς $ΑΓ$ είναι το σημείο $M(3, 4)$. (9)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM . (7)

✓ Θέμα 25

Δ

● D17076

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{MB} και \overrightarrow{AB} . (6)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{MB} και \overrightarrow{AB} . (6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (6)

δ) Να αιτιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4 \text{.} \quad (7)$$

✓ Θέμα 26

Δ

● D17077

Τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B ως προς την αρχή των αξόνων O είναι τα

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB} = (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (6)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων A και B συναρτήσει του λ . (7)

γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (7)

δ) Να αιτιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος, ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή».

(5)

✓ Θέμα 27

Δ

● D20938

Θεωρούμε τρίγωνο OAB με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = (6, 8)$, όπου O η αρχή των αξόνων. Για το διάνυσμα \vec{a} γνωρίζουμε ότι έχει συντεταγμένες $(|\vec{a}| - 4, |\vec{a}| - 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{a}| = 2$. (10)

β) Να βρείτε σημείο Γ τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να είναι παραλληλόγραμμο. (8)

γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$. (7)

1.5 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

✓ Θέμα 28

B

● B14586

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AI} και να αποδείξετε ότι η γωνία \hat{A} είναι ορθή. (9)

β) Αν M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$, να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων \overrightarrow{AM} και \overrightarrow{BI} . (8)

γ) Να γράψετε το διάνυσμα \overrightarrow{BI} ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων \overrightarrow{AI} , \overrightarrow{AM} . (8)

✓ Θέμα 29

B

● B14953

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2,5)$, $B(7,8)$ και $\Gamma(1,-4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AI} . (10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$. (10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$. (5)

✓ Θέμα 30

B

● B15038

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$|\vec{\alpha}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = 4 \quad \text{και} \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}.$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$. (10)

✓ Θέμα 31

B

● B15073

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (8)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (8)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$. (9)

✓ Θέμα 32

B

● B15186

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $\Gamma(1, -2)$ και $\Delta(9, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4, 2)$ και το μέσο N του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5, 0)$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8, 4)$. (8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (9)

✓ Θέμα 33

B

● B15252

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1, -2)$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, με υποτείνουσα την πλευρά AG . (9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (8)

✓ Θέμα 34

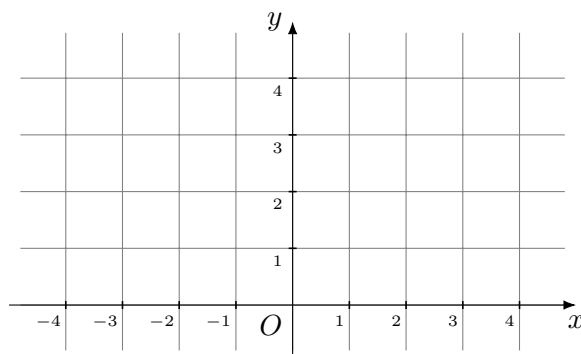
B

● B15317

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{v} \nparallel \vec{w}$. (12)

β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε τα διανύσματα \vec{v}, \vec{w} . (10)



ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα \vec{v}, \vec{w} . (3)

✓ Θέμα 35

B

● B15379

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (3, -1)$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$. (13)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (12)

✓ Θέμα 36

B

● B15463

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AI} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BI} = (1, -2)$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BI}$. (9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BI}|$. (8)

✓ Θέμα 37

B

● B15825

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 4 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3},$$

καθώς και το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$. (10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$. (7)

✓ Θέμα 38

B

● B15852

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$ και $\vec{\beta} = (-2, 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. (7)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (6)

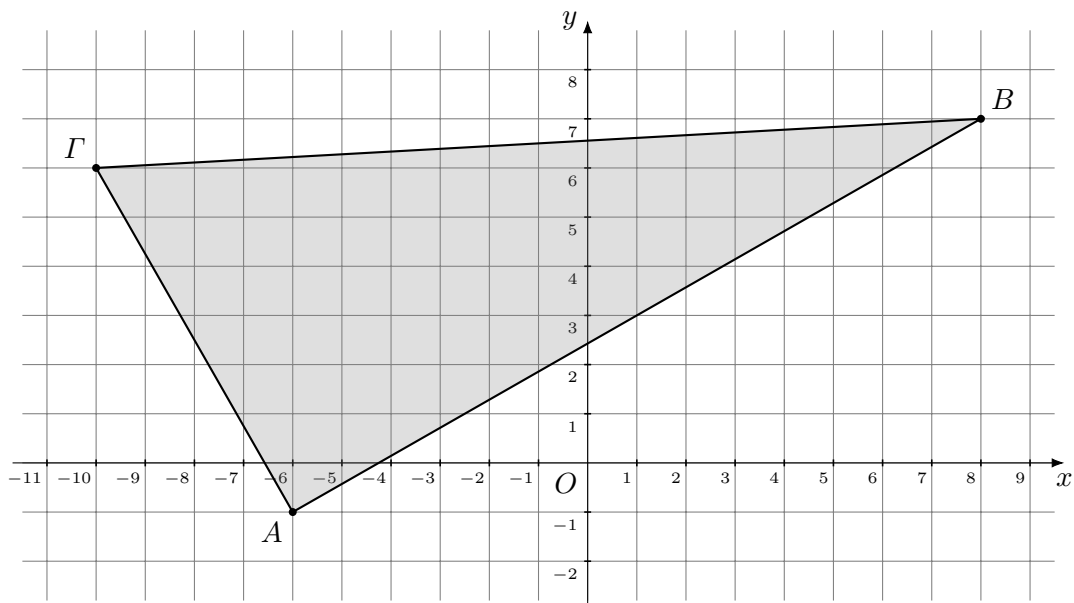
γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$. (12)

✓ Θέμα 39

B

● B15996

Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$ και $\Gamma(-10, 6)$ τα οποία ορίζουν τρίγωνο.



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματός τους $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$. (10)
- β) Ένας μαθητής βλέποντας το παραπάνω σχήμα ισχυρίστηκε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την ορθότητα του ισχυρισμού αυτού. (15)

✓ Θέμα 40

B

● B16141

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $a = 10$ και έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

- α) Να βρείτε τις γωνίες:

- i. $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{A\Gamma}})$ (2)
- ii. $(\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{B\Gamma}})$ (2)
- iii. $(\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{\Gamma A}})$ (2)
- iv. $(\overrightarrow{BM}, \widehat{\overrightarrow{\Gamma M}})$ (2)
- v. $(\overrightarrow{\Gamma M}, \widehat{\overrightarrow{\Gamma B}})$ (2)

- β) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

- i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$ (5)
- ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$ (5)
- iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$ (5)

✓ Θέμα 41

B

● B16144

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευρά $a = 4$ και γωνία $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\alpha) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (5)$$

$$\beta) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BF} \quad (5)$$

$$\gamma) \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO} \quad (5)$$

$$\delta) \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} \quad (5)$$

$$\epsilon) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FD} \quad (5)$$

✓ Θέμα 42

B

● B16426

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

$$\alpha) \text{ Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο } \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}). \quad (10)$$

$$\beta) \text{ Να βρείτε το διάνυσμα } \vec{\gamma} = (x, y), \text{ όταν } \vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \text{ και } |\vec{\gamma}| = \sqrt{5}. \quad (15)$$

✓ Θέμα 43

B

● B16427

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$.

$$\alpha) \text{ Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}. \quad (12)$$

$$\beta) \text{ Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα } \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ με τον άξονα } x'x. \quad (13)$$

✓ Θέμα 44

B

● B16428

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |\vec{\beta}| = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|.$$

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}. \quad (15)$$

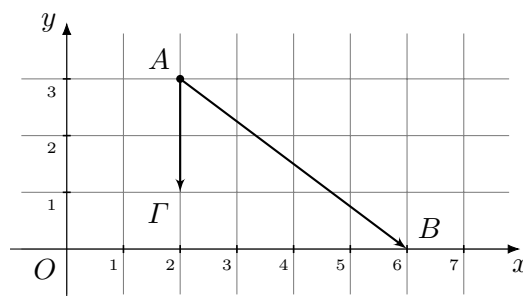
$$\beta) \text{ Να βρείτε τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων } \vec{\alpha}, \vec{\beta}. \quad (10)$$

✓ Θέμα 45

B

● B17075

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AF} .



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (0, -2)$. (12)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AG} . (13)

✓ Θέμα 46

B

● B18733

Δίνονται τα σημεία $A(4, 3)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(6, 0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AG} . (8)

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AG} είναι κάθετα. (8)

γ) Να αποδείξετε ότι για το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ισχύει $(MA) = (MB)$. (9)

✓ Θέμα 47

B

● B20685

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα \vec{u} , \overrightarrow{AB} είναι κάθετα και τα διανύσματα \vec{w} , \overrightarrow{AG} είναι παράλληλα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overrightarrow{AB} και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$. (9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overrightarrow{AG} και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$. (9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. (7)

✓ Θέμα 48

B

● B20732

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι ισχύει $|\vec{\beta}| = 4|\vec{\alpha}|$. (12)

β) Να βρείτε τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$. (7)

✓ Θέμα 49

B

● B20733

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα \overrightarrow{BG} συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$. (10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. (10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AG} είναι κάθετα. (5)

✓ Θέμα 50

B

● B20773

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (8)

β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$, να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε το διάνυσμα \vec{u} να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$. (9)

γ) Για $\kappa = 4$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος \vec{v} . (8)

✓ Θέμα 51

B

● B20888

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$|\vec{\alpha}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 5 \quad \text{και} \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3},$$

καθώς και το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (10)

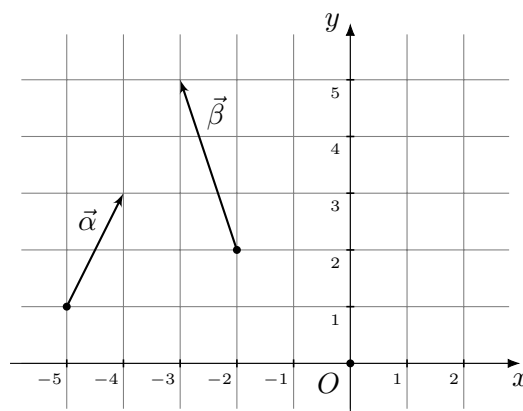
β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (15)

✓ Θέμα 52

B

● B20914

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



α) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, όπου O η αρχή των αξόνων. (8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{OA} , \vec{OB} και \vec{AB} . (9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο. (8)

✓ Θέμα 53

B

● B21682

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2) \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta}$. (14)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$. (11)

✓ Θέμα 54

B

● B22040

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$. (12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο ίσο με 1. (13)

✓ Θέμα 55

B

● B22170

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, -3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (7)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και \vec{v} είναι κάθετα. (9)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και \vec{v} είναι συγγραμμικά. (9)

✓ Θέμα 56

B

● B22554

Τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B ως προς την αρχή των αξόνων O είναι τα

$$\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}.$$

Επίσης, έστω ένα σημείο M τέτοιο, ώστε

$$\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB}).$$

α) i. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$. (8)

ii. Να αποδείξετε ότι $\vec{OM} = \vec{j}$. (8)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$. (9)

✓ Θέμα 57

Γ

● C18243

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 4 \quad \text{και} \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3},$$

καθώς και τα διανύσματα

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (5)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. (7)

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$. (8)

δ) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$. (5)

✓ Θέμα 58



● D15320

Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } |\vec{OG}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2. \quad (9)$$

$$\text{ii. } |\vec{AB}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2. \quad (9)$$

β) Αν $|\vec{OG}| = |\vec{AB}|$, να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $OAGB$ είναι ορθογώνιο. (7)

✓ Θέμα 59



● D18520

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι

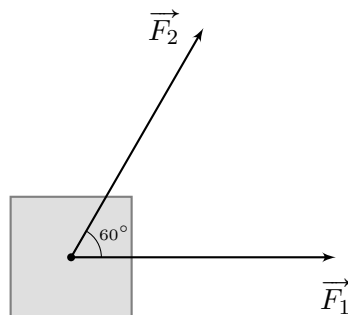
$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (6)$$

β) Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (5)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας του α. ερωτήματος. (4)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε ένα λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους οι οποίοι ασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις \vec{F}_1 και \vec{F}_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N και η γωνία μεταξύ τους είναι 60° .



Να σχεδιάσετε τη συνισταμένη δύναμη \vec{F} και να υπολογίσετε το μέτρο της. (10)

✓ Θέμα 60



● D18547

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε:

i. τα σημεία A, B, Γ να αποτελούν κορυφές τριγώνου. (8)

ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. (7)

β) Για $\lambda = -2$:

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (4)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (6)

✓ Θέμα 61

Δ

● D22063

α) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$. (5)

ii. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$. (5)

β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{\gamma}| = 1 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$. (5)

ii. $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$. (5)

iii. $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$. (5)

✓ Θέμα 62

Δ

● D22064

α) Αν $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι παραστάσεις $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$:

i. είναι αριθμοί ή διανύσματα;

ii. μπορούν να συγκριθούν;

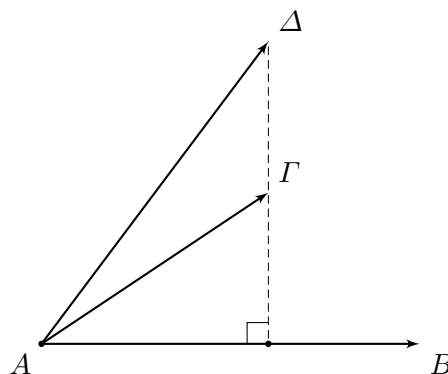
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (5)

β) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

ii. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

iii. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$



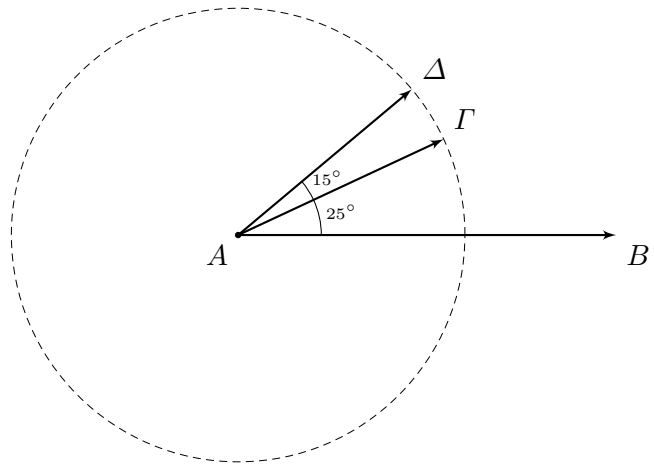
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (10)

γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. $\vec{AB} \cdot \vec{AF} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii. $\vec{AB} \cdot \vec{AF} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii. $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(10)

2

Η Ευθεία στο Επίπεδο

2.1 Εξίσωση Ευθείας

✓ Θέμα 63

B

● B15027

Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$.

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB . (7)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB . (8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB . (10)

✓ Θέμα 64

B

● B15044

Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(6, -1)$.

- α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB . (5)
- ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο $M(3, 2)$. (5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB . (15)

✓ Θέμα 65

B

● B15271

Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB . (8)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = x + 5$. (7)
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία AB . (10)

✓ Θέμα 66

B

● B15986

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 3)$.

- α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB . (6)
 ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = 2x - 1$. (6)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία AB . (13)

✓ Θέμα 67

B

● B16002

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(1, -1)$. (9)
 β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (6)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AG . (10)

✓ Θέμα 68

B

● B16766

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x - 3y = 4$ και $\varepsilon_2: 9x + 3y = 6$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. (8)
 β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$. (8)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$. (9)

✓ Θέμα 69

B

● B16774

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2, 5)$, $B(3, 6)$ και $\Gamma(-1, -2)$.

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$. (7)
 β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από την κορυφή A . (9)
 γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$. (9)

✓ Θέμα 70

B

● B18236

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές AG και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες

$$\varepsilon_1: y = -x + 4 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

αντίστοιχα, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(0, 4)$. (12)

- β) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $ΑΓ$. (6)
- ii. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από την κορυφή B . (7)

✓ Θέμα 71

B

● B18351

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 5)$ και $B(3, 3)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB . (8)
- β) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB . (8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB . (9)

✓ Θέμα 72

B

● B20868

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ και Γ μιας ευθείας ε .

- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε . (10)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. (5)
- γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ στο οποίο η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$. (10)

✓ Θέμα 73

B

● B21162

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, -6)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB . (8)
- β) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB . (8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB . (9)

✓ Θέμα 74

B

● B21965

Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB . (7)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ζ του ευθύγραμμου τμήματος AB . (8)
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ζ και ε , αν είναι

$$\zeta: y = x - 4 \quad \text{και} \quad \varepsilon: y = 2x - 6. \quad (10)$$

✓ Θέμα 75

B

● B22047

Δίνεται τετράγωνο $A_1A_2A_3A_4$ και έστω ότι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^*$ είναι οι κλίσεις των ευθειών A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 και A_4A_1 αντίστοιχα.

α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις κλίσεις των ανά δύο παράλληλων ευθειών; (15)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$. (10)

✓ Θέμα 76

B

● B22049

Δίνεται τετράγωνο $A_1A_2A_3A_4$ και έστω ότι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^*$ είναι οι κλίσεις των ευθειών A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 και A_4A_1 αντίστοιχα.

α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των κάθετων πλευρών του τετραγώνου. Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις κλίσεις των ανά δύο κάθετων ευθειών; (15)

β) Να αποδείξετε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$. (10)

✓ Θέμα 77

B

● B22173

Δίνεται τετράγωνο $ABΓO$ με κορυφές τα σημεία $A(0,4), B(4,4), Γ(4,0)$ και $O(0,0)$. Στη διαγώνιο $ΑΓ$ παίρνουμε σημείο Z τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$$

και έστω Δ το μέσο της πλευράς $BΓ$.

α) Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ . (7)

ii. τις συντεταγμένες του σημείου Z . (9)

β) Αν $\Delta(4,2)$ και $Z(3,1)$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔZ είναι κάθετη στην ευθεία $ΑΓ$. (9)

✓ Θέμα 78

Δ

● D14978

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(3,3)$.

α) Να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του τυχαίου σημείου $M(x,y)$ από τα σημεία A, B αντίστοιχα. (6)

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι αποστάσεις d_1 και d_2 , ώστε το σημείο M να ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB . (4)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB . (8)

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΣAB να είναι ισόπλευρο. (7)

✓ Θέμα 79

Δ

● D15029

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1, \sqrt{3})$ και $B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA , καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$. (6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB , καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, με $\hat{A} = 90^\circ$. (7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. (6)

✓ Θέμα 80

Δ

● D15275

Θεωρούμε το σημείο $M(2,1)$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση των ευθειών ε που διέρχονται από το σημείο M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ . (2)

ii. Για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε σχηματίζουν τρίγωνο με τους άξονες; (5)

β) Έστω ότι οι ευθείες ε τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων OA και OB συναρτήσει του λ . (6)

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες ε σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες. (6)

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται σε κάθε περίπτωση. (6)

✓ Θέμα 81

Δ

● D15475

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τα σημεία $A(2,1)$ και $B(4,3)$ παριστάνουν τη θέση δύο εργοστασίων που βρίσκονται κοντά σε μια ακτή στην οποία πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα που θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια. (8)

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου N της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα, ώστε να ισαπέχει από τα δύο εργοστάσια. (10)

γ) Αν $N(4,1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό. (7)

✓ Θέμα 82

Δ

● D15658

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. (4)

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, το σημείο B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα πέρατα των διανυσμάτων είναι τα σημεία $A(4, -1)$ και $B(3, 2)$. (5)

ii. Να αποδείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$. (6)

iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , αν το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και ισχύει ότι $|\overrightarrow{K\Gamma}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$. (10)

✓ Θέμα 83

Δ

● D17078

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A, B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$. (6)

ii. Τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στην ευθεία AB , αν και μόνο αν

$$\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}. \quad (7)$$

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, όταν και μόνο όταν

$$\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}. \quad (7)$$

β) Να αιτιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο».

(5)

✓ Θέμα 84

Δ

● D18568

Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου. (4)

β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E . (10)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες. (5)

✓ Θέμα 85

Δ

● D21160

Δίνεται τρίγωνο $OB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $O(0,0)$, $B(\kappa,0)$ και $\Gamma(0,2\kappa)$, όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου $OB\Gamma$ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $OB\Delta E$ και $OGZH$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\Gamma\Delta$ και BZ . (10)

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ζ του τριγώνου $OB\Gamma$ που άγεται από την κορυφή O . (7)

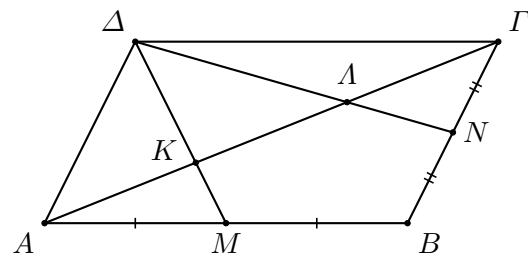
γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και ζ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (8)

✓ Θέμα 86

Δ

● D22065

Δίνονται σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$ και $\Delta(2,4)$. Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ τα K, Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN τη διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N . (5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma$, ΔM , ΔN και τις συντεταγμένες των σημείων K, Λ . (10)

δ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή τη χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα. (5)

2.2 Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

✓ Θέμα 87

B

● B15657

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

α) Να βρείτε το κοινό σημείο M των ευθειών ε_1 και ε_2 . (12)

- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (13)

✓ Θέμα 88

B

● B21662

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, 1)$ και $B(-3, 5)$.

- α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B . (10)
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το σημείο B και είναι κάθετη στην ευθεία ε . (5)
- ii. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και ε' . (5)
- iii. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ε . (5)

✓ Θέμα 89

B

● B21964

Δίνεται το σημείο $A(4, -2)$ και η ευθεία $\varepsilon_1: x - y + 2 = 0$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 . (8)
- β) Να βρείτε το σημείο τομής B των ευθειών ε_1 και $\varepsilon_2: y = -x + 2$. (8)
- γ) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία ε_1 . (9)

✓ Θέμα 90

B

● B22059

Δίνεται το σημείο $A(1, -3)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x + 6y = 1$.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο A δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε . (10)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (15)

✓ Θέμα 91

B

● B22071

Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις

$$x + 2y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad 2x + y + 5 = 0$$

αντίστοιχα. Επίσης, το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1, 2)$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες $(-3, 1)$. (8)
- ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(5, 3)$. (7)
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ του παραλληλογράμμου. (10)

✓ Θέμα 92

B

● B22072

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(1): \lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0 \quad \text{και} \quad (2): (3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0.$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (15)
- β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες. (10)

✓ Θέμα 93

B

● B22092

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(1,4)$. Η πλευρά $A\Delta$ και η διαγώνιος $B\Delta$ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$3x - 2y + 5 = 0 \quad \text{και} \quad y = x + 2.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $(-1, 1)$. (12)
- β) Αν οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$. (13)

✓ Θέμα 94

B

● B22171

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y = 5$ και $\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$.

- α) Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών ε_1 και ε_2 . (10)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 . (10)
- γ) Να βρείτε ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία ε_1 . (5)

✓ Θέμα 95

Γ

● C15178

Δίνεται η εξίσωση (1): $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. (8)
- ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (2)
- β) i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της; (3)
- ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της; (3)

- γ) Να βρείτε για ποια τιμή του μ προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της; (9)

✓ Θέμα 96

Δ

● D14970

Θεωρούμε την οικογένεια ευθειών $\varepsilon_\lambda: y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2, \lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν για $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$. Στη συνέχεια, να βρείτε το κοινό σημείο M των δύο ευθειών. (7)

Έστω $M(1, -2)$.

- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες ε_λ διέρχονται από το σημείο M . (5)

- γ) i. Να βρείτε τα σημεία τομής A, B των ευθειών ε_λ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (6)
ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}$. (7)

✓ Θέμα 97

Δ

● D15004

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(8, 5)$. (5)

Έστω $\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0$.

- β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και $\varepsilon_2: 7x - y - 1 = 0$ είναι 45° . (8)

- γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 . (4)

- δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 , έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3 . (8)

✓ Θέμα 98

Δ

● D15253

Δίνεται η εξίσωση (1): $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0, \mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ε . (5)

- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

i. είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$. (4)

ii. είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$. (4)

iii. διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (4)

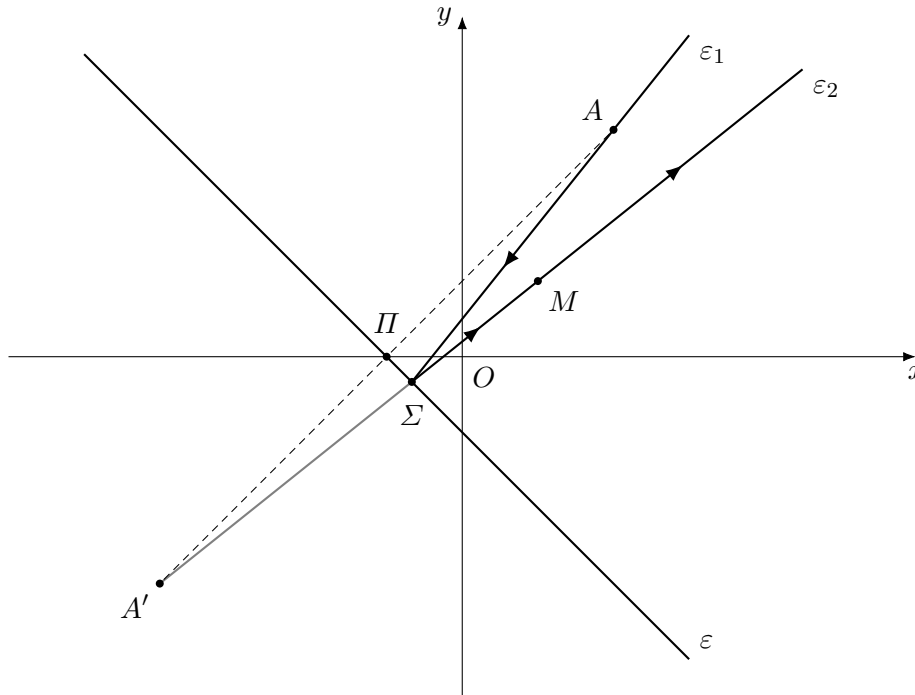
- γ) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο. (8)

✓ Θέμα 99



● D15439

Μια φωτεινή ακτίνα ε_1 , διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία ε με εξίσωση $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



- α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία ε είναι το σημείο $H(-1,0)$. (7)
- ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία ε είναι το σημείο $A'(-4,-3)$. (5)
- β) i. Αν η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία ε_2 η οποία διέρχεται από τα σημεία A', Σ, M , τότε να βρείτε την εξίσωσή της. (4)
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας ε_1 πάνω στην ευθεία ε . (5)
- γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας ε_1 . (4)

✓ Θέμα 100



● D16003

Θεωρούμε την οικογένεια ευθειών $\varepsilon_\alpha: (\alpha - 4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν για $\alpha = 0$ και $\alpha = 1$. Στη συνέχεια, να βρείτε το κοινό σημείο M των δύο ευθειών. (8)
- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες ε_α διέρχονται από το σημείο M . (6)
- γ) Έστω ότι μία από τις ευθείες ε_α τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία A, B αντίστοιχα.

- i. Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha < 4$. (6)
- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $(OA) = 2(OB)$. (5)

✓ Θέμα 101

Δ

● D16477

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, οι ευθείες

$$\varepsilon_\lambda: \lambda x + (1 - \lambda)y + 2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

παριστάνουν τις φωτεινές ακτίνες που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Επίσης, ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0, 0)$.

- α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ . (10)
- ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από τον φάρο προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο. (5)
- β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ και η φωτεινή ακτίνα που το φωτίζει έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι μήκους 4 ναυτικών μιλίων. Να βρείτε τις συντεταγμένες του ρυμουλκού πλοίου P . (10)

✓ Θέμα 102

Δ

● D18244

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

- α) Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε_1 και ε_2 στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (6)
- β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μία από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα x' . (6)
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 15° . (3)
- δ) Να αποδείξετε ότι $\text{syn } 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$. (10)

✓ Θέμα 103

Δ

● D21652

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(1): \lambda x + y = 2\lambda \quad \text{και} \quad (2): x + \lambda y = \lambda + 1.$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (6)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται. (6)
- γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

- i. Να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών ε_λ και η_λ . (7)
- ii. Αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$, να αποδείξετε ότι το σημείο M κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$. (6)

2.3 Εμβαδόν Τριγώνου

✓ Θέμα 104

B

● B15440

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AG} . (9)
- β) i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου. (8)
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (8)

✓ Θέμα 105

B

● B16194

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: 8x + y - 28 = 0, \quad \varepsilon_2: x - y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_3: 3x + 4y + 5 = 0.$$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών ε_1 και ε_2 . (9)
- β) Αν $M(3,4)$, τότε:
- i. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{OM} , όπου O η αρχή των αξόνων. (8)
- ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε_3 . (8)

✓ Θέμα 106

B

● B16425

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2: x = \frac{3}{2}y + 9$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. (12)
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 . (13)

✓ Θέμα 107

B

● B16759

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: x - 2y = -1, \quad \varepsilon_2: 2x + y = 4 \quad \text{και} \quad \varepsilon_3: y = -1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$. (9)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_3 . (8)

✓ Θέμα 108

B

● B16769

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(1, 7)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(3, 3)$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (9)

β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M . (8)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM . (8)

✓ Θέμα 109

B

● B16771

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $\Gamma(4, -1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(5, 0)$. (9)

β) i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (8)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (8)

✓ Θέμα 110

B

● B16810

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $\Gamma(0, -2)$ και $\Delta(8, 0)$.

α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Delta\Gamma$. (15)

✓ Θέμα 111

B

● B17805

Δίνεται τρίγωνο AOB με κορυφές τα σημεία $A(3, 4)$, $B(7, 1)$, $O(0, 0)$ και έστω $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ σημείο της πλευράς AO .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{OA} και $\overrightarrow{A\Delta}$. (7)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$. (9)

γ) Αν $(OAB) = \frac{15}{2}$, να αποδείξετε ότι $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$. (9)

✓ Θέμα 112

B

● B18240

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x + 3$.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες ε και η . (10)

✓ Θέμα 113

B

● B18979

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 5$ και $\varepsilon_2: 4x + 6y = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. (10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε_1 . (5)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2 . (10)

✓ Θέμα 114

B

● B20864

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + y + 2 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. (12)

β) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 . (5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 . (8)

✓ Θέμα 115

B

● B20885

Μια ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . (12)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία ε και τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι ίσο με 8. (13)

✓ Θέμα 116

B

● B20926

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε , ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της. (8)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (8)

- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση των δύο σημείων A, B και να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία ε είναι το σημείο B . (9)

✓ Θέμα 117

B

● B21260

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1, 1), \Gamma(-1, 3)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(5, 10)$ ανήκει στην ευθεία ε . (5)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AG} . (10)
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (10)

✓ Θέμα 118

Γ

● C15152

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3), B(-2, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από το σημείο B . (5)
- β) Για ποιες τιμές του α η απόσταση (AB) είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε ; (8)
- γ) Για $\alpha = 4$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$. (12)

✓ Θέμα 119

Δ

● D14984

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο όλων των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB , ώστε να ισχύει $(AMB) = 12$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο S αποτελείται από τα σημεία των παράλληλων ευθειών

$$\varepsilon_1: 4x - 3y - 9 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 4x - 3y + 7 = 0. \quad (9)$$

- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλος των ευθειών ε_1 και ε_2 . (9)

- γ) Θεωρούμε τα σημεία M_1, M_2 των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα, ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Με τι ισούται το εμβαδόν του; Πόσα τέτοια τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν τα X, Y είναι σημεία των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα, που έχουν το ίδιο εμβαδόν με το τετράπλευρο AM_1BM_2 ; (7)

✓ Θέμα 120

Δ

● D15194

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1), B(4, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (7)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $BΓ$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$. (9)

γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας ε τέτοιο, ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ; (9)

✓ Θέμα 121

Δ

● D15273

Θεωρούμε τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$, $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$. (5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$. (7)

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πώς αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (8)

✓ Θέμα 122

Δ

● D15380

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (8)

β) Για $\alpha = 4$:

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$. (8)

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (9)

✓ Θέμα 123

Δ

● D15433

Δύο οικισμοί βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος που ορίζει η ευθεία $\delta: x + y - 1 = 0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ :

i. ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από αυτόν. (8)

ii. υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. (7)

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο δ , αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με 8. (10)

✓ Θέμα 124

Δ

● D15681

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$, όπου α, β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και ότι το σημείο M είναι το μέσο της βάσης OA . (6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι

$$OB: 2\beta x - \alpha y = 0 \quad \text{και} \quad AB: 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0. \quad (8)$$

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$. (8)

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδείχθηκε στο γ. ερώτημα; (3)

✓ Θέμα 125

Δ

● D15692

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση (1) γράφεται στη μορφή $(x - y)^2 - (x - y) - 6 = 0$. (4)

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών τις οποίες και να βρείτε. (4)

Έστω $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y + 2 = 0$ οι δύο παράλληλες ευθείες.

β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις ευθείες ε_1 και ε_2 . (10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών ε_1 και ε_2 . (7)

✓ Θέμα 126

Δ

● D15987

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB έχει εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 1$. (8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και την αρχή των αξόνων. (8)

γ) Να εξετάσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB . (9)

✓ Θέμα 127

Δ

● D16057

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ . (5)
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει από το σημείο B απόσταση ίση με 1 έχει εξίσωση $\varepsilon: 15x - 8y - 30 = 0$. (8)
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία ζ , εκτός από την ε , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει από το σημείο B απόσταση ίση με 1. (5)
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε, ζ . (7)

✓ Θέμα 128

Δ

● D17694

Στον χάρτη μιας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ένα σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις έχουν συντεταγμένες $A(3,6)$ και $B(7,-2)$.

- α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της σιδηροδρομικής γραμμής. (12)
- β) Πάνω στη σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ , έτσι ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τις κωμοπόλεις A, B και τον σταθμό Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στον χάρτη. (13)

✓ Θέμα 129

Δ

● D17695

Υποθέτουμε ότι σε ένα επίπεδο, εφοδιασμένο με ένα σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B . Κάθε χρονική στιγμή t , με $t \geq 0$, η θέση των σημείων είναι

$$A(t-1, 2t-1) \quad \text{και} \quad B(3t-1, -4t-1).$$

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα σημεία A και B . (8)
- β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα σημεία A και B ταυτίζονται; (7)
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση των δύο σημείων A, B τη χρονική στιγμή $t = 2$. (5)
- δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon: 4x + 3y + 7 = 0$ είναι ίση με 6. (6)

✓ Θέμα 130

Δ

● D18732

Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(7, 1)$ και $O(0, 0)$.

α) Αν, επιπλέον, δίνονται τα σημεία $\Gamma\left(2, \frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3}, 3\right)$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} \text{ και } \overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}. \quad (6)$$

$$\text{ii. } \Gamma\Delta \parallel OB. \quad (5)$$

$$\text{iii. } (A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (AOB). \quad (5)$$

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α. ερωτήματος, αν για δύο σημεία Γ, Δ ισχύει ότι

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AO} \text{ και } \overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AB},$$

$$\text{όπου } \nu \in \mathbb{N}^*, \text{ να αποδείξετε ότι } (A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 (AOB). \quad (9)$$

✓ Θέμα 131

Δ

● D20655

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(3, -1)$ και $\Gamma(-2, 0)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά. (7)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με $\frac{9}{2}$. (3)

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $\Delta(x, y)$ για τα οποία ισχύει

$$(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma). \quad (7)$$

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ είναι οι ευθείες

$$\varepsilon_1: x - 4y - 7 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: x - 4y + 11 = 0,$$

τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλες. (3)

ii. Να αιτιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν μεσοπαράλληλο την ευθεία $A\Gamma$ ».

 (5)

✓ Θέμα 132

Δ

● D20724

Στον χάρτη μιας περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ένα σύστημα συντεταγμένων, δύο πόλεις έχουν συντεταγμένες $A(8, 1)$ και $B(-7, 4)$. Η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ παριστάνει τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους των δύο πόλεων. Για τον λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής ε ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π .

- α) Να βρείτε ποια από τις πόλεις A και B βρίσκεται πλησιέστερα στη γραμμή ε . (6)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της πεζογέφυρας Π , αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο στην πόλη B . (7)
- γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ , ώστε:
- ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A και B . (6)
 - το οδικό δίκτυο που θα συνδέει τον σταθμό Σ με τις πόλεις A και B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος. (6)

✓ Θέμα 133



● D20728

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

- α) Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε_1 και ε_2 στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (6)
- β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μία από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα $x'x$. (6)
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου $O(0,0)$, $A(3, \sqrt{3})$ και $B(3,3)$. (6)
- δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. (7)

Δίνεται ότι:

Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται και από τον (τριγωνομετρικό) τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \eta\mu \Gamma,$$

όπου α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου.

✓ Θέμα 134



● D20861

Δίνεται το σημείο $M(-2,2)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε που διέρχονται από το σημείο M . (6)
- β)
- Να βρείτε ποιες από τις ευθείες ε σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy . (4)
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο εμβαδού ίσου με 8. (10)
- γ) Αν $\varepsilon_1: y = x + 4$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους που άγεται από την κορυφή O του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε_1 με τους άξονες. (5)

✓ Θέμα 135

Δ

● D20939

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής

$$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0, \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες. (4)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π . (6)

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0, 0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό. (4)

δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό O , υπάρχουν δύο επιλογές:

1η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό O με την πηγή.

2η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό O με έναν από τους έξι αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Αν το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής. (8)

ii. Πώς εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα του προηγούμενου υποερωτήματος; (3)

✓ Θέμα 136

Δ

● D22067

Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x$ με $\lambda > 0$.

α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι

$$\delta_1: y = \lambda_1 x \quad \text{με} \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (12)$$

β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι

$$\delta_2: y = \lambda_2 x \quad \text{με} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (7)$$

γ) Αν $\lambda = 1$, να αποδείξετε ότι $\varepsilon\phi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$. (6)

✓ Θέμα 137



● D22073

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A(2, 6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i. Αν το πλοίο κινείται σε ευθεία γραμμή, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (7)
- ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (5)
- β) Αν, τελικά, το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, τότε:
- i. Να βρείτε ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι. (6)
- ii. Να βρείτε σε ποιο σημείο βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (7)

✓ Θέμα 138



● D22262

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(5, -1)$.

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$. (5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από την κορυφή A . Στη συνέχεια, να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας $B\Gamma$ που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A . (8)
- δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει

$$(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma). \quad (7)$$

✓ Θέμα 139



● D22265

Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(\mu - 1, 3\mu - 2)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$. (6)
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου. (6)
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό. (5)
- δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A απέχει απόσταση ίση με 1. (8)

✓ Θέμα 140



● D22266

Δίνεται η ευθεία $\zeta: 6x - 8y + 3 = 0$ και η εξίσωση

$$(1): (2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (6)
- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (7)
- γ) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η ευθεία ε που ορίζεται από την εξίσωση (1) να είναι παράλληλη στην ευθεία ζ . Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας ε ; (7)
- δ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $M(1, 3)$ από την ευθεία ζ . (5)

3

Κωνικές Τομές

3.1 Ο Κύκλος

✓ Θέμα 141

B

● B15028

Έστω ο κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - 1 = 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (8)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία ε είναι ίση με 2. (9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο C . (8)

✓ Θέμα 142

B

● B15680

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$. (10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι ίση με $\frac{12}{5}$. (10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. (5)

✓ Θέμα 143

B

● B15994

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (13)

β) Να σχεδιάσετε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο C και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. (12)

✓ Θέμα 144

B

● B16773

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$. (8)

β) Αν $C: x^2 + y^2 = 5$ ο κύκλος του α. ερωτήματος, τότε:

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του A . (9)

ii. Να βρείτε το σημείο B που είναι αντιδιαμετρικό του σημείου A ως προς τον κύκλο C . (8)

✓ Θέμα 145

B

● B16808

Δίνονται τα σημεία $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθύγραμμου τμήματος AB . (8)

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C που έχει κέντρο το σημείο K και διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο Γ . (9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (8)

✓ Θέμα 146

B

● B17317

Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου C . (5)

β) Αν $K(1, 2)$, να αποδείξετε ότι $d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}$. (13)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. (7)

✓ Θέμα 147

B

● B18238

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(-3, 5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθύγραμμου τμήματος AB . (7)

β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$. (8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AB . (10)

✓ Θέμα 148

B

● B18239

Δίνεται το σημείο $K(-3, 1)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία ε είναι ίση με 2. (6)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία ε . (9)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο C και την ευθεία ε . (10)

✓ Θέμα 149

B

● B18241

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων:

α) τον κύκλο C , (9)

β) τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από τα σημεία τομής του με τον άξονα $y'y$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους, (8)

γ) τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από τα σημεία τομής του με τον άξονα $x'x$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (8)

✓ Θέμα 150

B

● B18700

Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 5.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (10)

β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C . (5)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του A . (10)

✓ Θέμα 151

B

● B18749

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(5, 6)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(12, 2)$ και το ύψος του $A\Delta$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$. (10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ . (5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Δ . (10)

✓ Θέμα 152

B

● B18968

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3, 4)$ και ακτίνα $\rho = 5$. (10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y = 0$ είναι ίση με 5. (8)

γ) Να αιτιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται». (7)

✓ Θέμα 153

B

● B19039

Δίνεται η εξίσωση (1): $(x - 1)(x + 3) + (y + 1)(y - 3) = -4$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $\rho = 2$. (9)

β) i. Να βρείτε τα σημεία A, B του κύκλου (K, ρ) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 . (8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B είναι αντιδιαμετρικά ως προς τον κύκλο (K, ρ) . (8)

✓ Θέμα 154

B

● B20890

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3, -3)$, $B(2, -8)$ και $\Gamma(7, -3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$. (10)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$. (15)

✓ Θέμα 155

B

● B21962

Δίνονται τα σημεία $A(0, 3)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(1, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή. (13)

β) Να βρείτε το μέσο K της υποτεινουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. (5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ . (7)

✓ Θέμα 156

B

● B22056

Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $x^2 + y^2 \leq 9$.

α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (13)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο A στο σύνολο Ω τέτοιο, ώστε $|\overrightarrow{OA}| = 4$, όπου O η αρχή των αξόνων. (12)

✓ Θέμα 157

B

● B22147

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = 2$. (9)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K, ρ) . (8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K, ρ) στο σημείο του A . (8)

✓ Θέμα 158

B

● B22172

Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε είναι ίση με 2. (8)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε . (10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία ε . (7)

✓ Θέμα 159

B

● B22279

Δίνεται η εξίσωση (1): $(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $\rho = 2$. (9)

β) Να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K, ρ) . (7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K, ρ) . (9)

✓ Θέμα 160

Δ

● D14954

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$(1): \mu x - y - \mu = 0 \quad \text{και} \quad (2): (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. (6)

β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 45° για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. (10)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 κινείται στον μοναδιαίο κύκλο για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$. (9)

✓ Θέμα 161

Δ

● D15030

Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

- α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C . (6)
- β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία ε δεν έχουν κοινά σημεία. (6)
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες η_1, η_2 που είναι παράλληλες στην ευθεία ε και εφάπτονται στον κύκλο C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (7)
- δ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών η_1 και η_2 . (6)

✓ Θέμα 162



● D15042

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ και M είναι συνευθειακά. (8)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$. (2)
- γ) Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι, ώστε

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda.$$

Αν, επιπλέον, είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και \overrightarrow{AB} ισχύει $\kappa \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$. (7)
- ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (8)

✓ Θέμα 163



● D15080

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(1): x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \quad \text{και} \quad (2): x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0.$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν κύκλους C_1, C_2 με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα. (6)
- β) i. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$. (5)
- ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C_1 . (5)
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 . (9)

✓ Θέμα 164



● D15081

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad \text{και} \quad C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0.$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2}, 0)$, $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα. (8)
- β) i. Να αποδείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2 . (10)
- ii. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τους δύο κύκλους και τις δύο κοινές εφαπτομένες του προηγούμενου υποερωτήματος. (7)

✓ Θέμα 165

Δ

● D15082

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8 \quad \text{και} \quad C_2: (x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 18.$$

- α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, όπου K, Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (5)
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $K\Lambda$. (5)
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων. (7)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των δύο κύκλων. (8)

✓ Θέμα 166

Δ

● D15177

Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$, $B(0, -1)$ και ο κύκλος

$$C_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.$$

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $N(x, y)$ για τα οποία ισχύει

$$\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = 4$$

ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: y = -x - 2$. (7)

- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $P(x, y)$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$$

ανήκουν σε κύκλο C_2 με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2\sqrt{2}$. (6)

- γ) i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση των σημείων τους. (6)
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 . (6)

✓ Θέμα 167

Δ

● D15189

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(2, -2)$.

α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB καθώς και το μέσο του K . (6)

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση

$$C: x^2 + (y + 1)^2 = 5. \quad (6)$$

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες

$$\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0. \quad (7)$$

δ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται στον κύκλο C . (6)

✓ Θέμα 168

Δ

● D15272

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. (6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται εκτός του κύκλου C . (7)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο M . (12)

✓ Θέμα 169

Δ

● D15432

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2\kappa y + 4 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο C . (7)

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου C . (3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκουν τα κέντρα των κύκλων C . (7)

δ) Για $\kappa = 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου C στο σημείο του $\Gamma(2, 2)$. (8)

✓ Θέμα 170

Δ

● D15628

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 + (4 - 2\kappa)x - 2(1 + \kappa)y + 5 - 2\kappa = 0$, $\kappa > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa > 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο $M(\kappa - 2, \kappa + 1)$ και ακτίνα $\rho = \kappa\sqrt{2}$. (10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $\kappa > 0$. (7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C για κάθε $\kappa > 0$. (8)

✓ Θέμα 171



● D15646

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9 \quad \text{και} \quad C_2: (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

α) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων. (8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ μεταξύ των δύο κύκλων. (7)

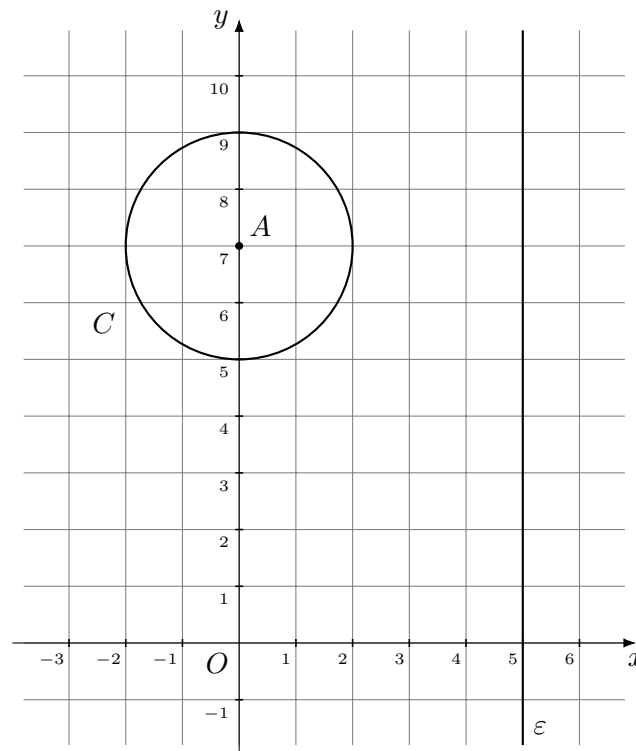
γ) Να βρείτε τα σημεία M της ευθείας $y = x$ για τα οποία ισχύει $(MB\Gamma) = \frac{21}{2}$. (10)

✓ Θέμα 172



● D15791

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο κύκλος C με κέντρο το σημείο A και η ευθεία $\varepsilon: x = 5$.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (3)

β) Έστω $B(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο B και ακτίνα ίση με 2. (6)

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου AB συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου B . (6)

γ) Να βρείτε όλους του κύκλους με κέντρο το σημείο B και ακτίνα ίση με 2 που εφάπτονται στην ευθεία ε και εξωτερικά του κύκλου C . (10)

✓ Θέμα 173

Δ

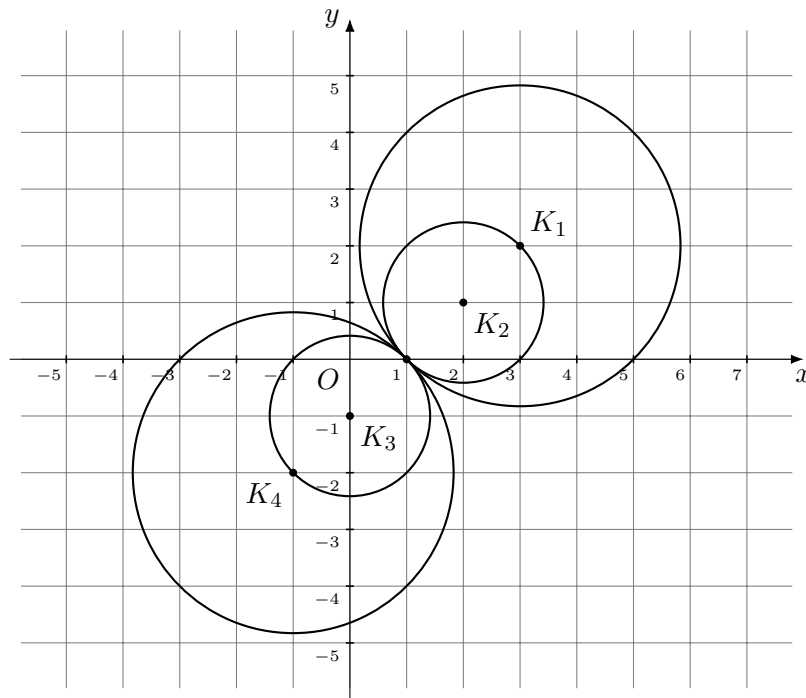
● D15826

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ . (7)

β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$; (3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ .



Αξιοποιώντας το σχήμα:

- i. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την εξίσωση (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (5)
- ii. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (5)
- iii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την εξίσωση (1). (5)

✓ Θέμα 174



● D15993

Δίνεται η εξίσωση (1): $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (3)
- β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (10)
- γ) Αν $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι της εξίσωσης (1), να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων. (7)
- δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, επαληθεύει την εξίσωση (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$. (5)

✓ Θέμα 175



● D16191

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(5, 5)$.

- α) Αν για το σημείο $M(x, y)$ ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:
- Το σημείο M βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση

$$(1): x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0. \quad (8)$$
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C . (3)
- β) Αν $K(3, 3)$ είναι το κέντρο του κύκλου C και $\rho = 2\sqrt{2}$ η ακτίνα του, τότε:
- Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία $\varepsilon: \lambda x + y = 2$ εφαπτεται στον κύκλο C . (7)
 - Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία ε σχηματίζει με την ευθεία AB γωνία 45° ; (7)

✓ Θέμα 176



● D18237

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(1, 4)$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς $B\Gamma$. (7)
- Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.
- γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας ε που να ισαπέχει από τα σημεία A και B . (7)
- δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. (5)

✓ Θέμα 177

Δ

● D18247

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha, \beta > 0$.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α, β :

i. τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB . (5)

ii. την απόσταση (OM) . (5)

β) Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$. (5)

ii. Να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί. (3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB . (7)

✓ Θέμα 178

Δ

● D18415

Δίνεται η οικογένεια κύκλων $C_\lambda: (x-3\lambda)^2 + (y+2\lambda)^2 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+3y=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων C_λ ανήκουν στην ευθεία ε . (6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 που απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με 2 και έχουν μεσοπαράλληλο την ευθεία ε . (7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες ε_1 και ε_2 . (6)

✓ Θέμα 179

Δ

● D18416

Δίνεται η εξίσωση (1): $x(x-4) + y(y-2) = 2(x+y-4)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. (6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου C . (4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι παράλληλες στη διάμετρο AB . (9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η ευθεία $\eta: y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία Γ και Δ με $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$. (6)

✓ Θέμα 180

Δ

● D18467

Δίνεται η εξίσωση (1): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2(x + 3)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο $K(2, -2)$ και ακτίνα $\rho = 3$. (6)
- β) Να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C . (4)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία A και B , έτσι ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής AB . (8)
- δ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = x$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου KAB . (7)

✓ Θέμα 181

Δ

● D18521

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή. (6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ . (9)
- γ) Αν ο κύκλος C έχει εξίσωση

$$C: \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2},$$

να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (10)

✓ Θέμα 182

Δ

● D18567

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C . (5)
- ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (12)
- β) Αν B, Γ είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτομένες που διέρχονται από το σημείο A , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABO\Gamma$. (8)

✓ Θέμα 183

Δ

● D18569

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$.

- α) Αν A και A' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' αντίστοιχα, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και A' έχουν συντεταγμένες $(1,0)$ και $(-1,0)$ αντίστοιχα. (5)
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο A και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° . (6)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και σε ένα σημείο B , να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος ίσο με $\sqrt{3}$. (8)

Έστω $\varepsilon: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από τα σημεία A' και B . (6)

✓ Θέμα 184

Δ

● D18570

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία $\eta: 3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

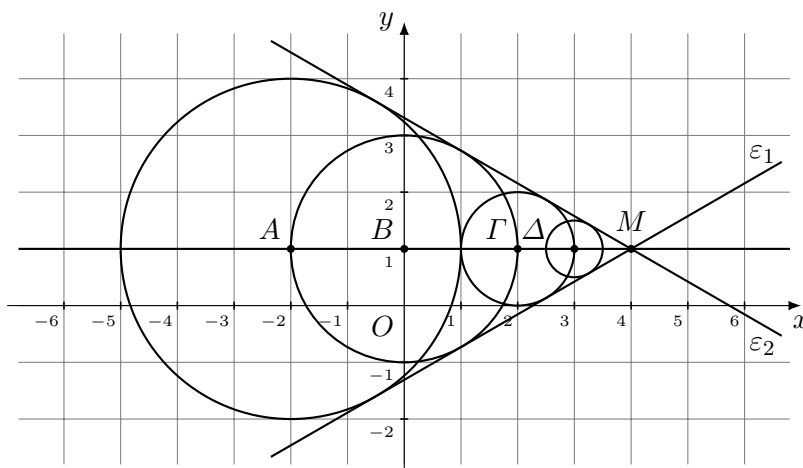
- α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C . (5)
- β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C σε δύο διαφορετικά σημεία A, B , τότε:
- i. Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 35$. (7)
- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C . (4)
- iii. Να βρείτε σημείο Γ του κύκλου C τέτοιο, ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB . (9)

✓ Θέμα 185

Δ

● D18745

Κατά τη μελέτη ενός υδρόβιου εντόμου, επιστήμονες κατέγραψαν στιγμιότυπα από κάθε του προσγείωση στο νερό, όπου σχηματίζονται ομόκεντροι κύκλοι με κέντρα τα σημεία A, B, Γ, Δ και ακτίνες ίσες με $3, 2, 1, \frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Τα στιγμιότυπα από τις εναέριες λήψεις αποτυπώθηκαν σε ένα σύστημα συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το έντομο κινούμενο σε ευθεία περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ και καταλήγει στο σημείο M .



α) Να βρείτε την εξίσωση της πορείας του εντόμου. (4)

β) i. Να αποδείξετε ότι η ευθεία

$$\varepsilon_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}$$

είναι κοινή εφαπτομένη των τεσσάρων κύκλων. (7)

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο M βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε_1 . (4)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης ε_2 των τεσσάρων κύκλων. (10)

✓ Θέμα 186

Δ

● D18781

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{και} \quad C_2: x^2 + y^2 = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση του κύκλου C_1 γράφεται στη μορφή $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. (5)

ii. Οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά. (4)

β) i. Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων. (6)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εσωτερικής κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων. (4)

γ) Αν τα σημεία M_1, M_2 διατρέχουν τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά. (6)

✓ Θέμα 187

Δ

● D18871

Δίνεται το σημείο $A(3, 1)$ και ο κύκλος C με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του σημείου. (7)

β) i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο C και διέρχονται από το σημείο A έχουν εξισώσεις

$$\varepsilon_1: 2x - y = 5 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: x + 2y = 5. \quad (10)$$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $B\hat{A}G$, όπου B και G είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών ε_1 και ε_2 με τον κύκλο C . (8)

✓ Θέμα 188

Δ

● D20091

Δίνονται τα σημεία $A(-7, -1)$ και $B(3, -5)$ ενός κύκλου C με κέντρο K . Το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB και η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία K και M .

- α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M . (4)
 ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας KM . (8)
- β) Αν από το κέντρο K διέρχεται η ευθεία $\delta: x + y = 12$, τότε:
 i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K . (7)
 ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (6)

✓ Θέμα 189

Δ

● D20229

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα όλων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1). (7)
- γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, των οποίων σημείων να βρείτε τις συντεταγμένες. (7)
- δ) Θεωρούμε τον κύκλο C_1 που ορίζεται από την εξίσωση (1) για $\lambda = 0$. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου C_1 που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση. (5)

✓ Θέμα 190

Δ

● D20650

- α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = x + 2$ και $\varepsilon_2: y = x - 2$, καθώς και τα σημεία τους $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$ αντίστοιχα.
 i. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. (4)
 ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB . (2)
 iii. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών ε_1 και ε_2 . (6)
- β) Έστω κύκλος (K, ρ) με την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών ε_1 και ε_2 . Αν το κέντρο K ανήκει στην ευθεία $\eta: x = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:
 i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K συναρτήσει του λ . (5)
 ii. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του λ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους (K, ρ) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (8)

✓ Θέμα 191

Δ

● D20651

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 4)$.

- α) Να βρείτε σημεία M του άξονα $y'y$, έτσι ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την πλευρά AB . (8)
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει διάμετρο το τμήμα AB . (7)
- γ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από τα σημεία M του α. ερωτήματος και στη συνέχεια να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά. (10)

✓ Θέμα 192

Δ

● D20700

Δίνεται τετράγωνο MM_1OM_2 με κορυφές τα σημεία $M(4,4)$, $M_1(4,0)$, $M_2(0,4)$ και $O(0,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση

$$C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8. \quad (8)$$

- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y=8$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C . (8)

- γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C . (9)

✓ Θέμα 193

Δ

● D20863

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ζ του ευθύγραμμου τμήματος AB . (7)

- β) Αν K τυχαίο σημείο της ευθείας ζ , να βρείτε συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ την εξίσωση όλων των κύκλων C που έχουν κέντρο το σημείο K και διέρχονται από τα σημεία A και B . (8)

- γ) Αν $C: (x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση του β. ερωτήματος, τότε:

- i. Να σχεδιάσετε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο που έχει διάμετρο το τμήμα AB . (5)

- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + \lambda y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C στο σημείο $A(1,0)$. (5)

✓ Θέμα 194

Δ

● D21154

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (8)

- β) Να προσδιορίσετε συναρτήσει του α το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων που προκύπτουν από την εξίσωση (1). (6)

- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που προκύπτουν από την εξίσωση (1). (5)
- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α , ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$. (6)

✓ Θέμα 195

Δ

● D21159

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων C που έχουν διάμετρο το τμήμα AB είναι η

$$C: x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0. \quad (8)$$

- β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (9)

- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων C . (8)

✓ Θέμα 196

Δ

● D21276

Σε μια πόλη κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που αποτυπώνεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων και περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1 , κάθε σημείο της οποίας είναι της μορφής $A(\lambda - 1, 2\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τη γραμμή γ_2 , η οποία περνάει από τον σταθμό $\Sigma(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2 . (10)

- β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου με μία από τις γραμμές γ_1 ή γ_2 απευθείας με κάθετο δρόμο. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές συμφέρει να γίνει η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (9)

- γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και, επιπλέον, ο κύκλος αυτός εφάπτεται στη γραμμή γ_1 . (6)

✓ Θέμα 197

Δ

● D21349

Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ και την ευθεία $\varepsilon: 4x + 3y - 10 = 0$.

- α) i. Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου C . (5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε και να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία A και B . (4)

iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B . (5)

β) Αν είναι $A(1, 2)$ και $B(4, -2)$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, όπου O η αρχή των αξόνων. (5)

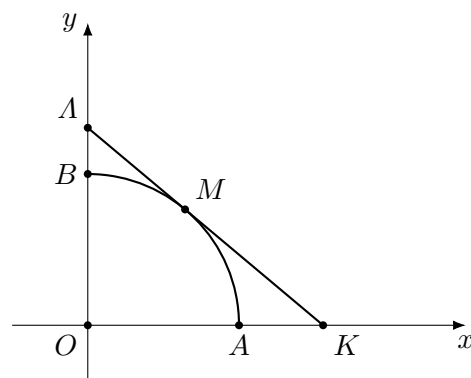
ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο O . (6)

✓ Θέμα 198



● D21683

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το τεταρτοκύκλιο AB του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 4$ και το τυχαίο σημείο του $M(x_1, y_1)$, $0 < x_1 < 2$ ανάμεσα στα σημεία A και B .



α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του M , καθώς και τις συντεταγμένες των σημείων τομής K, Λ της εφαπτομένης με τους άξονες. (6)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος d του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$ είναι $d = \frac{8}{x_1 y_1}$. (7)

γ) Να βρείτε το μήκος d_0 του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$ για $x_1 = \sqrt{2}$. (5)

δ) Να αποδείξετε ότι, όταν το σημείο M κινείται εντός του τεταρτοκυκλίου AB , τότε $d \geq d_0$. (7)

✓ Θέμα 199



● D21696

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: x - 2y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C , του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ . (5)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία ε έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C . (5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε . (7)

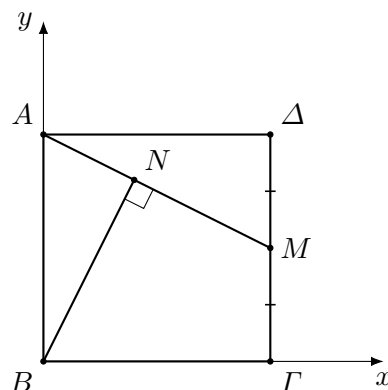
δ) Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\rho$. Πώς αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό; (8)

✓ Θέμα 200

Δ

● D22061

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $a > 0$ και κορυφές τα σημεία $A(0, a)$, $B(0, 0)$, $\Gamma(a, 0)$ και $\Delta(a, a)$. Έστω M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ και το τμήμα BN είναι κάθετο στο τμήμα AM , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

i. AM (5)

ii. BN (5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου N . (5)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο N ανήκει σε κύκλο με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα ίση με a . Να βρείτε την εξίσωση αυτού του κύκλου. (10)

✓ Θέμα 201

Δ

● D22062

Δίνεται η οικογένεια κύκλων $C_\lambda: (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου C_λ . (6)

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C_λ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ . Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = 0$. (6)

δ) Έστω ότι $a \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = a$ εφάπτεται σε έναν και μόνο έναν από τους κύκλους C_λ . Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = a$. (7)

✓ Θέμα 202

Δ

● D22066

Θεωρούμε τα σημεία $A(\sin\theta, \eta\mu\theta)$ και $B(\sin\theta - \eta\mu\theta, \eta\mu\theta + \sin\theta)$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{OA} \perp \vec{AB}$. (8)

γ) Να βρείτε τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων \vec{OA}, \vec{OB} . (9)

✓ Θέμα 203

Δ

● D22069

Τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(6, 1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο C με κέντρο το σημείο K από το οποίο διέρχεται η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 7$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου C . (12)

β) Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου C . (8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (5)

✓ Θέμα 204

Δ

● D22214

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ και $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 9|\overline{AB}|.$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι ο κύκλος

$$C: x^2 + y^2 = 8. \quad (10)$$

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου C τέτοια, ώστε να ισχύει $(\Gamma\Delta)^2 = 32$.

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία. (8)

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο C , να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overline{MG} \cdot \overline{M\Delta}$. (7)

✓ Θέμα 205

Δ

● D22223

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι

$$\overline{AB} = (\lambda, \lambda + 1) \quad \text{και} \quad \overline{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$. (8)

β) Αν, επιπλέον, ισχύει $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του λ . (8)

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$, να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. (9)

✓ Θέμα 206

Δ

● D22239

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Στο ίδιο σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

- α) i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει τη θέση του σιντριβανιού; (4)
 ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (5)
 iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού πρέπει να ενωθεί με το κέντρο, ώστε να πετύχουμε τη μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (8)
- β) Ένας μηχανικός θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο και κατέληξε στην εξίσωση

$$\lambda x + y + \lambda - 2 = 0, \lambda \neq 0.$$

Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (8)

✓ Θέμα 207

Δ

● D22264

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (7)
 β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1) και ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x + y + 2 = 0$. (9)
 γ) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που προκύπτει από την εξίσωση (1) και οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. (9)

✓ Θέμα 208

Δ

● D22280

Δίνονται οι κύκλοι (K, R) και (A, ρ) με εξισώσεις

$$C_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \quad \text{και} \quad C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

αντίστοιχα.

- α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων. (12)
 β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου. (8)
 γ) Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση των σημείων M και N . (5)

✓ Θέμα 209

Δ

● D22508

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1,4)$ και $\Gamma(3,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AF γράφεται στη μορφή

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2). \quad (8)$$

- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AF γράφεται στη μορφή

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5. \quad (8)$$

- γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών B, Δ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (9)

✓ Θέμα 210

Δ

● D33696

Το κέντρο K ενός κύκλου C είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon: y = 2x - 1$ και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Ο κύκλος C έχει ακτίνα $\rho = 3\sqrt{2}$ και η ευθεία $\zeta: x + y - 2 = 0$ εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο του A .

- α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C έχει εξίσωση $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 18$. (9)

- β) i. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AK έχει εξίσωση $x - y + 2 = 0$. (5)

- ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες $(0, 2)$. (4)

- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AKM , όπου A και M είναι τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον κύκλο C . (7)

3.2 Η Παραβολή

✓ Θέμα 211

B

● B18242

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C . (8)

- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής C στο σημείο της $M(4, 4)$. (8)

- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την εφαπτομένη ε . (9)

✓ Θέμα 212

B

● B18701

Δίνεται η παραβολή $C: y = \frac{1}{2}x^2$.

- α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής C . (6)

- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής C στο σημείο της $A(2,2)$. (10)

- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , την εστία E , τη διευθετούσα δ και την εφαπτομένη ε . (9)

✓ Θέμα 213

B

● B20235

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

- α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C . (10)

- β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της $M\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$. (15)

✓ Θέμα 214

B

● B21248

Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $\delta: x = -2$ και το τυχαίο σημείο $M(x,y)$.

- α) i. Να βρείτε την απόσταση (ME) ως συνάρτηση των x, y . (8)

- ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M, \delta)$ ως συνάρτηση των x, y . (8)

- β) Αν ισχύει $(ME) = d(M, \delta)$, να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή

$$C: y^2 = 8x. \quad (9)$$

✓ Θέμα 215

B

● B21306

Δίνεται η παραβολή C με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το σημείο $E(2,0)$. Το σημείο A ανήκει στην παραβολή C , έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

- α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή C έχει εξίσωση $y^2 = 8x$ και ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες $(3, 2\sqrt{6})$. (10)

- β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C και την διευθετούσα της δ , καθώς και να βρείτε την εξίσωση της διευθετούσας δ . (6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C στο σημείο της A . (9)

✓ Θέμα 216

B

● B21307

Δίνεται η παραβολή $C: x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής C είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη ίση με 3. (12)

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής C στα σημεία της $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$ είναι αντίστοιχα οι ευθείες

$$\varepsilon_1: y = x - 3 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = -x - 3. \quad (8)$$

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 . (5)

✓ Θέμα 217

B

● B22190

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = x$.

α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής C . (12)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, -1)$ είναι σημείο της παραβολής C . (5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C στο σημείο της $A(1, -1)$. (8)

✓ Θέμα 218

B

● B22267

Δίνεται η εξίσωση (1): $y^2 = 4x$.

α) Να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση:

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E έχει συντεταγμένες (\dots, \dots) και η διευθετούσα της δ έχει εξίσωση».

(9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραπάνω καμπύλης στο σημείο της $A(1, -2)$. (8)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι σημείο της διευθετούσας της παραπάνω καμπύλης. (8)

✓ Θέμα 219

Γ

● C20866

Δίνεται η παραβολή C με άξονα συμμετρίας τον $y'y$, κορυφή την αρχή των αξόνων και η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C . (6)

✓ Θέμα 221

Δ

● D18245

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η εξίσωση (1): $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής C . (6)
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (6)
- γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα δ δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ . (6)
- δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο που δεν ανήκει στη διευθετούσα δ . Αν από το σημείο M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E . (7)

✓ Θέμα 222

Δ

● D18372

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $C: y^2 = 4x$.

- α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C . (9)
- β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής C στο οποίο η εφαπτομένη της ε είναι παράλληλη στην ευθεία AB . (8)
- γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ε με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο. (8)

✓ Θέμα 223

Δ

● D18741

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = ax$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(16, \alpha + 4)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

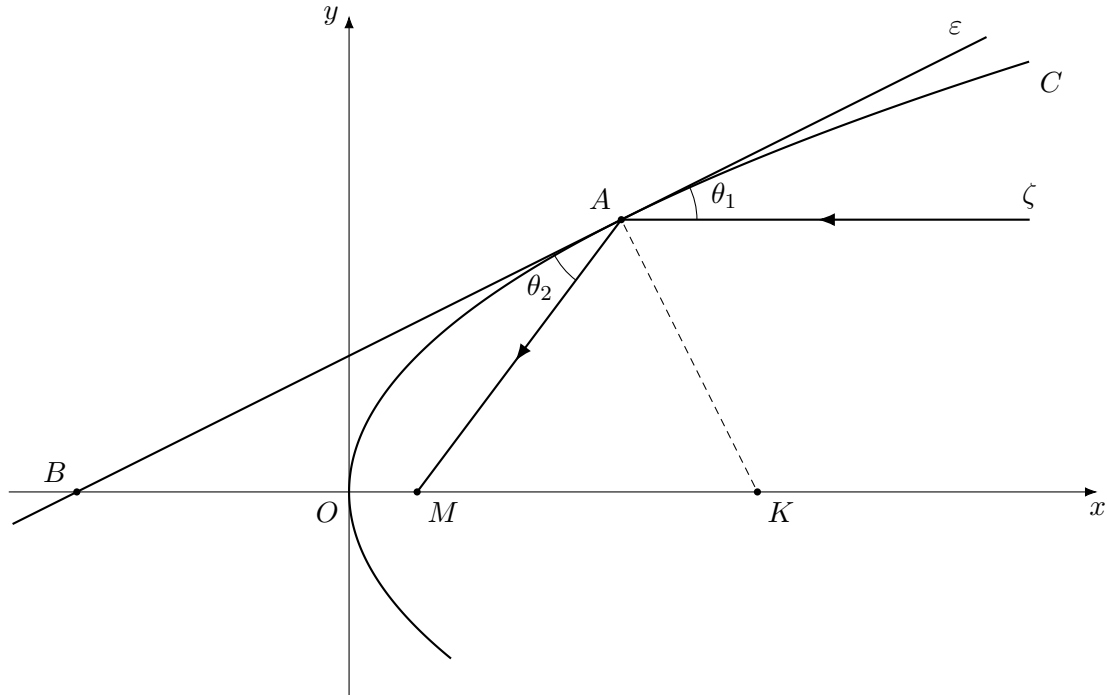
- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$. (5)
- β) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής C . (7)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της παραβολής C που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_2: -x + 2y + 4 = 0$. (7)
- δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ε_1 και έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C . (6)

✓ Θέμα 224

Δ

● D18870

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της ε στο σημείο της $A(4, 4)$ και το ευθύγραμμο τμήμα AK που είναι κάθετο στην ευθεία ε . Μια φωτεινή ακτίνα ζ ακολουθεί πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής C , προσπίπτει στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M του άξονα $x'x$.



Αν η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα ζ με την ευθεία ε είναι ίση με τη γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την ευθεία ε , τότε:

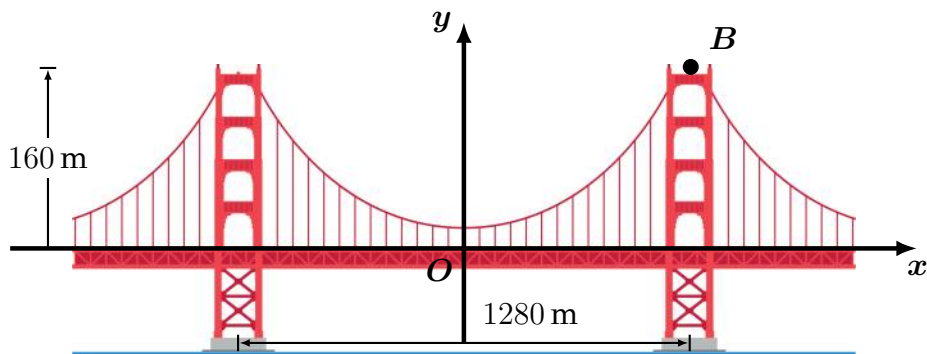
- α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C . (6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής B της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$. (6)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές. (7)
- δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής C . (6)

✓ Θέμα 225

Δ

● D19047

Στη γέφυρα Golden Gate του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους 1280 m, ενώ το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι 160 m. Το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή C του κεντρικού καλωδίου έχει εξίσωση $x^2 = 2560y$. (9)

β) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής C . (8)

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της $B(640, 160)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι $(E\Delta) = (EB)$. (8)

✓ Θέμα 226

Δ

● D20090

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και ένα σημείο της $M(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$.

α) Αν A είναι η προβολή του σημείου M πάνω στη διευθετούσα δ της παραβολής C , τότε:

i. Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων M και A συναρτήσει της τεταγμένης y_0 του σημείου M . (5)

ii. Αν E είναι η εστία της παραβολής C , να βρείτε το σημείο M , έτσι ώστε να ισχύει

$$(MAE) = \frac{5}{8}. \quad (12)$$

β) Αν $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και ε η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της M , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMEM'$ είναι ρόμβος, όπου M' είναι το σημείο που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$. (8)

✓ Θέμα 227

Δ

● D20092

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$, το σημείο της $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και η ευθεία $\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή C και να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε . (7)

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$. (5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που εφάπτεται στην παραβολή C και είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (8)

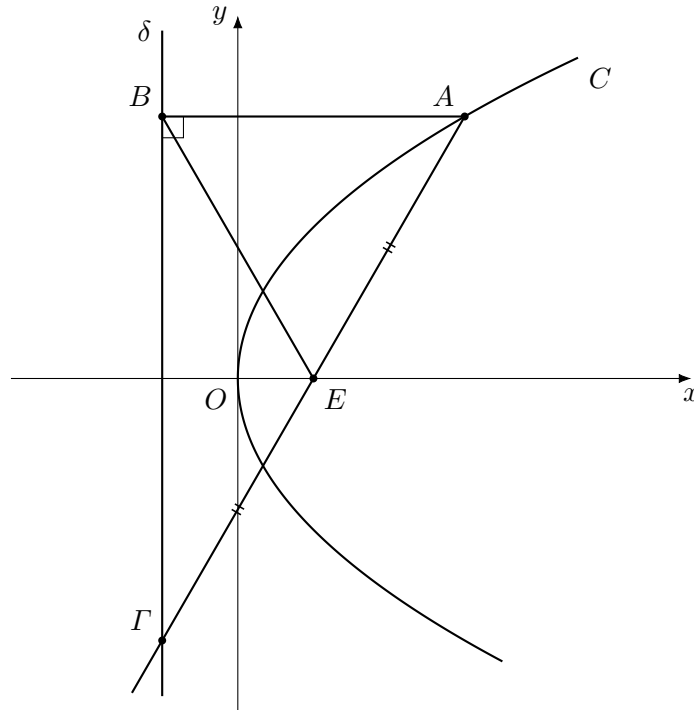
ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε και ζ . (5)

✓ Θέμα 228

Δ

● D20684

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και ένα σημείο της $A(x_A, y_A)$ με $x_A, y_A > 0$. Η ημιευθεία AE τέμνει τη διευθετούσα δ στο σημείο Γ , έτσι ώστε η εστία E της παραβολής C να είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. Επίσης, από το σημείο A φέρουμε κάθετη στη διευθετούσα δ και έστω B το σημείο τομής, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισόπλευρο. (7)

β) Να αποδείξετε ότι $x_A = 3$ και $y_A = 2\sqrt{3}$. (10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$. (8)

✓ Θέμα 229



● D20862

Δίνονται τα σημεία $M(-2, 2)$, $E(0, -\frac{1}{2})$ και η ευθεία $\zeta: y = \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x' . (5)

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία ζ . (6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης η της καμπύλης $C: x^2 + 2y = 0$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1: y = x + 4$. (7)

ii. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την καμπύλη C και τις ευθείες ε_1 και η . Με τη βοήθεια του σχήματος ή οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων της καμπύλης C από την ευθεία ε_1 είναι ίση με $\frac{7\sqrt{2}}{4}$. (7)

✓ Θέμα 230



● D21653

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, το πρώτο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες Ox και Oy οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa, \lambda)$ του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο $E(2, 0)$, ενώ το άλλο κινείται έτσι, ώστε η θέση του να περιγράφεται από το σημείο $P(-2, \lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε χρονική στιγμή αυτής να ισχύει $(\Pi E) = (\Pi P)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(-2, \lambda)$ κινείται σε σταθερή ευθεία δ , της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (5)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης ισχύει ότι $\Pi P \perp \delta$. (5)

γ) Να αποδείξετε ότι η πορεία του πλοίου $\Pi(\kappa, \lambda)$ περιγράφεται από μια παραβολή C , της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (7)

δ) Αν $C: y^2 = 8x$, να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος EP εφάπτεται στην παραβολή C στο σημείο της Π . (8)

✓ Θέμα 231



● D21690

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 3x$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 10 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε και η παραβολή C δεν έχουν κοινά σημεία και στη συνέχεια να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (8)

β) Έστω $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της παραβολής C . Να αποδείξετε ότι

$$d(M, \varepsilon) = \frac{(y_0 + 2)^2 + 6}{5}. \quad (8)$$

γ) Να βρείτε το σημείο A της παραβολής C που είναι το πλησιέστερο στην ευθεία ε . (5)

δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της A είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (4)

✓ Θέμα 232



● D21883

Δίνεται η παραβολή $C: x^2 = 4y$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x - 2$.

α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής C . (5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε και η παραβολή C δεν έχουν κοινά σημεία και στη συνέχεια, να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (8)

γ) Αν $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής C , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι

$$d(M, \varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

- ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε , καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε . (6)

✓ Θέμα 233

Δ

● D22275

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$.

- α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής C και στη συνέχεια να σχεδιάσετε την παραβολή C , την εστία E και τη διευθετούσα δ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (12)
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής C που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$. (13)

✓ Θέμα 234

Δ

● D22465

Δίνεται η παραβολή C , με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $x'x$, για την οποία ισχύει ότι η απόσταση της εστίας E από τη διευθετούσα δ είναι ίση με 4 και η εστία E ανήκει στον θετικό ημιάξονα Ox .

- α) Να αποδείξετε ότι η εστία E έχει συντεταγμένες $(2, 0)$, η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $x = -2$ και η παραβολή C έχει εξίσωση $y^2 = 8x$. (9)
- β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε της παραβολής C στο σημείο της $A(2, 4)$ έχει εξίσωση $y = x + 2$. (9)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία E της παραβολής C και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της $A(2, 4)$. (7)

3.3 Η Έλλειψη

✓ Θέμα 235

B

● B20658

Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\alpha = 4$, $\beta = 2$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$. (8)
- β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης C . (8)

- γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C και τον κύκλο C' : $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (9)

✓ Θέμα 236

B

● B20718

Δίνεται η έλλειψη C : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης C . (8)
- β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (8)
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις εφαπτομένες της έλλειψης C στις κορυφές της και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (9)

✓ Θέμα 237

B

● B20865

Δίνονται οι ελλείψεις

$$C_1: x^2 + 4y^2 = 4 \quad \text{και} \quad C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

- α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων C_1, C_2 . (14)
- β) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα. (11)

✓ Θέμα 238

B

● B20883

Δίνεται η έλλειψη C : $16x^2 + 25y^2 = 400$.

- α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες E, E' της έλλειψης C . (12)
- β) Αν $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$, να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. (13)

✓ Θέμα 239

B

● B21308

Δίνεται η έλλειψη C : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης C , καθώς και την απόστασή τους. (9)
- β) Να υπολογίσετε τα μήκη των αξόνων της έλλειψης C . (8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $B(0, 4)$. (8)

✓ Θέμα 240

B

● B21647

Δίνεται η έλλειψη C με εστίες τα σημεία $E(4, 0)$, $E'(-4, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 10.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C . (10)

β) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης C . (7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$. (8)

✓ Θέμα 241

B

● B21648

Δίνεται η έλλειψη C με εστίες τα σημεία $E(3,0)$, $E'(-3,0)$ και η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με 10. (10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C . (8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$. (7)

✓ Θέμα 242

B

● B22168

Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 2px$ και η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α) Αν η παραβολή C_1 διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, τότε:

i. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_1 . (10)

ii. Να βρείτε την εστία E της παραβολής C_1 . (5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 , αν η μία εστία της είναι το σημείο $E(1,0)$ και ο μεγάλος της άξονας έχει μήκος ίσο με 4. (10)

✓ Θέμα 243

B

● B22192

Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης C . (10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $B(0,9)$ είναι σημείο της έλλειψης C . (5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $B(0,9)$. (10)

✓ Θέμα 244

B

● B22268

Δίνεται η εξίσωση (1): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

α) Να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση:

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Οι εστίες της είναι τα σημεία $E(\dots, \dots)$ και $E'(\dots, \dots)$. Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με και η εκκεντρότητά της ϵ είναι ίση με».

(15)

- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω καμπύλης στο σημείο της $B(0, -2)$. (10)

✓ Θέμα 245

B

● B22556

Δίνεται η έλλειψη C με κορυφές τα σημεία $A'(-5, 0)$, $A(5, 0)$, $B'(0, -4)$ και $B(0, 4)$.

- α) i. Να υπολογίσετε τα μήκη των αξόνων της έλλειψης C . (10)
 ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης C . (10)
- β) Αν M ένα σημείο της έλλειψης C , να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$. (5)

✓ Θέμα 246

B

● B22558

Δίνεται η έλλειψη C με εστίες τα σημεία $E'(-2, 0)$, $E(2, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 8.

- α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη C έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. (12)
- β) Έστω Σ και P δύο σημεία της έλλειψης C που έχουν ίδια τετμημένη με την εστία $E(2, 0)$. Επίσης, το σημείο Σ έχει θετική τεταγμένη, ενώ το σημείο P αρνητική τεταγμένη.
- i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Σ και P έχουν συντεταγμένες $(2, 3)$ και $(2, -3)$ αντίστοιχα. (8)
- ii. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΣP . (5)

✓ Θέμα 247

B

● B22564

Δίνονται οι ελλείψεις

$$C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1 \quad \text{και} \quad C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις C_1, C_2 . (10)
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο της A και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο της B είναι αντίστοιχα

$$x + 2y - 6 = 0 \quad \text{και} \quad -2x + y - 6 = 0. \quad (10)$$

- γ) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. (5)

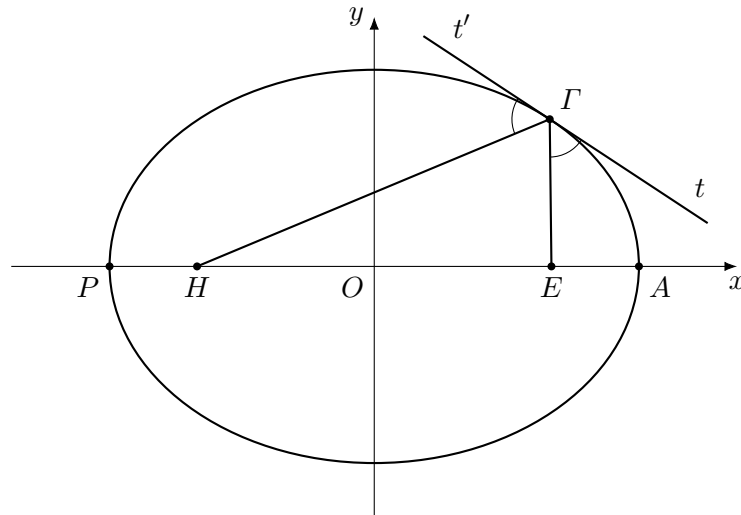
✓ Θέμα 248

Δ

● D20666

Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο περιγράφεται από μια έλλειψη της οποίας η μία εστία είναι ο Ήλιος. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ότι τα σημεία H και Γ είναι τα

κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα, ο μεγάλος άξονας PA της έλλειψης βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$, ενώ ο άξονας $y'y$ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος HE των εστιών της έλλειψης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι $(PH) = 147,5$ εκατομμύρια km και η μέγιστη $(AH) = 152,5$ εκατομμύρια km.



- α) Να αποδείξετε ότι $(PA) = 300$ εκατομμύρια km, $(HE) = 5$ εκατομμύρια km και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ίση με $\frac{1}{60}$. (10)
- β) Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά της, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου HGE . (8)
- γ) Αν ονομάσουμε $t't$ την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο της G , να αποδείξετε ότι οι γωνίες $t'\hat{G}H$ και $t\hat{G}E$ είναι ίσες. (7)

✓ Θέμα 249

Δ

● D20722

Έστω $K(x, y)$ ένα μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει

$$(KE) + (KE') = 10,$$

όπου $E(3, 0)$ και $E'(-3, 0)$.

- α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της. (6)

Έστω $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και, επιπλέον, δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 3x + 5y = 25$.

- β) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C και η ευθεία ε έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (7)
- γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα του β. ερωτήματος και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την καμπύλη C και την ευθεία ε . (6)

δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{EME'}$ και να βρείτε την εξίσωσή της. (6)

✓ Θέμα 250

Δ

● D20726

Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο. Το περίγραμμά του είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου με κέντρο το σημείο E' . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμά του μπιλιάρδου πάνω σε μια ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινού μήκους 10. Στη συνέχεια, με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε κατά την κίνησή του μολυβιού να διαγράφει έλλειψη C .

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των αξόνων της έλλειψης C . (10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C , καθώς και την εκκεντρότητά της. (5)

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα ακριβώς στο σημείο E και σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα, ώστε αφού προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμά του μπιλιάρδου, έπειτα να πέσει στην τρύπα. Θεωρούμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας, ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται. Σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να πέσει στην τρύπα;

i. Μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα.

ii. Μόνο στα άκρα του μικρού άξονα.

iii. Μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα του μεγάλου άξονα.

iv. Σε οποιοδήποτε σημείο της έλλειψης C , εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα.

Να επιλέξετε τη μοναδική σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (10)

✓ Θέμα 251

Δ

● D21655

Δίνεται η έλλειψη C με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες τα σημεία E, E' που ανήκουν στον άξονα $x'x$ και κορυφές τα σημεία $A(5,0)$, $A'(-5,0)$ και B, B' . Αν το τετράπλευρο $BEB'E'$ είναι τετράγωνο, τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, B' και E, E' . (8)

β) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C . (7)

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της έλλειψης C το οποίο δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα σημεία A, A' .

- i. Να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα EME' έχουν την ίδια περίμετρο, την οποία και να προσδιορίσετε. (5)
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M , έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου EME' να παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία και να προσδιορίσετε. (5)

✓ Θέμα 252

Δ

● D22273

Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- i. των σημείων στα οποία η έλλειψη C τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (6)
- ii. των εστιών E και E' της έλλειψης C . (6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $M(0,4)$ και εφάπτονται στην έλλειψη C . (13)

3.4 Η Υπερβολή

✓ Θέμα 253

B

● B16128

Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E, E' της υπερβολής C . (10)
- β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της υπερβολής C , να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$|(NE') - (NE)|. \quad (5)$$

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (10)

✓ Θέμα 254

B

● B17942

Δίνεται η κωνική τομή C με εξίσωση $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής C και να βρείτε μία εστία της. (12)
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1,2022)$ ανήκει στην κωνική τομή C . (13)

✓ Θέμα 255

B

● B20721

Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της υπερβολής C . (8)
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής C . (8)
- γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (9)

✓ Θέμα 256

B

● B20869

Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες και τις ασύμπτωτες της υπερβολής C . (10)
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ της υπερβολής C στο σημείο της $A(1, 0)$. (7)
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της εφαπτομένης ζ με τις ασύμπτωτες της υπερβολής C . (8)

✓ Θέμα 257

B

● B21218

Δίνονται οι υπερβολές

$$C_1: x^2 - y^2 = 1 \quad \text{και} \quad C_2: y^2 - x^2 = 1.$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της υπερβολής C_1 είναι τα σημεία $E_1(\sqrt{2}, 0)$, $E'_1(-\sqrt{2}, 0)$. (12)
- β) Αν E_2 και E'_2 είναι οι εστίες της υπερβολής C_2 , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $E_1E_2E'_1E'_2$ είναι τετράγωνο. (13)

✓ Θέμα 258

B

● B21649

Δίνεται η υπερβολή C με εστίες τα σημεία $E(5, 0)$, $E'(-5, 0)$ και εκκεντρότητα ίση με $\frac{5}{4}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C . (10)
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής C . (8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$. (7)

✓ Θέμα 259

B

● B21651

Δίνεται η υπερβολή C με εστίες τα σημεία $E(5, 0)$, $E'(-5, 0)$ και η οποία διέρχεται από το σημείο $A(4, 0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή C έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{5}{4}$. (10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C . (8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$. (7)

✓ Θέμα 260

B

● B22051

Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 της υπερβολής C συμπίπτουν με τις διχοτόμους του $1^{\text{ου}} - 3^{\text{ου}}$ και $2^{\text{ου}} - 4^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου. (13)

β) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. (12)

✓ Θέμα 261

B

● B22169

Δίνεται η υπερβολή

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

με ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon: y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών A, A' της υπερβολής C είναι ίση με 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C . (10)

ii. Να βρείτε τις εστίες της υπερβολής C . (5)

Έστω $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$. (10)

✓ Θέμα 262

B

● B22196

Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 25$.

α) Να βρείτε τις εστίες της υπερβολής C . (10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 της υπερβολής C . (10)

γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 . (5)

✓ Θέμα 263

B

● B22269

Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

α) i. Να βρείτε τις εστίες της υπερβολής C . (5)

ii. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής C . (5)

- iii. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής C . (5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$. (10)

✓ Θέμα 264

B

● B22559

Δίνεται η υπερβολή C με εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή C έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. (12)
- β) Έστω M τυχαίο σημείο της υπερβολής C .
- i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$. (8)
- ii. Αν $(ME) = 9$, να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' . (5)

✓ Θέμα 265

B

● B22561

Δίνεται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 9$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής C είναι οι ευθείες
- $$\delta_1: y = x \quad \text{και} \quad \delta_2: y = -x. \quad (8)$$
- ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της υπερβολής C στο σημείο της $M(5,4)$ είναι η ευθεία $\varepsilon: 5x - 4y = 9$. (8)
- β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και δ_1 , καθώς και το σημείο τομής των ευθειών ε και δ_2 . (9)

✓ Θέμα 266

B

● B22566

Δίνεται η υπερβολή $C: 4x^2 - y^2 = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι κορυφές της υπερβολής C είναι τα σημεία $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$. (8)
- β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής C είναι οι ευθείες
- $$\varepsilon_1: y = 2x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = -2x. \quad (9)$$
- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη ε_2 έχει εξίσωση $y = -2x + 2$. (8)

✓ Θέμα 267

B

● B22567

Δίνεται η υπερβολή

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$$\varepsilon_1: y = \frac{3}{4}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = -\frac{3}{4}x.$$

α) i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 3$. (10)

ii. Να αποδείξετε ότι οι εστίες της υπερβολής C είναι τα σημεία $E(5, 0)$ και $E'(-5, 0)$. (10)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία A, A' και E, E' , τις ασύμπτωτες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και την υπερβολή C . (5)

✓ Θέμα 268

Γ

● C17944

Δίνεται η υπερβολή

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

με εστιακή απόσταση ίση με $2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα ίση με $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = \sqrt{3}$. (8)

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών της υπερβολής C . (4)

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής C . (4)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την υπερβολή C , τις ασύμπτωτές της, τις εστίες και τις κορυφές της. (9)

✓ Θέμα 269

Δ

● D20653

Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος διαθέτει φωτοβολίδες τις οποίες εκτοξεύει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυροκρότησης του όπλου. Ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4s αργότερα από τον παρατηρητή M_2 . Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/s.

α) Αν ονομάσουμε P τη θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι

$$(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m.} \quad (8)$$

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής C με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 . (8)

γ) Αν η υπερβολή C έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και οι εστίες της ανήκουν στον άξονα $x'x$ με $(M_1M_2) = 1378$ m, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής C είναι η

$$\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1. \quad (9)$$

✓ Θέμα 270



● D21656

Δίνεται η υπερβολή C με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0)$, $A'(-4,0)$.

α) i. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής C . (3)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C . (3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την υπερβολή C , τις ασύμπτωτες και το ορθογώνιο βάσης της. (9)

γ) Αν M τυχαίο σημείο της υπερβολής C , να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$(ME) - (ME'). \quad (5)$$

δ) Αν $M(\sqrt{80}, 6)$, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$. (5)

✓ Θέμα 271



● D21657

Έστω η υπερβολή C με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες που ανήκουν στον άξονα $x'x$ και της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) i. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής C . (6)

ii. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής C . (6)

β) Αν η υπερβολή C διέρχεται από το σημείο $M(2,0)$ και η ευθεία ζ είναι παράλληλη σε κάποια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής C αλλά δεν ταυτίζεται με αυτές, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ζ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την υπερβολή C . (8)

ii. Να ελέγξετε αν η ευθεία ζ είναι εφαπτομένη της υπερβολής C . (5)

✓ Θέμα 272



● D22174

Ένας πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον Ήλιο του. Ο Ήλιος βρίσκεται στην εστία $E(\gamma,0)$ της έλλειψης C , ενώ η άλλη εστία είναι το σημείο $E'(-\gamma,0)$. Η έλλειψη C , που περιγράφει την τροχιά του πλανήτη, έχει εκκεντρότητα ίση με 0,6 και μεγάλο άξονα μήκους 10.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C . (9)

β) Έστω $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$, εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς το μέρος του ημιάξονα Oy . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα περάσει από το σημείο $\Delta(0, 5)$. (9)

ii. Ένας κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη

$$C': \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{με } x > 0.$$

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των τροχιών C και C' ; (7)

✓ Θέμα 273

Δ

● D32206

Δίνεται η υπερβολή C με εστίες τα σημεία $E(5, 0)$, $E'(-5, 0)$ και έστω $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$ ένα σημείο αυτής.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή C έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{5}{4}$. (7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C . (6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$. (6)

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες της υπερβολής C . (6)

Ευρετήριο Θεμάτων

| | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| B14586, 15 | B16428, 19 | B20718, 83 | B22044, 13 |
| B14666, 9 | B16579, 11 | B20721, 88 | B22047, 30 |
| B14953, 15 | B16580, 11 | B20732, 20 | B22049, 30 |
| B15002, 10 | B16581, 11 | B20733, 20 | B22051, 90 |
| B15010, 8 | B16759, 39 | B20773, 20 | B22052, 13 |
| B15027, 27 | B16766, 28 | B20864, 41 | B22055, 7 |
| B15028, 51 | B16769, 40 | B20865, 83 | B22056, 54 |
| B15038, 15 | B16771, 40 | B20868, 29 | B22059, 34 |
| B15043, 10 | B16773, 52 | B20869, 89 | B22060, 13 |
| B15044, 27 | B16774, 28 | B20883, 83 | B22071, 34 |
| B15073, 16 | B16808, 52 | B20885, 41 | B22072, 35 |
| B15186, 16 | B16810, 40 | B20888, 21 | B22092, 35 |
| B15252, 16 | B17070, 12 | B20890, 54 | B22147, 54 |
| B15271, 27 | B17075, 19 | B20914, 21 | B22168, 84 |
| B15317, 16 | B17317, 52 | B20926, 41 | B22169, 90 |
| B15379, 17 | B17805, 40 | B21162, 29 | B22170, 22 |
| B15440, 39 | B17942, 88 | B21165, 8 | B22171, 35 |
| B15463, 17 | B18236, 28 | B21218, 89 | B22172, 55 |
| B15657, 33 | B18238, 52 | B21248, 74 | B22173, 30 |
| B15680, 51 | B18239, 52 | B21260, 42 | B22190, 75 |
| B15825, 17 | B18240, 41 | B21306, 74 | B22192, 84 |
| B15852, 17 | B18241, 53 | B21307, 75 | B22196, 90 |
| B15854, 10 | B18242, 73 | B21308, 83 | B22267, 75 |
| B15986, 27 | B18351, 29 | B21647, 83 | B22268, 84 |
| B15994, 51 | B18700, 53 | B21648, 84 | B22269, 90 |
| B15996, 17 | B18701, 74 | B21649, 89 | B22279, 55 |
| B16002, 28 | B18733, 20 | B21651, 89 | B22554, 22 |
| B16128, 88 | B18749, 53 | B21662, 34 | B22556, 85 |
| B16141, 18 | B18878, 12 | B21681, 12 | B22557, 13 |
| B16144, 18 | B18968, 53 | B21682, 21 | B22558, 85 |
| B16147, 10 | B18979, 41 | B21962, 54 | B22559, 91 |
| B16151, 11 | B19038, 12 | B21964, 34 | B22561, 91 |
| B16194, 39 | B19039, 54 | B21965, 29 | B22564, 85 |
| B16425, 39 | B20235, 74 | B22038, 13 | B22566, 91 |
| B16426, 19 | B20658, 82 | B22040, 22 | B22567, 92 |
| B16427, 19 | B20685, 20 | B22042, 9 | |

| | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| C15152, 42 | D15658, 32 | D18745, 64 | D21656, 93 |
| C15178, 35 | D15681, 44 | D18781, 65 | D21657, 93 |
| C17944, 92 | D15692, 44 | D18870, 77 | D21683, 69 |
| C18243, 22 | D15791, 59 | D18871, 65 | D21690, 81 |
| C20866, 75 | D15826, 60 | D19047, 78 | D21696, 69 |
| | D15987, 44 | D20090, 79 | D21883, 81 |
| D14954, 55 | D15993, 61 | D20091, 65 | D21885, 9 |
| D14970, 36 | D16003, 37 | D20092, 79 | D22061, 70 |
| D14978, 30 | D16057, 45 | D20229, 66 | D22062, 70 |
| D14984, 42 | D16191, 61 | D20650, 66 | D22063, 24 |
| D15004, 36 | D16477, 38 | D20651, 66 | D22064, 24 |
| D15029, 31 | D17076, 14 | D20653, 92 | D22065, 33 |
| D15030, 55 | D17077, 14 | D20655, 46 | D22066, 70 |
| D15042, 56 | D17078, 32 | D20666, 85 | D22067, 48 |
| D15080, 56 | D17694, 45 | D20684, 79 | D22068, 7 |
| D15081, 56 | D17695, 45 | D20700, 67 | D22069, 71 |
| D15082, 57 | D18237, 61 | D20722, 86 | D22073, 49 |
| D15177, 57 | D18244, 38 | D20724, 46 | D22174, 93 |
| D15189, 58 | D18245, 77 | D20726, 87 | D22214, 71 |
| D15194, 42 | D18247, 62 | D20728, 47 | D22223, 71 |
| D15253, 36 | D18372, 77 | D20861, 47 | D22239, 72 |
| D15272, 58 | D18415, 62 | D20862, 80 | D22262, 49 |
| D15273, 43 | D18416, 62 | D20863, 67 | D22264, 72 |
| D15275, 31 | D18467, 63 | D20938, 14 | D22265, 49 |
| D15320, 23 | D18520, 23 | D20939, 48 | D22266, 49 |
| D15380, 43 | D18521, 63 | D21154, 67 | D22273, 88 |
| D15394, 76 | D18547, 23 | D21159, 68 | D22275, 82 |
| D15432, 58 | D18567, 63 | D21160, 33 | D22280, 72 |
| D15433, 43 | D18568, 32 | D21276, 68 | D22465, 82 |
| D15439, 37 | D18569, 63 | D21349, 68 | D22508, 73 |
| D15475, 31 | D18570, 64 | D21652, 38 | D32206, 94 |
| D15628, 58 | D18732, 46 | D21653, 80 | D33696, 73 |
| D15646, 59 | D18741, 77 | D21655, 87 | |



Θεσσαλονίκη
2024

