

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Διανύσματα-Ευθεία-Κύκλος



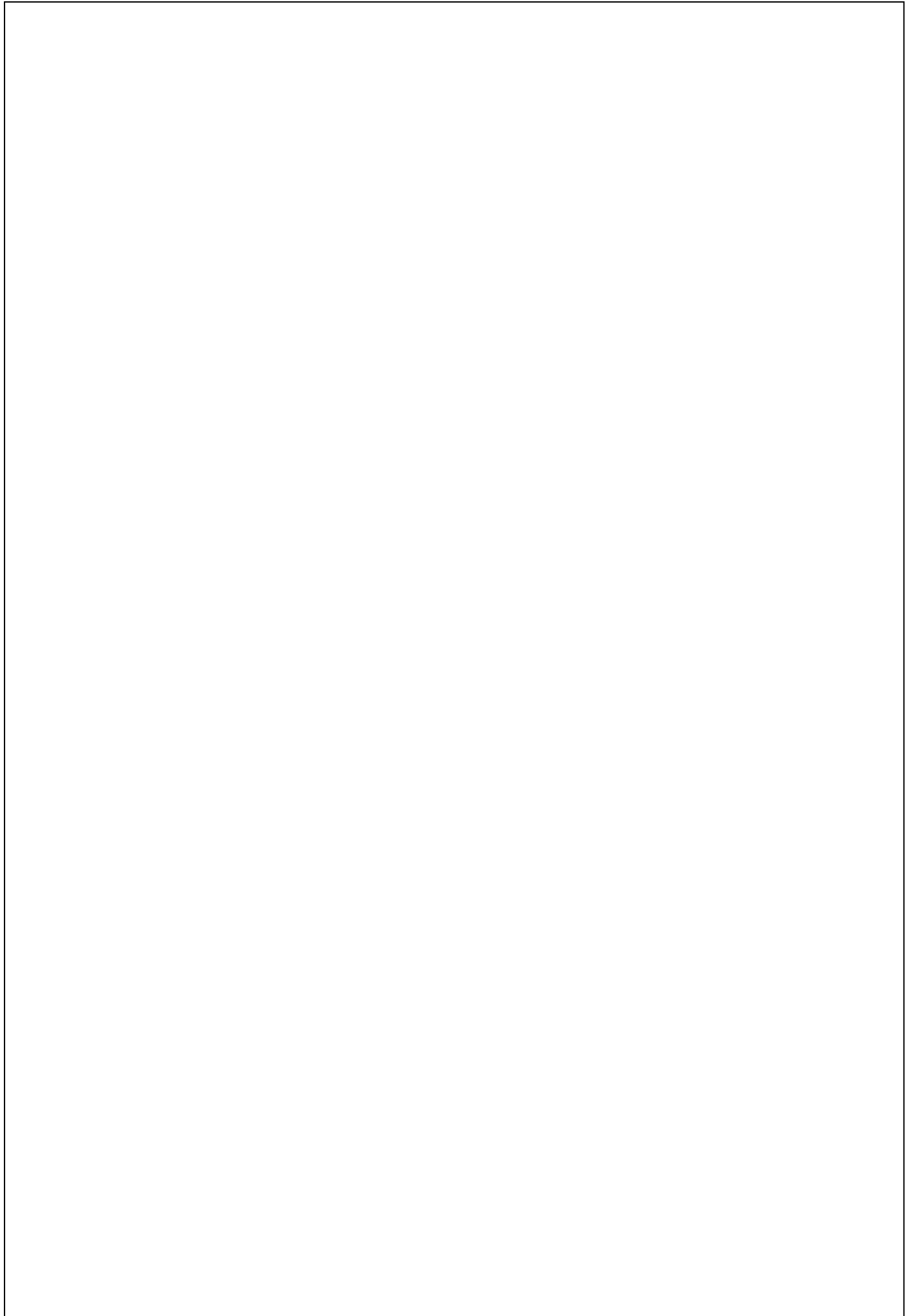
Αναλυτική Θεωρία

780 Ασκήσεις

- ▶ 500 ασκήσεις σε όλη την ύλη
- ▶ 280 ενδοσχολικά θέματα εξετάσεων

Επιμέλεια

Νίκος Κ. Ράπτης



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διανύσματα

1. Η Έννοια του Διανύσματος

Ορισμός Διανύσματος

Το **διάνυσμα** ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα.

Μηδενικό λέγεται το διάνυσμα όπου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν. Το μηδενικό διάνυσμα παριστάνεται με σημείο και συμβολίζεται με $\vec{0}$

Αν \vec{AB} ένα διάνυσμα, τότε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB ονομάζεται **μέτρο του διανύσματος** και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$.

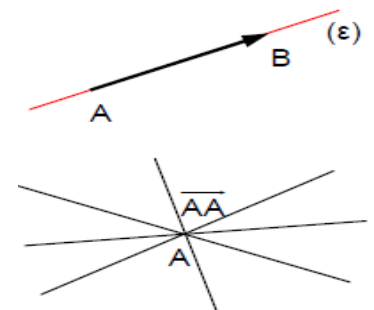
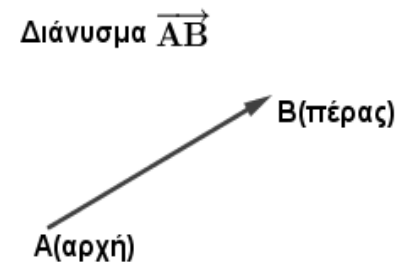
Το μέτρο ενός διανύσματος είναι θετικός αριθμός, δηλαδή $|\vec{AB}| \geq 0$.

Το μηδενικό διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με το μηδέν.

Αν ένα διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με 1, τότε το διάνυσμα λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**.

Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα \vec{AB} λέγεται **φορέας** του \vec{AB} .

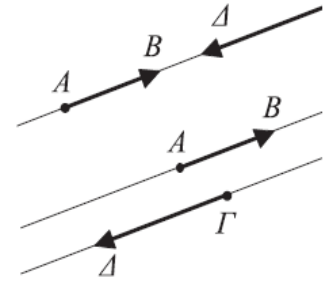
Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος \vec{AA} μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το A .



Παράλληλα ή Συγγραμμικά Διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα \overline{AB} και $\overline{\Gamma\Delta}$ που έχουν τον ίδιον φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά διανύσματα** και τα συμβολίζουμε με $\overline{AB} \parallel \overline{\Gamma\Delta}$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση.



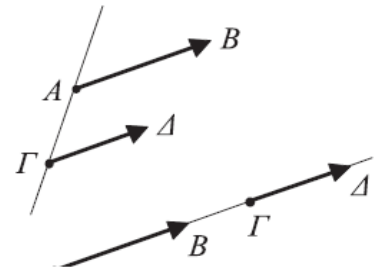
Ομόρροπα και Αντίρροπα Διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα \overline{AB} και $\overline{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα** όταν :

α) έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή

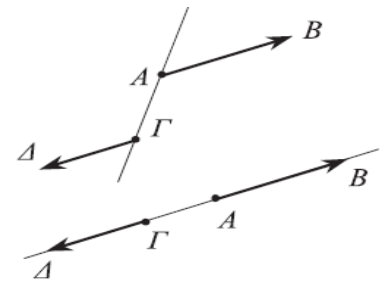
β) έχουν τον ίδιο φορέα και μια από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση και συμβολίζουμε με $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{\Gamma\Delta}$



Δύο μη μηδενικά διανύσματα \overline{AB} και $\overline{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα** όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα έχουν αντίθετη κατεύθυνση και συμβολίζουμε με $\overline{AB} \updownarrow \overline{\Gamma\Delta}$



Ίσα Διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** αν είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα .

$$\text{Δηλαδή: } \overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{\Gamma\Delta} \\ \text{και} \\ |\overline{AB}| = |\overline{\Gamma\Delta}| \end{cases}$$

Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους .

Αν Μ το μέσο του διανύσματος \overline{AB} τότε ισχύει $\overline{AM} = \overline{MB}$ και αντιστρόφως .

Αντίθετα Διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **αντίθετα** αν είναι αντίρροπα και έχουν ίσα μέτρα .

$$\text{Δηλαδή: } \overline{AB} = -\overline{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \updownarrow \overline{\Gamma\Delta} \\ \text{και} \\ |\overline{AB}| = |\overline{\Gamma\Delta}| \end{cases}$$

Ειδικότερα έχουμε $\overline{AB} = -\overline{BA}$ (αλλάζω την σειρά των γραμμάτων, αλλάζω ταυτόχρονα και το πρόσημο)

Γωνία Δύο Διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

Την κυρτή γωνία \widehat{AOB} που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB , την ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και την συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}})$

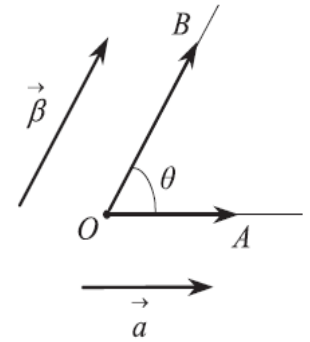
Αν θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τότε ισχύουν :

α) $0 \leq \theta \leq \pi$

β) αν $\theta = 0$ τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

γ) αν $\theta = \pi$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$

δ) αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και θα λέμε τα διανύσματα **κάθετα ή ορθογώνια**

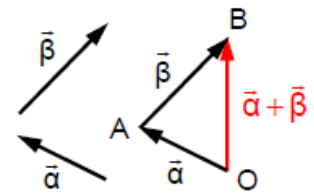


Πρόσθεση/Αφαίρεση Διανυσμάτων

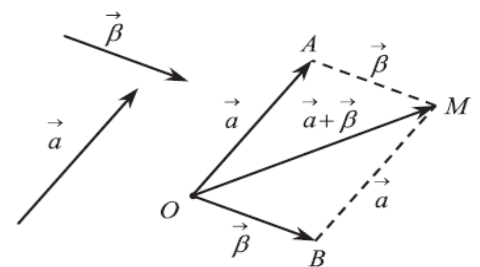
Πρόσθεση Δύο Διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και στη συνέχεια παίρνουμε διάνυσμα $\vec{AB} = \vec{\beta}$.

Το διάνυσμα \vec{OB} λέγεται **άθροισμα ή συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.



Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ορίζεται από την διαγώνιο OM του παραλληλογράμμου που έχει προσκεείμενες πλευρές τις OA και OB .



Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα, τότε ισχύουν :

α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική Ιδιότητα)

β) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική Ιδιότητα)

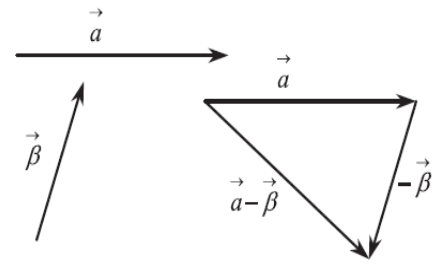
γ) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$

δ) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

Αφαίρεση Δύο Διανυσμάτων

Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$, ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$.

Δηλαδή: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$

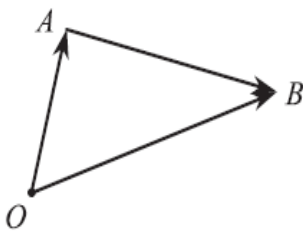


Διάνυσμα Θέσης

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο του χώρου M ορίζεται το διάνυσμα \vec{OM} , το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσης του M ή διανυσματική ακτίνα του σημείου M** .

Το σημείο O που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με την διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον την διανυσματική ακτίνα της αρχής. Πράγματι:



Έστω O σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{AB} ισχύει:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

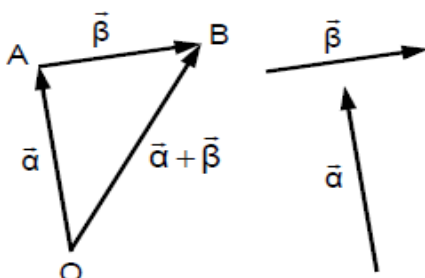
Άρα:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα, τότε για το μέτρο αθροίσματος των διανυσμάτων ισχύει:

$$||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται στο άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$|(OA) - (AB)| \leq (OB) \leq (OA) + (AB) \Leftrightarrow ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

Ασκήσεις

1.1 Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$. Να βρείτε τις γωνίες :

α) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ β) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma})$ γ) $(\overrightarrow{B\Delta}, \overrightarrow{\Delta\Gamma})$ δ) $(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta})$

1.2 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε τις γωνίες :

α) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ β) $(\overrightarrow{\Delta B}, \overrightarrow{B\Gamma})$ γ) $(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta})$

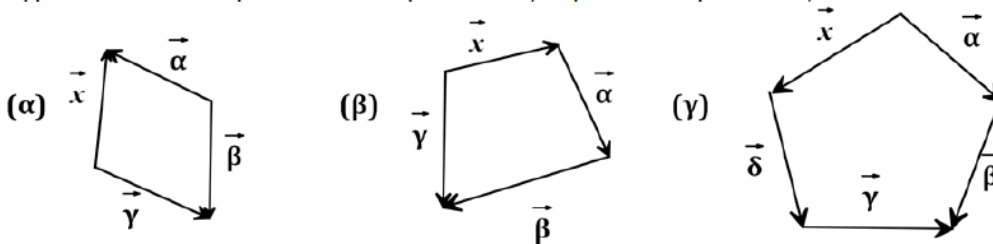
1.3 Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ το ύψος του. Να βρείτε τις γωνίες :

α) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma})$ β) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma A})$ γ) $(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Delta A})$ δ) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{A\Delta})$

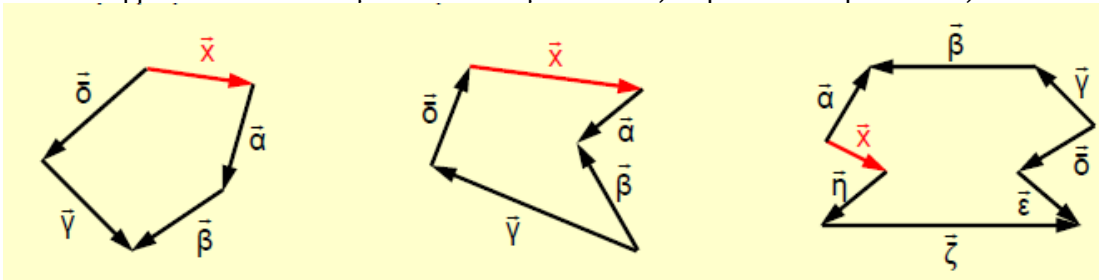
1.4 Να γράψετε ως ένα διάνυσμα τα παρακάτω αθροίσματα :

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$
 β) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{\Lambda M} + \overrightarrow{N\Pi}$
 γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$
 δ) $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$
 ε) $\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NK} - \overrightarrow{ML}$

1.5 Να εκφράσετε το διάνυσμα \vec{x} σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :



1.6 Να εκφράσετε το διάνυσμα \vec{x} σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :



1.7 Αν $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ένα εξάγωνο, τότε να δείξετε ότι : $\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_2P_4} + \overrightarrow{P_3P_5} + \overrightarrow{P_4P_6} + \overrightarrow{P_5P_1} + \overrightarrow{P_6P_2} = \vec{0}$

1.8 Αν ισχύει $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{\Gamma N}$ να δείξετε ότι το Γ είναι το μέσο του AB .

1.9 Έστω το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και M μέσο του $A\Gamma$. Να δείξετε ότι : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

1.10 Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{\Delta E}$ να δείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

1.11 Έστω το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και το σημείο του O για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
 Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και O συμπίπτουν.

1.12 Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 5$. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

1.13 Δίνονται τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 4$, $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 8$.
Να βρείτε: α) το $|\vec{\beta}|$ β) το $|\vec{\gamma}|$ γ) το $|\vec{\alpha} + \vec{\gamma}|$

1.14 Έστω τα σημεία O, A, B του επιπέδου. Αν $|\vec{OA}| = 6$, $|\vec{OB}| = 4$ να δείξετε ότι $2 \leq |\vec{AB}| \leq 10$.

1.15 Δίνονται τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{5} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{2}$.
Να δείξετε ότι: α) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ β) $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$.

1.16 Δίνονται τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$.
Να δείξετε ότι: α) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ β) $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$.

1.17 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 5$, $|\vec{\gamma}| = 4$. Να δείξετε ότι:
α) $3 \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 7$
β) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} \neq \vec{0}$

1.18 Δίνονται τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3\kappa - 5$, $|\vec{\beta}| = 5\kappa - 8$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \kappa^2 + 3$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ .

2. Πολλαπλασιασμός αριθμού με Διάνυσμα

Ορισμός Πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

Έστω λ ένας μη μηδενικός αριθμός και το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Ονομάζουμε **γινόμενο του αριθμού λ με το $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο :

α) είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$, και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$

β) έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0}$

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα και λ, μ δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι ιδιότητες :

$$\alpha) \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$$

$$\beta) (\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$$

$$\gamma) \lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$$

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου κ, λ πραγματικοί αριθμοί.

Συνθήκη Παραλληλίας δύο διανυσμάτων

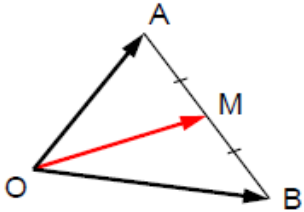
Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε :

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ : Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{B\Gamma}$

Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

Αν M το μέσο του τμήματος AB και O σημείο αναφοράς, τότε $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$



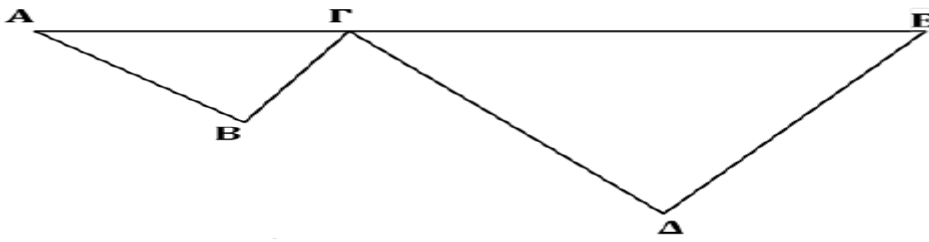
Θεωρούμε διάνυσμα \vec{AB} , το μέσο του M , καθώς και ένα σημείο αναφοράς O .
Αφού M μέσο του \vec{AB} τότε θα ισχύει :

$$\vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{OM} - \vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OM} \Leftrightarrow 2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

Ασκήσεις

- 2.1.** Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{OB} = \vec{\beta}, \vec{OG} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{AG}, \vec{GB}$ με την βοήθεια των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
- 2.2** Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Αν M και N τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα και $\vec{AB} = 3\vec{\alpha}, \vec{AD} = 4\vec{\beta}$, να βρεθούν τα διανύσματα \vec{AM} και \vec{MN} .
- 2.3** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω M το μέσο της AD . Να εκφράσετε τα διανύσματα \vec{BM} και \vec{MG} ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{BG} = \vec{\beta}$.
- 2.4** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω σημείο E στην πλευρά AB ώστε $AE = 3BE$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AE}, \vec{DE}, \vec{GE}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- 2.5** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της ευθείας $B\Gamma$ ώστε τα Δ, Γ να βρίσκονται εκατέρωθεν του B και να ισχύει $3B\Delta = 2B\Gamma$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε το διάνυσμα \vec{AD} ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- 2.6** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{OB} = \vec{\beta}, \vec{OG} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{OD} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να δείξετε ότι $\vec{AG} + \vec{DB} \parallel \vec{AB}$.
- 2.7** Αν ισχύει ότι $\vec{AD} = 3\vec{AB} + 5\vec{AG}$ και $\vec{AE} = 5\vec{AB} + 3\vec{AG}$ να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.
- 2.8** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E του επιπέδου ώστε $\vec{AD} = 5\vec{AB} + 8\vec{AG}$ και $\vec{AE} = 3\vec{AB} + 10\vec{AG}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.
- 2.9** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E του επιπέδου ώστε $\vec{AD} = 2\vec{AB} + 5\vec{AG}$ και $\vec{AE} = 5\vec{AB} + 2\vec{AG}$.
 α) Να γράψετε το διάνυσμα \vec{DE} ως γραμμικό συνδυασμό των \vec{AB} και \vec{AG}
 β) Να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.
- 2.10** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E του επιπέδου ώστε $\vec{AD} = 4\vec{AB} - 9\vec{AG}$ και $\vec{AE} = \vec{AB} - 6\vec{AG}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.
- 2.11** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:
 α) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{u} + 3\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$
 β) το διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{u} - 2\vec{v}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\beta}$.
- 2.12** Αν οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A, B, Γ, Δ είναι αντίστοιχα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να δείξετε ότι τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα.
- 2.13** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{DG} = \vec{\alpha}, \vec{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{BD} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι τραπέζιο.
- 2.14** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{AB} = \vec{\beta}, \vec{AD} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ είναι τραπέζιο.
- 2.15** Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{AB} = \vec{\beta}, \vec{AD} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:
 α) το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
 β) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{BG} - \vec{AD}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$.
- 2.16** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}, \vec{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{OD} = 6\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα.

2.17 Δίνεται στο παρακάτω σχήμα ότι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{BG} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta E} = 2\vec{\beta}$.
Να δείξετε ότι τα σημεία A, Γ, E είναι συνευθειακά.



2.18 Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$.
Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.19 Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OG} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$.
Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.20 Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$.
Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.21 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\overrightarrow{AG} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Αν Δ σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AD} = 11\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$,
να δείξετε ότι τα σημεία B, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

2.22 Αν ισχύει $4\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 9\overrightarrow{MG} = 0$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.23 Αν ισχύει $9\overrightarrow{OA} - 7\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OG} = 0$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.24 Αν ισχύει $\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PB} - 4\overrightarrow{GM}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.25 Αν ισχύει $2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία K, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

2.26 Αν ισχύει $5\overrightarrow{PL} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία K, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

2.27 Αν ισχύει $(\kappa + 2)\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = (\kappa + 5)\overrightarrow{MG}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

2.28 Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και E, Z σημεία τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AG}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα \overrightarrow{EZ} , \overrightarrow{ZB} ως γραμμικό συνδυασμό των \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AD}

β) Να δείξετε ότι τα σημεία B, Z, E είναι συνευθειακά.

2.29 Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία E, Z στην AD και στην διαγώνιο AG αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

β) $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta})$ και να υπολογίσετε το \overrightarrow{EB} με την βοήθεια των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

γ) τα σημεία E, Z, B είναι συνευθειακά.

2.30 Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{BD} = \vec{\beta}$ και $\Gamma\Delta = 3AB$.

Αν E σημείο της διαγωνίου AG ώστε $E\Gamma = 3EA$

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{BE} και \overrightarrow{BD} ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.

2.31 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Πάνω στα τμήματα AB , AM και $A\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία Δ , E , Z αντίστοιχα ώστε $A\Delta = \frac{1}{2}AB$, $AE = \frac{1}{3}AM$, $AZ = \frac{1}{4}A\Gamma$. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ τότε:

- α) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$, $\overrightarrow{\Delta Z}$
 β) Να δείξετε ότι τα σημεία Δ , E , Z είναι συνευθειακά.

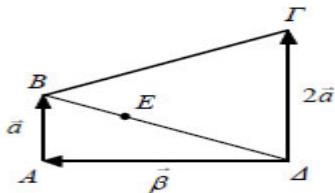
2.32 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E , Z μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$

2.33 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ στη $B\Gamma$. Αν K , Λ , M μέσα των $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα τότε να δείξετε ότι $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{A\Lambda} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A\Delta}$.

2.34 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και M , N τα μέσα των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 4\overrightarrow{MN}$. **(ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ)**

2.35 Έστω ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\Delta\Gamma = \frac{4}{3}AB$. Θεωρούμε το σημείο E με $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ και ονομάζουμε Z το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔE . Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AZ} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$.

2.36 Στο παρακάτω σχήμα έχουμε $\Delta E = 2EB$.



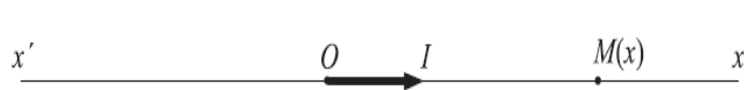
- α) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta B}$, \overrightarrow{EB} , $\overrightarrow{\Gamma B}$, \overrightarrow{AE} , $\overrightarrow{E\Gamma}$
 β) Να δείξετε ότι τα σημεία A , E , Γ είναι συνευθειακά. **(ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ)**

2.37 Δίνονται τα σημεία A , B , Γ . Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό. **(ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ)**

3. Συντεταγμένες στο Επίπεδο

Άξονας

Αν σε μια ευθεία x' επιλέξουμε δύο σημεία O και I ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox , τότε λέμε ότι έχουμε έναν **άξονα με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα \vec{i}**

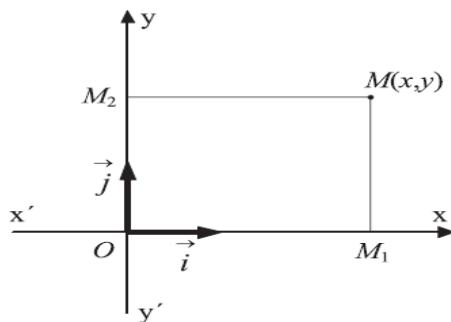


Οι ημιευθείες Ox και Ox' λέγονται αντίστοιχα **θετικός και αρνητικός ημιάξονας**.

Για κάθε σημείο M του άξονα x' ισχύει $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{i}$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παραλληλίας θα υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x έτσι ώστε να ισχύει $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$
Τον αριθμό x τον ονομάζουμε **τετμημένη** του σημείου M και το σημείο το συμβολίζουμε με $M(x)$

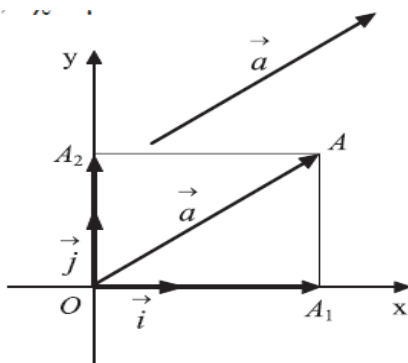
Καρτεσιανό Επίπεδο

Θεωρούμε σε ένα επίπεδο δύο κάθετους άξονες x' και y' με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα \vec{i} και \vec{j} αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε ένα **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** ή ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε με Oxy .



Αν M τυχαίο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου και φέρουμε παράλληλη στον $y'y$ που τέμνει τον $x'x$ στο M_1 και παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει τον $y'y$ στο M_2 , τότε η τετμημένη x του M_1 λέγεται τετμημένη του M και η τετμημένη y του M_2 λέγεται τεταγμένη του M .
Οι μοναδικοί αριθμοί x, y λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου M και συμβολίζονται με $M(x, y)$

Συντεταγμένες Διανύσματος



Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και \vec{a} ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O παίρνουμε $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.
Αν A_1 και A_2 οι προβολές του A πάνω στους άξονες, τότε ισχύει:
 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} \Leftrightarrow \vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$
Τα διανύσματα $x \cdot \vec{i}$ και $y \cdot \vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες του \vec{a}** κατά την διεύθυνση των \vec{i} και \vec{j} αντίστοιχα.
Οι αριθμοί x, y λέγονται **συντεταγμένες του \vec{a}**

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (x, y)$$

Ίσα Διανύσματα

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες .

Δηλαδή : Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε : $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε έχουμε :

α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

β) $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

γ) $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

δ) $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

Συντεταγμένες μέσου τμήματος

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

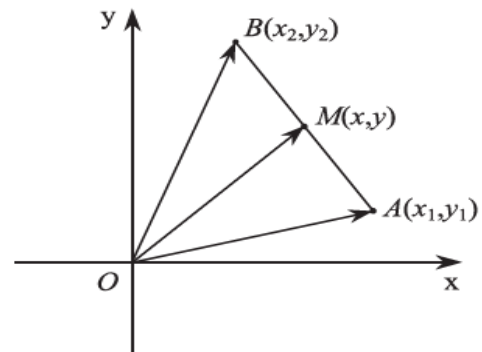
Έστω $M(x, y)$ μέσο του AB .

Τότε θα ισχύει $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ (1) με $\vec{OM} = (x, y)$, $\vec{OA} = (x_1, y_1)$

και $\vec{OB} = (x_2, y_2)$.

Η (1) $\Rightarrow (x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} \Leftrightarrow (x, y) = \frac{(x_1+x_2, y_1+y_2)}{2}$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1+x_2}{2} \\ \text{και} \\ y = \frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$



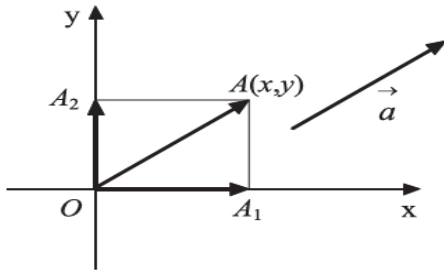
Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Πράγματι : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Leftrightarrow \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Μέτρο διανύσματος

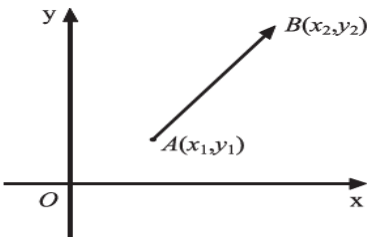
$$\text{Αν } \vec{a} = (x, y) \text{ τότε } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Έστω το διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ και A σημείο με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.
Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OAA_1 έχουμε:
 $(OA)^2 = (OA_1)^2 + (AA_1)^2 \Leftrightarrow (OA)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2$
 $\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Απόσταση δύο σημείων

$$\text{Αν } A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2) \text{ τότε η απόσταση των δύο σημείων είναι : } (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



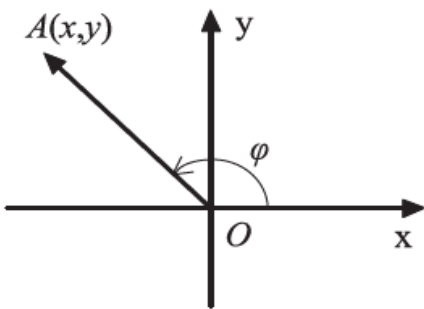
Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε οι συντατεγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, άρα θα έχει μέτρο:
 $|\overrightarrow{AB}| = (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Συντελεστής διεύθυνσης Διανύσματος



Έστω το διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ και A σημείο με $\vec{OA} = \vec{a}$.
Τη γωνία φ που διαγράφει ο θετικός ημίξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA , την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{a} με τον άξονα x'** .

Από τον ορισμό της γωνίας προκύπτει ότι $0 \leq \varphi < 2\pi$

Το πηλίκο της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$ με $x \neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του \vec{a} και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{a}}$ ή λ .

$$\lambda_{\vec{a}} = \frac{y}{x}$$

Ισχύουν :

α) $\vec{a} \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = 0$ αφού $y = 0$

β) $\vec{a} \parallel y'y \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \text{δεν ορίζεται, αφού } x = 0$

Κριτήριο Παραλληλίας Διανύσματος

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}}$$

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Τότε έχουμε :

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

Ασκήσεις

Πράξεις με Συντεταγμένες

3.1 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 4)$, $\vec{\beta} = (-1, 3)$.

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων : $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, $3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$.

3.2 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 1)$, $\vec{\beta} = (5, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-1, 1)$.

Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

3.3 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 3)$, $\vec{\beta} = (1, -1)$ και $\vec{\gamma} = (3, -2)$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων : $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $2\vec{\alpha} - \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \frac{1}{2}\vec{\gamma}$.

Μηδενικό Διάνυσμα

3.4 Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (\kappa^2 + \kappa - 2, 3\lambda - 3)$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

3.5 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (\kappa^2 - 5\kappa + 6, \kappa - 2)$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Ισότητα Διανυσμάτων - Αντίθετα Διανύσματα

3.6 Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, 2\kappa - \lambda)$, $\vec{\beta} = (2\lambda, 4)$ να είναι ίσα.

3.7 Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa - 1, \lambda - 2)$, $\vec{\beta} = (\lambda, 2\kappa - 1)$ να είναι αντίθετα.

3.8 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2, 2\lambda^2 - 3\lambda - 2)$ και $\vec{\beta} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6, -3\lambda^2 + 7\lambda - 2)$ να είναι ίσα. **(ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ)**

3.9 Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί λ, μ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\lambda + \mu)\vec{i} + (\lambda - 3\mu + 1)\vec{j}$ και $\vec{\beta} = (2\mu + 5)\vec{i} + (4\lambda - \mu + 1)\vec{j}$ να είναι ίσα.

Παραλληλία Διανύσματος με Άξονες

3.10 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4, \lambda + 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε :

α) $\vec{\alpha} = \vec{0}$ β) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel x'x$ γ) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel y'y$

3.11 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4, \lambda^2 - 3\lambda + 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε :

α) $\vec{\alpha} = \vec{0}$ β) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel x'x$ **(ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ)**

3.12 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (-y^2 + 4y - 5, x + 2)$. Να βρείτε τις τιμές των x, y αν :

α) $\vec{\alpha} - \vec{\beta} \parallel x'x$ β) $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = -20\vec{i} + 9\vec{j}$

3.13 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda^2 + 3\lambda, \lambda^2 - 9)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 5, 3\lambda - 1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του λ αν :

- α) τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα
 β) το διάνυσμα \vec{a} είναι το μηδενικό διάνυσμα
 γ) είναι $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} \parallel x'x$
 δ) είναι $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} \parallel y'y$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

3.14 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\kappa - 1, -2)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 2, \kappa)$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε να ισχύει $3\vec{a} - 2\vec{\beta} = \vec{0}$

3.15 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3), \vec{v} = (2, 1)$. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{w} = (4, 16)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} .

3.16 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3), \vec{\beta} = (-1, 2)$. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{v} = (4, 13)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.

3.17 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2\lambda + 1, -2), \vec{\beta} = (1, 2)$ και $\vec{\gamma} = (\lambda, \mu)$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 Να βρεθούν τα λ, μ ώστε να ισχύει $\vec{a} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$.

3.18 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ και $\vec{\beta} = (y - 2)\vec{i} + (x + 6)\vec{j}$ με $x, y \in \mathbb{R}$

για τα οποία ισχύει $2\vec{a} - 3\vec{\beta} = (-7, -6)$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των x, y
 β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{v} = -10\vec{i} + 4\vec{j}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.

Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

3.19 Δίνονται τα σημεία $A(2, 8)$ και $B(6, -4)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

3.20 Δίνεται το τμήμα $ΚΛ$ με $Λ(4, 3)$ και το μέσο $N(-2, 6)$ του $ΚΛ$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K .

3.21 Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(1, -2)$ ως προς το $B(-1, 3)$.

3.22 Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 2\kappa - 4), B(-2\lambda - \kappa, 3\lambda - \kappa)$ και $M(\kappa, \lambda - 1)$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ώστε το M να είναι το μέσο του AB .

3.23 Δίνονται οι κορυφές $A(1, 3), B(5, 3)$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$. Αν το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι το $K(3, 7)$ να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .

3.24 Δίνονται οι κορυφές $A(2, 3), B(4, -1)$ και $\Gamma(0, 5)$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$. Να βρείτε την κορυφή Δ καθώς και το κέντρο K του παραλληλογράμμου.

3.25 Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(-3, 2)$, διαμέτρου AB με $A(1, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

3.26 Τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι τα σημεία $K(1, 2), Λ(3, 5)$ και $M(2, -4)$.
 Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ του τριγώνου $ΑΒΓ$.

3.27 Τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι τα σημεία $K(-2, -2), Λ(-1, 0)$ και $M(2, -1)$.
 Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ του τριγώνου $ΑΒΓ$.

3.28 Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy οι τετμημένες δύο σημείων A και B είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 + 3\lambda - 5)x - 10 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε το μέσο του τμήματος AB να έχει τετμημένη ίση με $-\frac{1}{2}$.

Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

3.29 Αν $\Lambda(2, -5)$ και $M(3, 4)$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Lambda M}$

3.30 Αν $\overrightarrow{K\Lambda} = (-1, 4)$ και $\Lambda(2, 5)$ να βρείτε τις συντεταγμένες του K .

3.31 Έστω το σημείο $A(-1, 2)$. Να βρείτε :

α) το διάνυσμα \overrightarrow{AB} όταν $B(-3, 0)$

β) το Γ αν είναι $\overrightarrow{AG} = (-3, -5)$

γ) το Δ όταν ισχύει $2\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{DE} = \vec{0}$ και $E(3, -1)$

3.32 Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 8)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ ώστε να είναι $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$

3.33 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 1)$, $B(2, 0)$ και $\Gamma(2, -3)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της διαμέσου \overrightarrow{AM} καθώς και του σημείου Δ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AG}$.

3.34 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, 0)$, $B(1, -3)$ και $\Gamma(2, 1)$. Αν $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$ και AD διάμεσος, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overrightarrow{MD} .

3.35 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, 5)$, $B(7, 3)$ και $\overrightarrow{AK} = (1, -4)$ όπου K το κέντρο του. Να βρείτε τις συντεταγμένες των K , Γ και Δ .

3.36 Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 3\mu+2)$, $B(\mu, \lambda-6)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (4, -14)$. Να βρείτε :

α) τα λ, μ

β) ένα σημείο M ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM}$.

3.37 Δίνονται τα σημεία $A(x, y)$, $B(x+2y, x+1)$ και $\Gamma(y-3, 2x-4)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y αν ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = (-12, 10)$

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{v} = (-4, 14)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων \overrightarrow{AG} και \overrightarrow{BG}

Μέτρο Διανύσματος - Απόσταση Δύο Σημείων

3.38 Αν $\vec{a} = (-1, 2)$ και $\vec{b} = (3, -2)$ να υπολογίσετε τα μέτρα $|-2\vec{a}|$ και $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$

3.39 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ αν για το διάνυσμα $\vec{b} = (1 - \lambda, \lambda - 3)$ ισχύει $|\vec{b}| = 10$.

3.40 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ αν για το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda, \lambda + 1)$ ισχύει $|-3\vec{a}| = 15$.

3.41 Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{a} για το οποίο ισχύει $\vec{a} = (|\vec{a}| - 4, 8)$

3.42 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 1)$, $B(3, -2)$, $\Gamma(7, -4)$.

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = -4\overrightarrow{AG} + 7\overrightarrow{BG}$

β) Αν M μέσο του $B\Gamma$ να βρείτε το μέτρο της διαμέσου \overrightarrow{AM}

3.43 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, -2)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(-1, 3)$. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του καθώς και τα μήκη των διαμέσων του.

3.44 Έστω τα σημεία $A(8, -2)$, $B(0, 6)$ και $\Gamma(2, 0)$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρεθεί το μήκος της διαμέσου AD .

3.45 Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-3, -3)$, $B(-1, 3)$ και $\Gamma(11, -1)$ είναι ορθογώνιο.

3.46 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, 1)$, $\Gamma(4, 3)$, $\Delta(2, 3)$. Να βρείτε :

α) τα μήκη των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$

β) συντεταγμένες του κέντρου K του $AB\Gamma\Delta$ καθώς και της κορυφής B

3.47 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$ και $B(-9, -2)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ το οποίο να ισαπέχει από τα A και B .

3.48 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, 1)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $y'y$ το οποίο να ισαπέχει από τα A και B .

3.49 Δίνονται τα σημεία $A(-2, -5)$ και $B(3, -4)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με βάση την AB .

3.50 Δίνονται τα σημεία $A(x, -2)$, $B(16, x+2)$ και $\Gamma(5, x)$. Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $|2\overline{AB} + 3\overline{B\Gamma}| = |\overline{A\Gamma}|$

3.51 Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(-1, \lambda+3)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $(AB)=5$.

3.52 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-6, 8)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$, παράλληλο του $\vec{\alpha}$, με $|\vec{\beta}| = 5$

3.53 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -1)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$, αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, με $|\vec{\beta}| = 4\sqrt{3}$

3.54 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -3)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$, αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, με $|\vec{\beta}| = 3$

Παράλληλα Διανυσμάτων

3.55 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 1, 3)$ και $\vec{\beta} = (2\lambda - 2, \lambda)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

3.56 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 1, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 2\lambda - 1)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

3.57 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -8)$ και $\vec{\beta} = (-1, \lambda - 2)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$

3.58 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \lambda - 1)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 1, 9)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$

3.59 Έστω τα σημεία $A(-3, -2)$, $B(2, \kappa)$, $\Gamma(5, -3)$ και $\Delta(4, \kappa)$. Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $\overline{AB} \parallel \overline{\Gamma\Delta}$

3.60 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = (-2, 9)$ και $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = (10, -5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (4, 7)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

γ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\lambda, 6 - \lambda)$ να είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

3.61 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 1 - \lambda)$, $\vec{\beta} = (\lambda + 1, 2)$ και $\vec{\gamma} = (6, -10)$. Αν ισχύει $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\gamma}$ τότε :

α) να βρείτε τον αριθμό λ

β) να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $5\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}$

γ) να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{j}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

3.62 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-10, 2)$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

β) τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\lambda, 1 - \lambda)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$

Συνευθειακά Σημεία

3.63 Να δείξετε ότι τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(-3, 3)$ είναι συνευθειακά.

3.64 Δίνονται τα σημεία $A(8, -6)$, $B(-2, -2)$ και $\Gamma(-7, 0)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

β) Να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν $\overline{A\Gamma} = \lambda\overline{B\Gamma}$ και $\overline{AB} = \kappa\overline{A\Gamma}$

3.65 Δίνονται τα σημεία $A(0, 4)$, $B(\kappa, -2)$ και $\Gamma(-2, 2)$. Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

3.66 Δίνονται τα σημεία $A(-1, \lambda - 1)$, $B(3, \lambda + 3)$ και $\Gamma(\lambda^2, 2)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

3.67 Δίνονται τα σημεία $A(1, -4)$ και $B(4, 2)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα $x'x$ ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

3.68 Δίνονται τα σημεία $A(\alpha + 1, 3)$, $B(\alpha, 4)$ και $\Gamma(-4, 5\alpha + 4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} , $\overline{B\Gamma}$

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά

γ) Για $\alpha = 1$, να βρείτε τον αριθμό λ ώστε να ισχύει $\overline{A\Gamma} = \lambda \overline{AB}$

3.69 Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 1)$ και $\Gamma(-1, 5)$ είναι κορυφές τριγώνου

3.70 Δίνονται τα διανύσματα $\overline{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overline{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overline{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} , $\overline{B\Gamma}$

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ είναι κορυφές τριγώνου.

3.71 Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-3, 3)$ και $\Gamma(3, 1)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου M από το B , όπου AM διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$

3.72 Δίνονται τα σημεία $A(\lambda - 1, -2)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(\lambda - 3, 2\lambda)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε τα σημεία A, B, Γ να σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Για $\lambda = -1$, να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM

3.73 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(7, 0)$ και $\Gamma(1, 4)$. Αν Δ μέσο της διαμέσου AM και σημείο E για το οποίο ισχύει $2\overline{AE} = \overline{E\Gamma}$, τότε :

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E

β) να δείξετε ότι τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

3.74 Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης :

α) του διανύσματος $\vec{\alpha} = (2, -6)$

β) του διανύσματος \overline{AB} με $A(2, -4)$ και $B(-3, 6)$

3.75 Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, \lambda - 1)$, $B(5, -2\lambda)$ με $\lambda \neq 5$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν το διάνυσμα \overline{AB} έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με -4 .

3.76 Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, \mu + 4)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \kappa - 9)$ με $\kappa, \mu \neq 0$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης 2 και -3 αντίστοιχα. Να βρείτε :

α) τις τιμές των κ και μ

β) τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

3.77 Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, 3)$

3.78 Αν $A(7, -1)$, $B(4, 2)$ να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ το διάνυσμα \overline{AB}

3.79 Αν $A(3, 0)$, $B(0, -\sqrt{3})$ να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ το διάνυσμα \overline{AB}

3.80 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda, \lambda^2 - 6)$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα \vec{a} να σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

3.81 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, \lambda - 5)$, $\vec{\beta} = (\lambda - 3, 6)$ για τα οποία ισχύει $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 1$

β) Θεωρούμε επίσης το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 4\vec{a} + 3\vec{\beta}$

β₁) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ το διάνυσμα $\vec{\gamma}$

β₂) Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\kappa, \kappa - 6)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$

4. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Ορισμός Εσωτερικού Γινομένου

Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

– Άμεσες συνέπειες του ορισμού :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$

β) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

γ) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

δ) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

ε) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$ αφού $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}| \cdot \text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = |\vec{\alpha}|^2 \cdot 1 = |\vec{\alpha}|^2$

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

α) $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

$$(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \cdot (x_2, y_2) = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

$$\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (x_1, y_1) \cdot (\lambda x_2, \lambda y_2) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

Άρα $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

$$\beta) \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$, τότε :

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1 \cdot (x_2 + x_3) + y_1 \cdot (y_2 + y_3) = (x_1x_2 + x_1x_3) + (y_1y_2 + y_1y_3) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \end{aligned}$$

$$\gamma) \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$$

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} &\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 = -x_1 \cdot x_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Εύρεση Εσωτερικού Γινομένου

4.1 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$, τότε να βρείτε :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\beta}^2$ γ) $3\vec{\alpha} \cdot (-4\vec{\beta})$ δ) $2\vec{\alpha}(3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ ε) $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})(3\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$

4.2 Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ τότε να βρείτε :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ γ) $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

4.3 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$, τότε να βρείτε :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$ δ) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

4.4 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 150^\circ$ να βρείτε :

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
β) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

4.5 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 4, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 28$ τότε να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$
γ) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

4.6 Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) Αν τα διανύσματα είναι ομόρροπα και $|\vec{\alpha}| = 5, |\vec{\beta}| = 6$
β) Αν τα διανύσματα είναι αντίρροπα και $|\vec{\alpha}| = 8, |\vec{\beta}| = 3$

4.7 Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, |\vec{\gamma}| = 3$ τότε να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

4.8 Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, |\vec{\gamma}| = 3$ τότε να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

4.9 Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 4|\vec{\gamma}| = 4$ τότε να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

4.10 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά ίση με 2. Αν AD το ύψος του, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\overline{AB} \cdot \overline{AF}, \overline{AB} \cdot \overline{BF}, \overline{AD} \cdot \overline{AF}$ και $\overline{AF} \cdot \overline{DB}$

Κάθετα Διανύσματα - Εύρεση Μέτρου Διανύσματος

4.11 Αν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 6$, να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

4.12 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$.

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει $(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$

4.13 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$ τότε να βρεθούν τα μέτρα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|, |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$

4.14 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ τότε :

- α) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του k
 β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

4.15 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ τότε :

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$
 β) Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

4.16 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ τότε :

- α) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$
 β) Να βρείτε το μέτρο του \vec{u}

4.17 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$ και $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$

- α) Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

4.18 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ και $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$

- α) Να δείξετε ότι $\kappa = -2$
 β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$
 γ) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα

4.19 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{13}$, τότε να βρείτε το $|\vec{\beta}|$

4.20 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{8}, |\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 45^\circ$, τότε να βρείτε το $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

4.21 Αν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ τότε να βρείτε το μέτρο $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

4.22 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$

- α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 4$
 β) Να βρείτε το μέτρο $|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$

4.23 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4$ και $|4\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3$
 β) Να βρείτε το μέτρο $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

4.24 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ να βρείτε τα μέτρα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$

4.25 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$,

να βρείτε τα μέτρα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$

4.26 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ και $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = 5$.

- α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$
 β) Να βρείτε το μέτρο $|3\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}|$

- 4.27 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{6}$. Να δείξετε ότι $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 5$
- 4.28 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$. Θεωρούμε και τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{B\Gamma} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.
- 4.29 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$. Θεωρούμε και τρίγωνο ABΓ με $\vec{GA} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ και $\vec{GB} = 4\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}$, για το οποίο ισχύει $|\vec{AB}| = \sqrt{91}$
 α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 5$
 β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM
- 4.30 Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 135^\circ$.
- 4.31 Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$
- 4.32 Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τότε να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sqrt{3}$.
- 4.33 Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$
 Να βρείτε διάνυσμα \vec{x} ώστε να ισχύουν $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$.
- 4.34 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$
 Να βρείτε διάνυσμα \vec{x} ώστε να ισχύουν $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{x})$.

Γωνία Δύο Διανυσμάτων

- 4.35 Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{u}})$
- 4.36 Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 1$ και $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$ να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$
- 4.37 Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 45^\circ$, να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha}})$
- 4.38 Αν $|\vec{\alpha}| = 5, |\vec{\beta}| = 3, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}})$
- 4.39 Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\delta} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\delta}})$
- 4.40 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$. Αν $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$
- 4.41 Αν $|\vec{\alpha}| = 1, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$
 α) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\beta}$
 β) Αν $\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να βρείτε τη γωνία $\hat{\varphi} = (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$
- 4.42 Αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να βρείτε το $\text{syn}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- 4.43 Αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να βρείτε το $\text{syn}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

4.44 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 5$ και $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -46$.

α) Να βρείτε το $\sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

4.45 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ και $(3\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}) \perp (6\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

α) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$. Να βρείτε :

β₁) την τιμή του λ

β₂) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

β₃) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$

4.46 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$. Θεωρούμε επίσης το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\vec{AB} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{AD} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ με $(ΑΓ) = 6$ και ισχύει $\vec{AG} \cdot \vec{DB} = 36$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 4$.

β) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΔΒ.

γ) Να βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓΔ

δ) Να βρείτε τη γωνία \hat{A} του ΑΒΓΔ.

4.47 Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

4.48 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$.

α) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) Να δείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$

4.49 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}, \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ και $\vec{u} \perp \vec{v}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$. Να δείξετε ότι :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$

β) τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

4.50 Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ αν $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (4, 5)$

β) $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$ αν $A(3, 1), B(2, -5), \Gamma(-4, 3), \Delta(-1, -2)$

4.51 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 8, 1)$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$. Να βρείτε :

α) τον πραγματικό αριθμό λ

β) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

4.52 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 3, 4\lambda - 1)$ και $\vec{\beta} = (-3\lambda + 9, \lambda - 3)$ να είναι κάθετα.

4.53 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2x - 1, x + 1)$ και $\vec{\beta} = (x + 1, 2x + 3)$. Να βρεθεί το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα.

4.54 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα \vec{u} και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ είναι κάθετα

4.55 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\vec{AG} = (1, 6)$

α) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{AG} να είναι κάθετα .

β) Για $\kappa = 1$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{BG}

4.56 Δίνονται τα σημεία $A(3, 2), B(7, -4)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε $\widehat{AMB} = 90^\circ$

4.57 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (-3, 4 - \lambda)$ για τα οποία ισχύουν $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (13\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ

β) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\mu, \mu - 8)$

4.58 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 4), B(-2, -1)$ και $\Gamma(5, 7)$. Θεωρούμε σημείο M ώστε να ισχύει $\vec{MG} = 2\vec{BM}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{AM} \perp \vec{BG}$

γ) Να βρείτε σημείο K του άξονα $x'x$ ώστε να ισχύει $\vec{AK} \perp \vec{AB}$

4.59 Αν $\vec{\alpha} = (3, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -1)$ να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

4.60 Αν $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (7, -1)$ να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

4.61 Αν $\vec{\alpha} = (0, 2)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$ να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

4.62 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -7)$ και $\vec{\beta} = (-3, \lambda)$. Αν $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 135^\circ$, να βρείτε το λ .

4.63 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2), B(-2, 1)$ και $\Gamma(3, 6)$. Να βρείτε τη γωνία A .

4.64 Αν $A(4, 1), B(8, 2)$ και $\Gamma(1, 3)$, να δείξετε ότι η γωνία των \vec{AB}, \vec{AG} είναι αμβλεία.

4.65 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{AB} = (-4, -6)$ και $\vec{AG} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της διαμέσου \vec{AM}

β) Να δείξετε ότι η γωνία A είναι οξεία

γ) Αν $A(3, 1)$ να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ

4.66 Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ για τα οποία ισχύουν $\vec{AB} = (-1, 4)$ και $\vec{AG} = (3, 6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία A του τριγώνου είναι οξεία ή αμβλεία.

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM

4.67 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(\lambda - 1, -1), B(\lambda, 2)$ και $\Gamma(7, -\lambda)$. Αν ισχύει $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = -15$, να βρείτε :

α) τον πραγματικό αριθμό λ

β) τη γωνία \widehat{B} του τριγώνου $AB\Gamma$

4.68 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (7, -1)$ και $3\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (8, -19)$. Να βρείτε :

α) τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

4.69 Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$

4.70 Αν $\vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (9, 7)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

4.71 Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

4.72 Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ να βρείτε την προβολή του $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

4.73 Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και κάθετα, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

4.74 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(1, -3)$, $B(-3, 0)$ και $\Gamma(4, 4)$. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου ABΓ, τότε να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{B\Delta}$

4.75 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (-8, 6)$

α) Να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αμβλεία

β) Να βρείτε το μήκος της προβολής του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

4.76 Αν $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -3)$, να υπολογίσετε το μέτρο $|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})|$

4.77 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 7)$ και $\vec{\beta} = (2, 4)$

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$

β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$

4.78 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (1, 5)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha} = (1, -1)$

4.79 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta} = (1, 2)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha} = (-1, 1)$

4.80 Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 8$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(x \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 5 \cdot \vec{\alpha}$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x .

4.81 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{2}{3} \vec{\beta}$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{3}{4} \vec{\alpha}$.

α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\vec{\beta}|$

β) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

4.82 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ αν ισχύει $(\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

γ) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha} = (-1, 2)$.

Τυπολόγιο στα Διανύσματα

1. Μέσο Τμήματος

α. Οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

β. Αν O σημείο αναφοράς τότε ισχύει $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

2. Τμήμα με γνωστά τα άκρα

α. Οι συντεταγμένες του διανύσματος \vec{AB} είναι $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

β. Η απόσταση του A από το B είναι $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3. Μέτρο και Συντελεστής Διεύθυνσης διανύσματος

α. Αν $\vec{a} = (x, y)$ τότε το μέτρο του είναι: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

β. Αν $\vec{a} = (x, y)$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του είναι $\lambda_{\vec{a}} = \frac{y}{x}$

γ. Η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x'x είναι $\epsilon\phi\omega = \lambda_{\vec{a}} = \frac{y}{x}$

4. Παράλληλα Διανύσματα

α. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

β. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{\beta}$. Αν $\lambda > 0$ τα διανύσματα είναι ομόρροπα και $\lambda < 0$ αντίρροπα

γ. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}}$

δ. Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν $\vec{AB} \parallel \vec{B\Gamma}$

5. Κάθετα Διανύσματα

α. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

β. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \lambda_{\vec{\beta}} = -1$

6. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

α. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{a}, \vec{\beta})$

β. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ όπου $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

γ. Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα τότε και μόνο τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}|$

δ. Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα τότε και μόνο τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| |\vec{\beta}|$

7. Γωνία δύο Διανυσμάτων

α. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι: $\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$

β. Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα $\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{\beta}) = 0^\circ$

γ. Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα $\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{\beta}) = 180^\circ$

5. Ενδοσχολικά Θέματα Εξετάσεων στα Διανύσματα

5.1 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω το τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύουν $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
 β) Αν M μέσο της BΓ να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
 γ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{AM}, \vec{\alpha})$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2009)

5.2 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3), \vec{\beta} = (-1, 4)$

- α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\beta}$
 β) Να βρείτε το μέτρο $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$ (ΓΕΛ 2009)

5.3 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω το τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύουν $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = -3\vec{\beta}$

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
 β) Αν M μέσο της BΓ να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$
 γ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{AM}, \vec{\alpha})$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2010)

5.4 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} = (1, -3), \vec{\beta} = (1, 2)$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$.

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ και τις συντεταγμένες του $\vec{\gamma}$
 β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x'x
 γ) Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}$
 δ) Αν $\vec{u} = (\lambda^2 - 4, -\lambda)$ να βρείτε το λ ώστε $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2010)

5.5 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ και $f(x) = |x\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ με $f(2) = 3$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -2$
 β) Να βρείτε την $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$
 γ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
 δ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$ (4^ο ΓΕΛ ΚΑΤΕΡΙΝΗΣ 2010)

5.6 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (1, -2)$ και $3\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (7, 6)$. Να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
 β) τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι παράλληλα
 γ) τον πραγματικό αριθμό x ώστε $|\vec{\alpha} + x\vec{\beta}| = 5$ (ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2011)

5.7 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{5}{8} \vec{\alpha}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ) Αν $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να βρείτε το μέτρο του. (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)

5.8 Έστω το σημείο $A(-1, 2)$ και τα διανύσματα $\vec{AB} = (3, -3), \vec{v} = (20, 13), \vec{u} = (\mu - 1, 2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{AB} με τον άξονα $x'x$

γ) Να εξετάσετε αν τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{v} είναι κάθετα

δ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\vec{AB} \parallel \vec{u}$ (ΒΕΝΕΤΟΚΛΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2013)

5.9 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε:

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $5\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα

γ) το μέτρο $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ (ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2013)

5.10 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό x ώστε να ισχύει $(\vec{\alpha} + x\vec{\beta})(\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 12$

γ) το μέτρο $|\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|$ (4^ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2013)

5.11 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta}$ ώστε να ισχύουν $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 5$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$

β) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\beta}$

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ είναι κάθετα

δ) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (12, \lambda)$ το οποίο να είναι παράλληλο στο $\vec{\alpha}$ (1^ο ΓΕΛ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

5.12 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τα μέτρα των \vec{u} και \vec{v}

γ) το γινόμενο $\vec{u}\vec{v}$

δ) το συνημίτονο της γωνίας των \vec{u} και \vec{v} (14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

5.13 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τα μέτρα των \vec{u} και \vec{v}

γ) το γινόμενο $\vec{u}\vec{v}$

δ) το συνημίτονο της γωνίας των \vec{u} και \vec{v}

ε) να βρεθεί το x ώστε $\vec{v} \perp \vec{w} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΥ 2013)

5.14 Δίνονται τα σημεία $A(2, -1)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(7, 4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του AB

β) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος \overrightarrow{AM}

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

δ) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$ (ΓΕΛ 2013)

5.15 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}, |\vec{\gamma}| = 5$.

α) Αν ισχύει η σχέση $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{1}{4}\vec{\alpha}$ (ΖΑΝΕΙΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΙΑ 2013)

5.16 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τα μέτρα των \vec{u} και \vec{v}

γ) το γινόμενο $\vec{u}\vec{v}$ (1^ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2014)

5.17 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -1$

β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

δ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ (ΓΕΛ ΣΑΝΤΟΡΙΝΗΣ 2014)

5.18 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε να είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε την γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ και την προβολή του $\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ (ΟΕΦΕ 2014)

5.19 Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$ και $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 3$

β) Να βρείτε το μέτρο $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$ (3^ο ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

5.20 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 5\sqrt{3}, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) το μέτρο $|5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta} - 5\vec{\alpha})$

δ) τη γωνία $(\vec{\alpha}, 2\vec{\beta} - 5\vec{\alpha})$ (2^ο ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

5.21 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 3$

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

γ) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2015)

5.22 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (0, 5)$ και $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (3, 1)$. Να βρείτε :

- α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
 β) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
 γ) την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ (ΟΕΦΕ 2015)

5.23 Δίνονται τα σημεία $A(\kappa, \kappa + 1), B(1, \kappa), \Gamma(0, \kappa + 2)$

- α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ ώστε τα σημεία A, B, Γ να σχηματίζουν τρίγωνο
 β) Για $\kappa = 1$, να βρείτε
 β1) Το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$
 β2) Την τιμή της παράστασης $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{GA})$ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΕΡΙΗΓΗΤΗΣ 2015)

5.24 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 2), \vec{\beta} = (3, 1)$ και $\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 2\vec{\alpha}^2 + 3\vec{\alpha}\vec{\beta}$
 β) Να βρείτε την τιμή των λ, μ ώστε το $\vec{\nu}$ να είναι κάθετο στο $\vec{\gamma} = (1, 1)$ και να έχει μέτρο $7\sqrt{2}$.
 γ) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\nu} = (2, 5)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ (1^ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)

5.25 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 7$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 6$
 β) $\text{syn}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -1$
 γ) $\vec{\alpha} = -\frac{2}{3}\vec{\beta}$
 δ) $|\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 4$ (2^ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)

5.26 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

- α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
 β) τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\nu} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\mu} = \vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.
 γ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
 δ) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\gamma}, \vec{\alpha}$ (1^ο ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

5.27 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -\sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (2, 2\sqrt{3})$

- α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
 β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
 γ) Αν $\vec{x} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{y} = -4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να βρείτε τα μέτρα τους και να δείξετε ότι είναι κάθετα μεταξύ τους.
 (1^ο ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2015)

5.28 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2), \vec{\beta} = (2, 3)$. Να βρείτε :

- α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
 β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$
 γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε το διάνυσμα $\vec{\nu} = (\kappa^2 - \kappa, \kappa)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

5.29 Δίνεται το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 5$ και $\vec{\beta} \cdot (3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 10$. Να βρείτε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ καθώς και το μέτρο του $\vec{\beta}$

β) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ) το εσωτερικό γινόμενο $(5\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

δ) τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$

5.30 Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2, |\vec{\alpha}| - 1)$ το οποίο δεν είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$, καθώς και τα διανύσματα $\vec{\beta} = (2, 6)$ και $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$

β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$

γ) Θεωρούμε διάνυσμα \vec{v} για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $(\vec{v} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\gamma}$ και $(\vec{v} + \vec{\gamma}) \perp \vec{\beta}$. Να βρείτε:

γ1) Τις συντεταγμένες του \vec{v}

γ2) Την προβολή του \vec{v} πάνω στο $\vec{\alpha}$

5.31 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (\lambda^2 - 4, \lambda)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

β) Να βρείτε την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ (6ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)

5.32 Αν ισχύει $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 1, |\vec{u} - \vec{v}| = 2$ τότε :

α) Να δείξετε ότι $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα \vec{u}, \vec{v} είναι ομόρροπα

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{w} = \vec{u} + 3\vec{v}$ (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2016)

5.33 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4), \vec{\beta} = (8, 6)$

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

β) Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

δ) Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{j}$ να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$

(ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2016)

5.34 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{u} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{u})$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Να δείξετε ότι $\vec{u} = -\frac{1}{6}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$

γ) Να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}$ και \vec{u}

δ) Και αν επιπλέον ένα διάνυσμα \vec{x} του επιπέδου ισχύει $\vec{u} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = 3\vec{\beta} + \mu\vec{u}$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού μ (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2016)

5.35 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (-\sqrt{3}, 3), \vec{\beta} = (1, \sqrt{3})$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) Να υπολογισθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \sqrt{3}\vec{\beta}$

γ) Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{OB} = \vec{\beta}, \vec{OI} = \vec{\gamma}$ τότε να δείξετε ότι $\vec{AI} \parallel \vec{OB}$ (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)

5.36 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 β) τον πραγματικό αριθμό κ αν ισχύει $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$
 γ) την γωνία των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}$ (2ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

5.37 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{3}), |\vec{\beta}| = 3, \vec{\nu} = 2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$. Να βρείτε :

α) το μέτρο $|\vec{\alpha}|$ και τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu}$
 β) το μέτρο $|\vec{\nu}|$ και την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\nu}})$
 γ) το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\nu}$ (ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2016)

5.38 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του επιπέδου .

α) Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} \vec{\alpha}$
 β) Αν επιπλέον ισχύει $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{1}{4}\vec{\alpha}$ τότε :

β₁) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}|\vec{\beta}|$
 β₂) Να βρείτε την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$
 β₃) Αν $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ να βρείτε το μέτρο του $\vec{w} = \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} - \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ (1ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2016)

5.39 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (3, -4), \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$
 β) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\beta}$
 γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ είναι κάθετα .
 δ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το $\vec{\gamma} = (12, \lambda)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\alpha}$
 (ΓΕΛ ΛΙΜΕΝΑΡΙΩΝ ΘΑΣΟΥ 2016)

5.40 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{u} \cdot \vec{v}$
 β) τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v}
 γ) τη γωνία των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v}
 δ) την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta})$ (ΓΕΛ ΜΑΝΤΟΥΔΙΟΥ 2016)

5.41 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ και $\vec{\epsilon}$ ώστε $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 5, \vec{\gamma} = (1, -2), \vec{\delta} = (1, 3), \vec{\epsilon} = (4, -3)$ και επιπλέον ισχύει $(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 3$.

α) Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν
 β) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$
 γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$
 δ) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\epsilon}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ (ΓΕΛ ΜΥΓΔΟΝΙΑΣ 2016)

5.42 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 6$

γ) Να βρείτε τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ και $(\vec{\gamma}, \vec{\beta})$. Τι παρατηρείτε για τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$;

(1^ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2016)

5.43 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (-6, 0)$

α) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\alpha}$

β) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6$

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

δ) Αν επιπλέον $\vec{\gamma} = \kappa \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ να βρείτε τον αριθμό κ και το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$

(ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΝΑΒΡΥΤΩΝ 2016)

5.44 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 3), B(1, -3)$

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος \vec{AB}

γ) Να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας AB (4^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2017)

5.45 Δίνονται τα σημεία A, B, Γ του επιπέδου τέτοια, ώστε $\vec{OA} + 2\vec{OB} = 3\vec{O\Gamma}, |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$

και $|\vec{O\Gamma}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$ όπου O η αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι :

α) το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των A και B

β) $\vec{OA} \perp \vec{OB}$

γ) $|\vec{A\Gamma}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

δ) η γωνία των διανυσμάτων $\vec{O\Gamma}$ και $\vec{\Gamma A}$ είναι αμβλεία. (1^ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2017)

5.46 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

γ) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$ (3^ο ΓΕΛ ΓΑΛΑΤΣΙΟΥ 2017)

5.47 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό λ έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $5\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

γ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ (ΓΕΛ ΒΟΙΩΤΙΑΣ 2017)

5.48 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, \vec{\beta} = (1, \sqrt{3}), (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ καθώς και την γωνία του διανύσματος $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

γ) τον πραγματικό αριθμό κ έτσι, ώστε τα διανύσματα $3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

5.49 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 6, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό κ έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

γ) για $\kappa = -12$, το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

5.50 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$

α) Να βρείτε την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$

γ) Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}^2 - \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ (ΓΕΛ ΛΕΧΑΙΟΥ 2017)

5.51 Δίνεται η εξίσωση $y = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})x + |\vec{\beta}|$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

α) Να βρεθεί το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ώστε η ευθεία να σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$

β) Να βρείτε το $|\vec{\beta}|$ αν η ευθεία περνά από το σημείο $A(0, 2)$

γ) Να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$

δ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (ΓΕΛ ΜΕΣΣΗΝΙΑΣ 2017)

5.52 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \sqrt{3} \cdot \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = 4\vec{j}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

γ) Για $\kappa = \frac{4}{5}$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \frac{5}{4}\kappa\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$

(ΓΕΛ ΜΗΛΟΥ 2017)

5.53 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$ και $\vec{\beta} = (50, \lambda)$

α) Να βρείτε το λ αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

β) Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε :

β1) να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β2) να βρείτε σημείο $M(x, x + 1)$ αν $\overrightarrow{OM} \perp \vec{u}$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2017)

5.54 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

γ) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\delta}$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2017)

5.55 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) το μέτρο του διανύσματος \vec{v}

γ) τη γωνία των διανυσμάτων \vec{v} και $\vec{\alpha}$ (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

5.56 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (2, 3)$. Να βρείτε :

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

β) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$

γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό k ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (k^2 - k, k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$
(ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

5.57 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τα μέτρα των \vec{u} και \vec{v}

γ) το γινόμενο $\vec{u}\vec{v}$

δ) το συνημίτονο της γωνίας των \vec{u} και \vec{v} (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

5.58 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 8, |\vec{\gamma}| = 5$ και είναι $3\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2\vec{\gamma}$, να δείξετε ότι:

α) $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 100$

β) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

5.59 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ Να δείξετε ότι:

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$

β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = 2$ όπου $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

γ) $|\vec{u}| = 2$

δ) $(\vec{\alpha}, \vec{u}) = 60^\circ$

(ΚΑΖΟΥΛΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2018)

5.60 Δίνεται η εξίσωση $y = (|\vec{\alpha}| - 2) \cdot x + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$.

α) Να βρεθεί το $|\vec{\alpha}|$ ώστε η παραπάνω εξίσωση να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°

β) Αν $|\vec{\alpha}| = 3$ και η παραπάνω εξίσωση διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3$

γ) Αν $|\vec{\beta}| = 2$, να αποδείξετε ότι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ (ΓΕΛ ΠΥΛΟΥ 2018)

5.61 Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

Επίσης δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να υπολογίσετε :

α) το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\vec{v}$

γ) το μέτρο του διανύσματος \vec{u} (ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ ΠΕΛΛΑΣ 2018)

5.62 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και έχουμε ότι $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\gamma}| = \sqrt{2}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα

β) Να υπολογίσετε την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

5.63 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό κ έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} - \kappa \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

γ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

δ) τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\gamma}, \vec{\beta})$ (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2018)

5.64 Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε το κ έτσι ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$.

γ) Για $\kappa = -4$. Να υπολογίσετε την γωνία των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} \neq 2\sqrt{3}\vec{\beta}$ (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

5.65 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό κ έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

5.66 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{u} = -3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) αν ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3$, τότε να υπολογίσετε το μέτρο του \vec{u}

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$

δ) αν ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = -6$ και $|\vec{u}| = 6$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha}, \vec{u})$ (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2018)

5.67 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) το μέτρο του \vec{u}

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$

δ) τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha}, \vec{u})$ (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018)

5.68 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Αν για το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, να βρείτε :

β1) τον αριθμό κ

β2) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (6^ο ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2018)

5.69 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1009, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \varphi, \varphi \in [0, \pi]$. Θεωρούμε επίσης την εξίσωση $(1009 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot x + (1009 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot y - 4|\vec{\alpha}| = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο M, το οποίο να βρείτε.

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι κάθετη στην ευθεία OM, να δείξετε ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$ (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2018)

5.70 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{\beta} = (2\sqrt{3}, -2)$. Να υπολογίσετε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ) τον πραγματικό αριθμό κ έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\kappa \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

δ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2018)

5.71 Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Δίνεται επίσης το τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύουν $\vec{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{BG} = 4\vec{\beta}$

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM

γ) Να βρείτε την γωνία B του τριγώνου ABΓ (ΓΕΛ ΜΗΛΟΥ 2018)

5.72 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (4, 6)$ και $\vec{\gamma} = (x, 4 - x)$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Αν ισχύει $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = 26$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x

γ) Για $x = -1$, να βρείτε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (ΜΟΥΣΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2018)

5.73 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε :

α1) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

α2) τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\lambda \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι κάθετα

α3) το γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

α4) τα μέτρα των \vec{u} και \vec{v}

β) Να δείξετε ότι η γωνία των \vec{u} και \vec{v} είναι οξεία. (ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2018)

5.74 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) το μέτρο $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$

γ) τη γωνία των διανυσμάτων $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}$

δ) τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\lambda \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα (ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ)

5.75 Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(x_0, 0)$ ώστε $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$

α) Να βρείτε το διάνυσμα \vec{AB} , καθώς και το μέτρο του.

β) Να δείξετε ότι $\Gamma(5, 0)$

γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές.

δ) Αν K σημείο του επιπέδου ώστε το Γ να είναι μέσο του BK, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABK (ΟΕΦΕ 2018)

5.76 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}, \vec{v} = 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 β) τα μέτρα των \vec{u} και \vec{v}
 γ) το γινόμενο $\vec{u} \vec{v}$ (6^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2019)

5.77 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3), \vec{\beta} = (-5, -4)$ και $\vec{\gamma} = (-671, \lambda - 6)$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta} - 5\vec{\alpha}$
 γ) τον αριθμό λ ώστε να ισχύει $\vec{\alpha} \parallel \vec{\gamma}$ (1^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2019)

5.78 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{v} = -3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 β) το γινόμενο $\vec{u} \vec{v}$
 γ) τα μέτρα των \vec{u} και \vec{v}
 δ) τη γωνία των \vec{u} και \vec{v} (2^ο ΓΕΛ ΚΕΡΚΥΡΑΣ 2019)

5.79 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (1, -2)$ και $3\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (7, 6)$. Να βρείτε :

α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
 β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 γ) τον πραγματικό αριθμό x ώστε να ισχύει $|\vec{\alpha} + x\vec{\beta}| = 5$ (ΓΕΛ ΓΕΡΑΣ ΛΕΣΒΟΥ 2019)

5.80 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4), \vec{\beta} = (4, x)$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα
 β) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
 γ) Να βρεθεί το διάνυσμα που είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{\alpha}$
 (ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ ΠΕΛΛΑΣ 2019)

5.81 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1), \vec{\beta} = (3, 2)$. Να βρείτε :

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
 β) την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$
 γ) τον πραγματικό αριθμό k ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (-k, k^2 + 1)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$
 (ΓΕΛ ΠΥΛΟΥ 2019)

5.82 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1), \vec{\beta} = (1, -2)$.

α) Να δείξετε ότι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}$
 β) Αν $k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = (1, 8)$, να υπολογίσετε τους αριθμούς k, λ
 γ) Αν $\vec{\gamma} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ να δείξετε ότι $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|\vec{\gamma}| = 2|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ (1^ο ΓΕΛ ΑΜΑΡΟΥΣΙΟΥ 2019)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η Ευθεία

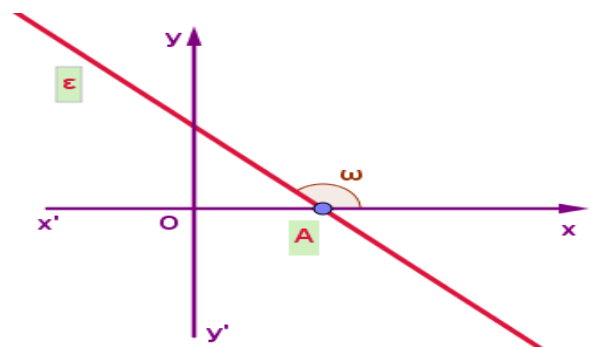
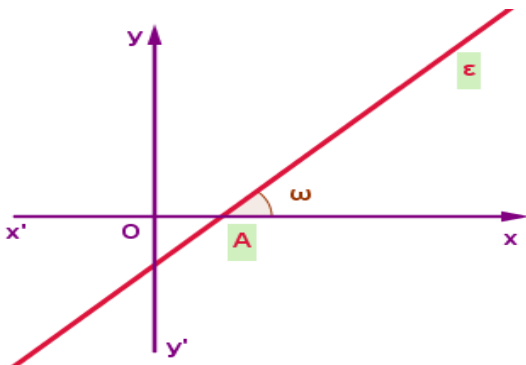
6. Εξίσωση Ευθείας

Εξίσωση Γραμμής

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C , όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

Γωνία Ευθείας με τον άξονα $x'x$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και (ε) μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .



Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία (ε) τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$** .

Παρατηρήσεις

- 1) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\omega = 0^\circ$
- 2) Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ή $0 \leq \omega < \pi$
- 3) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτό γωνία 90°

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Ως συντελεστή **διεύθυνσης ευθείας** ή **κλίση ευθείας** ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$. Δηλαδή

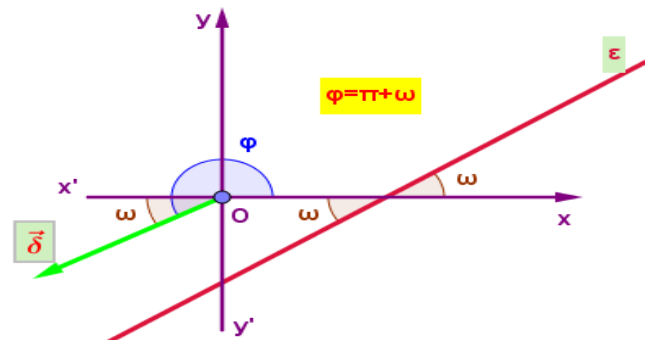
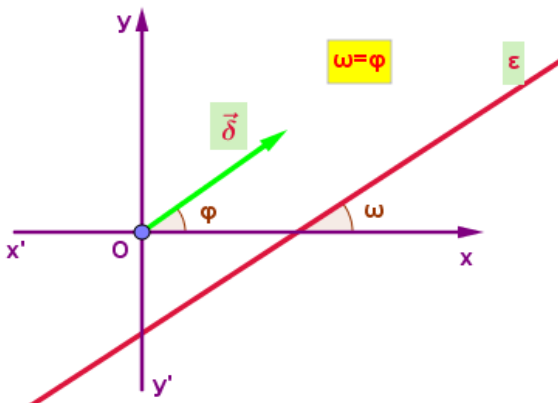
$$\lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\hat{\omega}$$

- 1) Αν $\omega = 0^{\circ}$, δηλαδή η $(\varepsilon) \parallel x'x$ τότε η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$.
- 2) Αν $\omega = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή η $(\varepsilon) \perp x'x$ τότε δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την (ε) .
- 3) Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός αν η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ είναι οξεία.
- 4) Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι αρνητικός αν η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ είναι αμβλεία.

Συντελεστής Διεύθυνσης	Γωνία με τον άξονα $x'x$
$\lambda > 0$	$0^{\circ} < \omega < 90^{\circ}$
$\lambda < 0$	$90^{\circ} < \omega < 180^{\circ}$
$\lambda = 0$	$\omega = 0^{\circ}$

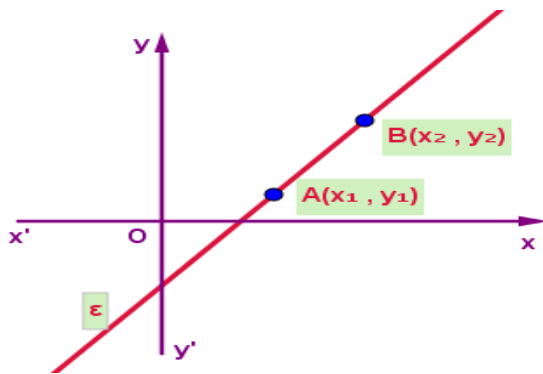
Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας Παράλληλης σε Διάνυσμα

Έστω διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία (ε) . Αν φ και ω οι γωνίες είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η (ε) με τον άξονα $x'x$, τότε θα ισχύει: $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$. Τότε $\varepsilon\varphi = \varepsilon\varphi$ ή $\varepsilon\varphi = \varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \varepsilon\varphi$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση $\lambda_{\vec{\delta}} = \lambda_{\varepsilon}$.



Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία



Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι :

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Πράγματι: Είναι $\overline{AB} \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\overline{AB}} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Συνθήκη Παράλληλιας Ευθειών

Αν δύο ευθείες του επιπέδου $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει :

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Συνθήκη Καθετότητας Ευθειών

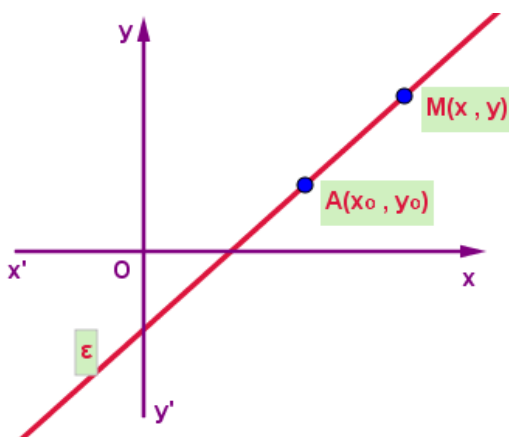
Αν δύο ευθείες του επιπέδου $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει :

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Εξίσωση Ευθείας

Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι :

$$(\varepsilon): y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$



Θεωρούμε ένα σημείο $M(x, y)$ της (ε) διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$. Τότε το διάνυσμα \overline{AM} είναι παράλληλο στην (ε), άρα θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.

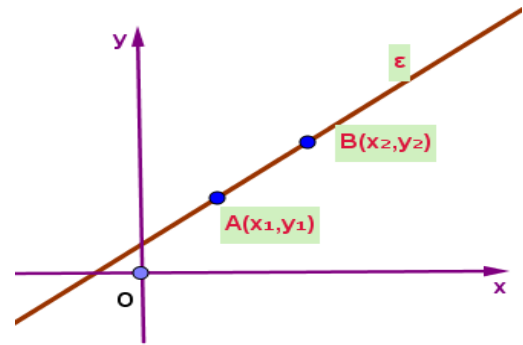
Οι συντεταγμένες του $\overline{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ άρα $\lambda_{\overline{AM}} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

Οπότε : $\lambda = \lambda_{\overline{AM}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Ειδικές περιπτώσεις Ευθειών

A) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι

$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0) \quad \text{αφού} \quad \lambda_\epsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

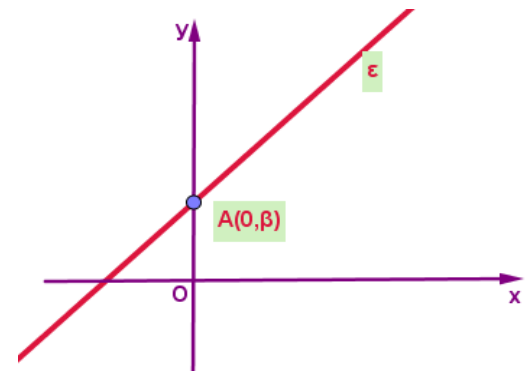


B) Η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι :

$$y = \lambda \cdot x + \beta$$

Πράγματι :

$$\begin{aligned} \text{Είναι } y - y_A &= \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - \beta = \lambda(x - 0) \\ &\Leftrightarrow y - \beta = \lambda \cdot x \Leftrightarrow y = \lambda \cdot x + \beta \end{aligned}$$



Γ) Οριζόντια Ευθεία

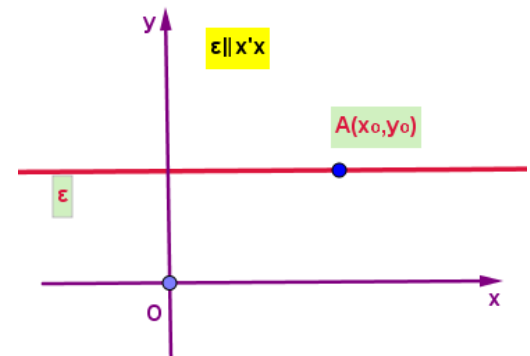
Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι :

$$y = y_0$$

Πράγματι :

Αφού $(\epsilon) \parallel x'x$ τότε θα είναι $\lambda=0$, άρα :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = 0 \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = 0 \Leftrightarrow y = y_0$$

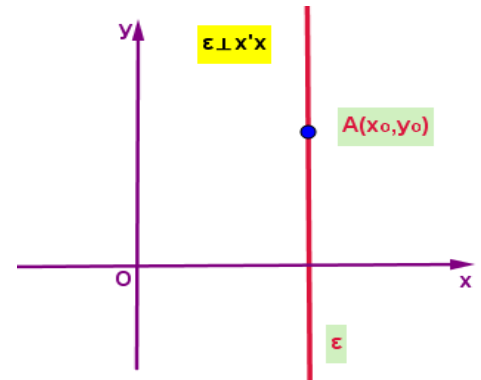


Δ) Κατακόρυφη Ευθεία

Η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι :

$$x = x_0$$

– Στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης

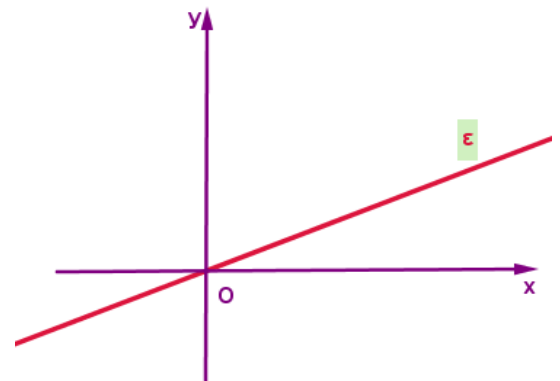
**Ε) Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων**

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι :

$$y = \lambda \cdot x$$

Πράγματι :

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων το $O(0, 0)$ τότε :
 $y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = \lambda \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = \lambda \cdot x$.

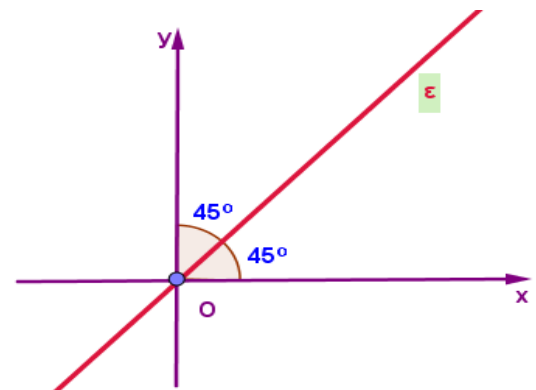
**Ζ) Διχοτόμος της 1ης και 3ης Γωνίας των Αξόνων**

Η διχοτόμος των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ έχει εξίσωση :

$$y = x$$

Πράγματι :

Αφού η ευθεία διχοτομεί την 1^η γωνία του άξονα , τότε θα σχηματίζει γωνία 45° με τους άξονες, άρα $\lambda = \epsilon\phi 45^\circ = 1$.
 Οπότε : $y = \lambda \cdot x \Leftrightarrow y = x$

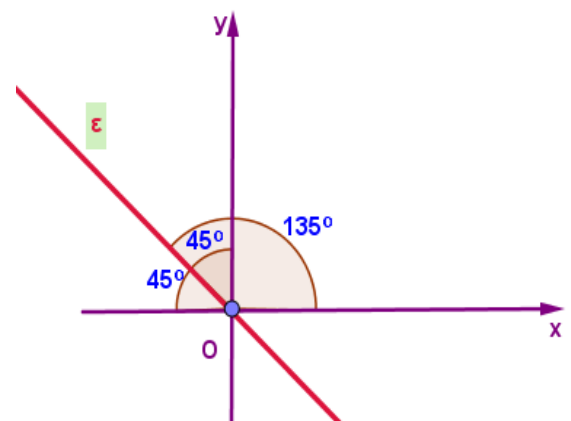
**Η) Διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων**

Η διχοτόμος των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y'$ έχει εξίσωση :

$$y = -x$$

Πράγματι :

Αφού η ευθεία διχοτομεί την 2^η γωνία του άξονα , τότε θα σχηματίζει γωνία 135° με τους άξονες, άρα $\lambda = \epsilon\phi 135^\circ = -1$.
 Οπότε : $y = \lambda \cdot x \Leftrightarrow y = -x$.



Ασκήσεις

6.1 Έστω η γραμμή C που έχει εξίσωση $y = x^2 + x - 2016$.

Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, -2014)$ ανήκει στην γραμμή C .

6.2 Έστω η γραμμή C που έχει εξίσωση $y = x^2 + 2x^3$.

Να εξετάσετε αν το σημείο $M(-1, 2)$ ανήκει στην γραμμή C .

6.3 Έστω η γραμμή C που έχει εξίσωση $y = x^2 + 3$. Να εξετάσετε αν το σημείο $M(-3, 10)$ ανήκει στην γραμμή C .

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας – Γωνία Ευθείας με τον άξονα $x'x$

6.4 Έστω ότι η ευθεία (ε) έχει κλίση ίση με κ , είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-3\kappa + 4, \kappa)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ .

6.5 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$ και $\Gamma(3, 4)$.

α) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

6.6 Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία

α) $A(-2, 1)$ και $B(3, -4)$ β) $\Gamma(0, -2)$ και $\Delta(0, 3)$ γ) $E(4, -2)$ και $Z(1, -2)$

6.7 Έστω AM η διάμεσος ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(5, 2)$, $B(-5, -3)$, $\Gamma(9, 1)$.

Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και M .

6.8 Αν οι ευθείες (ε) και (δ) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \alpha - 1$ και $\lambda_\delta = 2\alpha + 1$ τότε να βρείτε τις τιμές του α ώστε οι ευθείες να είναι α) παράλληλες β) κάθετες

6.9 Αν οι ευθείες (ε) και (δ) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{\kappa^2 - 36}{2017}$ και $\lambda_\delta = \frac{\kappa + 12}{2017}$ τότε να βρείτε τις τιμές του κ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

6.10 Αν οι ευθείες (ε) και (δ) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{\mu - 1}{4}$ και $\lambda_\delta = \mu - 3$ τότε να βρείτε τις τιμές του μ ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

Εύρεση Εξίσωσης Ευθείας

6.11 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(4, 7)$

6.12 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $K(1, 4)$ και $\Lambda(2, 6)$

6.13 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3, 5)$ και $B(3, 6)$

6.14 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $K(4, -3)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, -4)$

6.15 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(2, 5)$ και είναι κάθετη στο $\vec{\eta} = (-12, 3)$

6.16 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην $y = 3x - 1$

6.17 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, -2)$

6.18 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(0, 1)$, $B(1, 6)$, $\Gamma(6, 7)$ και $\Delta(4, 0)$, να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του.

6.19 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$

6.20 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(1, 4)$ και είναι

- α) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (1, 2)$
- β) παράλληλη στην ευθεία $\delta: y = 2x + 5$
- γ) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (8, 2)$
- δ) κάθετη στην ευθεία $\zeta: y = 3x + 6$

6.21 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $K(-2, 3)$ και είναι

- α) παράλληλη στην ευθεία $\delta: y = 5x + 2$
- β) κάθετη στην ευθεία $\zeta: y = \frac{1}{4}x + 6$
- γ) παράλληλη στον άξονα $x'x$
- δ) παράλληλη στον άξονα $y'y$
- ε) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$

6.22 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και είναι:

- α) σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα $x'x$
- β) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (1, 3)$
- γ) είναι κάθετη στο $\vec{\eta} = (1, 3)$

6.23 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(4, -1)$ και είναι

- α) παράλληλη στην ευθεία $\delta: y = -2x + 5$
- β) κάθετη στην ευθεία $\zeta: y = \frac{-x + 12}{3}$
- γ) παράλληλη στον άξονα $x'x$
- δ) παράλληλη στον άξονα $y'y$
- ε) σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$
- ζ) είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

6.24 Δίνονται τα σημεία $A(-6, 4)$, $B(\alpha, 6\alpha)$, $\Gamma(\alpha-3, \alpha+1)$.

Αν η ευθεία $B\Gamma$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 3, τότε να βρείτε

- α) τον πραγματικό αριθμό α
- β) την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$
- γ) τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$
- δ) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$
- ε) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στην ευθεία AB

Εύρεση Παραμέτρων

6.25 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = (2\alpha^2 + \alpha + 1)x - 4$ και $\delta: y = (\alpha^2 - \alpha + 4)x + \alpha - 5$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , αν οι ευθείες ε και δ είναι παράλληλες.

6.26 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α αν η ευθεία $\varepsilon: y = (\alpha^2 - 10)x + 2016$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135°

6.27 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = ax + a - 7$ και $\varepsilon_2 : y = \frac{a-6}{9}x + 2a$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a , αν οι ευθείες είναι κάθετες.

Εύρεση Εξίσωσης Μεσοκάθετου Τμήματος

6.28 Δίνονται τα σημεία $A(6, -1)$ και $B(-2, 3)$. Να βρείτε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

6.29 Δίνονται τα σημεία $A(-4, 2)$ και $B(2, 0)$. Να βρείτε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

6.30 Δίνεται το σημείο $A(-2, 3)$ και το διάνυσμα $\vec{AB} = (6, -2)$. Να βρείτε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

6.31 Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 6)$. Να βρείτε :
 α) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα A και B .
 β) τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB

Σημεία Τομής Ευθειών

6.32 Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon : x + 2y - 10 = 0$ και $\delta : 3x - 2y - 6 = 0$

6.33 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1, 10)$ και από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1 : y = 2x + 5$ και $\varepsilon_2 : y = -5x - 9$

6.34 Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 3$, $\varepsilon_2 : y = -2x + 15$ και $\varepsilon_3 : y = 3x - 5$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

6.35 Δίνονται τα σημεία $A(1, 5)$, $B(4, -1)$, $\Gamma(3, 7)$, $\Delta(-1, -9)$.
 Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$.

6.36 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y + 3 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x + 3y - 1 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών και από το μέσο του τμήματος AB όπου $A(2, 3)$ και $B(4, -1)$.

6.37 Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y - 8 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - 4y - 10 = 0$ και το σημείο A της (ε_1) που έχει τετμημένη το 4. Να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες του A
- β) την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε_1)
- γ) το σημείο τομής της (ε) με την (ε_2)

Σημεία Τομής Ευθείας με Άξονες

6.38 Δίνονται τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(4, 3)$. Να βρείτε

- α) την εξίσωση της ευθείας AB
- β) τα σημεία τομής της ευθείας AB με τους άξονες
- γ) τη γωνία που σχηματίζει η AB με τον άξονα $x'x$

6.39 Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσο του M με $A(1, -2)$ και $M(-2, 5)$. Να βρείτε :

- α) το σημείο B
- β) την εξίσωση της μεσοκάθετου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος AB καθώς και τα σημεία τομής αυτής με τους άξονες

6.40 Θεωρούμε την ευθεία (ϵ) που τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 6)$ αντίστοιχα .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της (ϵ)
- β) Αν (δ) είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην (ϵ) τότε να βρείτε :
 - β₁) την εξίσωση της ευθείας (δ)
 - β₂) το σημείο τομής των ευθειών (ϵ) και (δ)

6.41 Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1, 7)$ και $B(-3, 5)$. Να βρείτε

- α) τη μεσοκάθετη ϵ του ευθυγράμμου τμήματος AB
- β) τα σημεία τομής Γ και Δ της ευθείας ϵ με τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα
- γ) το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma$ και $B\Delta$

6.42 Δίνεται το σημείο $K(-2, 7)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει άξονες στα A και B με K το μέσο του AB

6.43 Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας $\epsilon : y = -x + 5$ με τους άξονες και στη συνέχεια να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ για τον οποίο η ευθεία $\delta : y = (10\mu - 3)x + 2$ τέμνει την (ϵ) στον άξονα $x'x$.

6.44 Οι ευθείες $\epsilon_1 : y = (\alpha - 4)x + \alpha$, $\epsilon_2 : y = (14 - 2\alpha)x - \alpha - 2$ είναι παράλληλες . Να βρείτε

- α) τον αριθμό α
- β) τα σημεία τομής των ευθειών με τους άξονες.

6.45 Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 2 - \alpha)$, $B(\alpha + 6, \alpha + 9)$ και $\Gamma(5, -3)$. Αν η ευθεία AB έχει κλίση $1/2$ να βρείτε

- α) τον αριθμό α
- β) τα σημεία τομής της ευθείας AB με τους άξονες
- γ) την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$
- δ) την εξίσωση της ευθείας ϵ που είναι κάθετη στην ευθεία AB στο σημείο B
- ε) το σημείο τομής της ευθείας ϵ με την ευθεία $A\Gamma$.

Εύρεση Εμβαδού Τριγώνου Ευθείας με Άξονες

6.46 Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(5, 1)$ και έστω (ϵ) η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB . Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της ευθείας ϵ
- β) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τους άξονες

6.47 Έστω ϵ η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(12, -3)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, 4)$.

Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της ευθείας ϵ
- β) το εμβαδόν και την περίμετρο που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τους άξονες.

6.48 Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$, $B(2, 3)$. Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από τα A και B
- β) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ϵ) με τους άξονες

Σημείο που ανήκει σε Ευθεία

6.49 Δίνονται τα σημεία $A(4, -3)$ και $B(-2, 5)$. Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από τα A και B
- β) για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , η ευθεία ϵ διέρχεται από το σημείο $K(-5, 2\mu + 1)$

6.50 Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, \alpha - 3)$ και $B(7\alpha, 3\alpha - 1)$. Η ευθεία $\epsilon : y = 3x - 22$ διέρχεται από το μέσο του AB .

Να βρείτε

- α) τον αριθμό α
- β) τα σημεία τομής της ευθείας AB με τους άξονες

6.51 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και από το σημείο τομής της ευθείας $y = x - 1$ με τον άξονα $x'x$. Μετά να βρείτε το λ ώστε το σημείο $B(\lambda - 3, 1)$ να ανήκει στην (ϵ).

6.52 Να βρείτε σημείο M της ευθείας $\epsilon: y = 2x + 9$ το οποίο ισαπέχει από τα σημεία $A(-3, 5)$ και $B(1, -3)$

6.53 Έστω η ευθεία $\epsilon: y = ax + \beta$ με $a \neq 0$.

α) Να βρεθούν τα a, β αν η ευθεία ϵ διέρχεται από τα σημεία $A(4, -3)$ και $B(-2, 5)$

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το σημείο $K(-3, 2\lambda - 1)$ να ανήκει στην ϵ .

6.54 Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 2x + y - 2 = 0$ και $\epsilon_2: x - 5y + 23 = 0$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από το σημείο τομής των ϵ_1, ϵ_2 και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-2, -2)$.

β) την τιμή του λ ώστε η ευθεία ϵ να διέρχεται από το σημείο $K(3\lambda + 1, -5)$

γ) την εξίσωση της κάθετης στην ευθεία ϵ που διέρχεται από το K .

6.55 Δίνεται η ευθεία $\epsilon: y = -2x + \rho$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(16 - \rho, 8 - \rho)$. Να βρείτε

α) τον αριθμό ρ

β) τα σημεία της ευθείας ϵ τα οποία απέχουν από το σημείο $\Delta(-1, 2)$ απόσταση ίση με 5

6.56 Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 2x - 3y + 1 = 0$ και $\epsilon_2: -x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο $A(1, -2)$.

Να βρεθεί σημείο M της ϵ_1 ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ευθεία ϵ_2

6.57 Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: y = 3x - 7$ και $\epsilon_2: y = -2x + 13$. Το σημείο $A(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ϵ_1

και το σημείο $B(\alpha + 3, 2 - \beta)$ ανήκει στην ϵ_2 . Να βρείτε τις τιμές των α, β

6.58 Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 1)$ και $B(1, 2)$ και την ευθεία $\epsilon: y = 3x - 1$.

Να βρείτε τα σημεία M της ευθείας ϵ για τα οποία το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά AB .

6.59 Θεωρούμε τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-2, 5)$ και την ευθεία $\epsilon: y = -2x - 1$.

Να βρείτε τα σημεία K της ευθείας ϵ για τα οποία το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά AB .

Προβολή και Συμμετρικό Σημείο

6.60 Δίνεται το σημείο $A(-3, 5)$ και η ευθεία $\epsilon: y = -\frac{1}{2}x + 1$. Να βρείτε :

α) την προβολή του A στην ευθεία ϵ

β) το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ϵ .

6.61 Δίνεται το σημείο $K(1, 3)$ και η ευθεία $\epsilon: y = 3x + 5$. Να βρείτε το συμμετρικό του K ως προς την ευθεία ϵ .

6.62 Δίνεται το σημείο $A(-6, 4)$ και η ευθεία $\epsilon: 4x - 5y + 3 = 0$. Να βρείτε την προβολή του A στην ευθεία ϵ

6.63 Δίνεται το σημείο $M(-2, -1)$ και η ευθεία $\epsilon: x + y - 1 = 0$. Να βρείτε

α) την προβολή του M στην ευθεία ϵ

β) το συμμετρικό του M ως προς την ευθεία ϵ .

6.64 Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $K(3, 1)$ ως προς την ευθεία $\epsilon: 2y = x - 1$

6.65 Δίνεται η ευθεία $\epsilon: y = 1 - x$ και το σημείο $A(2, -4)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ϵ)

β) την προβολή του A πάνω στην (ϵ)

6.66 Δίνεται μια ευθεία (ϵ) και ένα σημείο $A(6, -1)$ εκτός της (ϵ). Έστω $M(2, 1)$ η προβολή του A στην (ϵ).

Να βρείτε :

α) την εξίσωση της ευθείας (ϵ)

β) το συμμετρικό του A ως προς την (ϵ)

Στοιχεία Τριγώνων - Πολυγώνων

- 6.67** Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM ενός τριγώνου ABΓ με $A(4, 4)$, $B(0, 2)$, $\Gamma(0, 6)$
- 6.68** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$, $\Gamma(2, 4)$. Να βρείτε τις εξισώσεις :
- α) της πλευράς ΑΓ
 - β) του ύψους ΒΔ και της διαμέσου AM
- 6.69** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(-2, 2)$, $B(8, 12)$, $\Gamma(-10, 6)$. Να βρείτε τις εξισώσεις :
- α) των πλευρών του AB, ΒΓ, ΑΓ
 - β) του ύψους ΑΔ
 - γ) της διαμέσου AM
 - δ) της μεσοκαθέτου της πλευράς AB
- 6.70** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(3, 4)$, $B(2, 5)$, $\Gamma(6, 3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις
- α) της πλευράς του AB
 - β) του ύψους ΑΔ
 - γ) της διαμέσου ΒΜ
 - δ) της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΓ
- 6.71** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(-3, 2)$, ενώ η πλευρά ΒΓ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 5$ ενώ το ύψος ΓΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = \frac{2}{3}x + 2$. Να βρείτε
- α) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
 - β) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ
 - γ) την εξίσωση της πλευράς AB
 - δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Β
 - ε) την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ
 - ζ) την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ
- 6.72** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(-5, 4)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(3, -7)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών του .
- 6.73** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(3, 5)$, $B(3, -3)$, $\Gamma(-6, 4)$. Να βρείτε τις εξισώσεις :
- α) του ύψους ΑΔ
 - β) της διαμέσου ΒΕ
 - γ) της μεσοκαθέτου της πλευράς AB
- 6.74** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(2, 1)$. Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y = -3x + 11$ και $y = x + 3$. Να βρείτε
- α) τις εξισώσεις των πλευρών AB, ΑΓ
 - β) τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ
 - γ) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ
- 6.75** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(-5, -2)$ ενώ η διάμεσος του ΒΜ έχει εξίσωση $y = x - 1$ και το ύψος του ΓΔ έχει εξίσωση $y = -2x - 2$. Να βρείτε
- α) την εξίσωση της πλευράς AB
 - β) τις συντεταγμένες της κορυφής Β
 - γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
 - δ) τη γωνία Γ
- 6.76** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(3, 1)$, $B(2, -1)$, $\Gamma(4, -2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις
- α) της διαμέσου ΑΔ
 - β) του ύψους ΒΕ
 - γ) της μεσοκάθετης της πλευράς AB

6.77 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται οι κορυφές του $A(1, 2)$, $B(4, -1)$ και το ορθόκεντρό του $H(3, 5)$.
Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

6.78 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(-2, 3)$, $B(-3, 2)$, $\Gamma(3, 1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ και τις εξισώσεις των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

6.79 Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A(3, 2)$ και δύο από τις πλευρές του έχουν εξισώσεις $x + y - 1 = 0$ και $x - y + 3 = 0$. Να βρεθούν οι άλλες κορυφές του ορθογωνίου.

6.80 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τις πλευρές AB και $A\Delta$ να έχουν εξισώσεις $3x - y = 11$ και $x + y = 5$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το $K(-1, 1)$, να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.

6.81 Τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ μια πλευρά του εξίσωση $x - 2y + 12 = 0$, το κέντρο του είναι το $K(1, -1)$ και μια κορυφή του είναι $A(4, 8)$. Να βρεθούν οι άλλες κορυφές του.

6.82 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο του $K(-1, -2)$ του οποίου οι δύο πλευρές του έχουν εξισώσεις $2x + y + 6 = 0$, $x - 2y - 12 = 0$ αντίστοιχα.
Να βρείτε τις εξισώσεις πάνω στις οποίες βρίσκονται οι άλλες δύο πλευρές του.

6.83 Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με τις ευθείες $\varepsilon_1: y = x + 2$ και $\varepsilon_2: y = -x - 3$ να είναι φορείς των δύο πλευρών του. Αν $A(-2, 4)$ να βρείτε τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών του B, Γ, Δ .

6.84 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 6)$, $B(-2, 1)$ και το ορθόκεντρο $H\left(\frac{7}{3}, \frac{16}{3}\right)$. Να βρείτε :

- α) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
β) τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

Εύρεση Ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο

6.85 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $M(2, 3)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό ίσο με $1/2$ τ.μ.

6.86 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $K(3, 2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό ίσο με 4 τ.μ.

6.87 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $M(-1, 2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό ίσο με 3 τ.μ.

Γεωμετρικός Τόπος Σημείων

6.88 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\lambda - 1, 2\lambda - 3)$ καθώς το λ μεταβάλλεται στο \mathbb{R} .

6.89 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(3 - \sin^2\theta, 1 - \eta\mu^2\theta)$ καθώς το θ μεταβάλλεται στο \mathbb{R} .

6.90 Δίνονται τα σημεία $A(3\lambda - 1, 6\lambda - 5)$ και $B(4\mu - 6, 10 - 2\mu)$. Να αποδείξετε :

- α) ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία ε και το σημείο B κινείται σε ευθεία ζ .
β) οι ευθείες ε και ζ είναι κάθετες και να βρείτε το σημείο τομής τους.

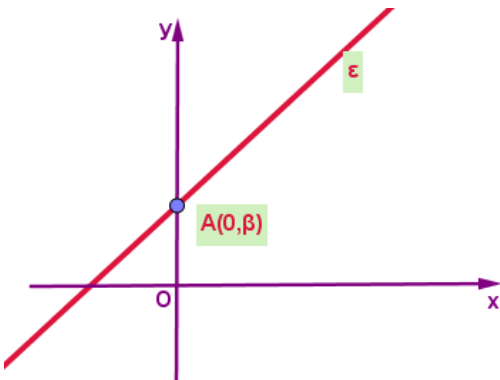
6.91 Δίνεται το σημείο $K(2\lambda - 3, 6\lambda - 11)$. Να αποδείξετε ότι :

- α) το σημείο A κινείται σε ευθεία ε
β) για οποιαδήποτε τιμή του θ το σημείο $M(2 - \sin^2\theta, 1 + 3\eta\mu^2\theta)$ ανήκει στην ευθεία ε .

6.92 Δίνονται τα σημεία $A(3\lambda - 4, 7\lambda + 2)$ και $B(\lambda + 2, 5\lambda - 18)$. Να αποδείξετε ότι το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB κινείται σε ευθεία.

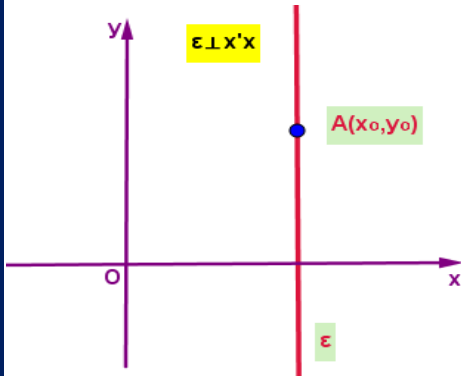
7. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (1) και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.



ΟΡΘΟ: Θα αποδείξουμε ότι κάθε ευθεία έχει εξίσωση της μορφής (1). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

A) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ τότε θα έχει εξίσωση:
 $y = \lambda \cdot x + \beta \Leftrightarrow \lambda \cdot x + (-1)y + \beta = 0$
 Άρα για $A = \lambda, B = -1, \Gamma = \beta$ η ευθεία γράφεται στην μορφή $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ με $B = -1 \neq 0$.



B) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ τότε είναι κατακόρυφη και θα έχει εξίσωση:
 $x = x_0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0$
 Οπότε για $A = 1 \neq 0, B = 0, \Gamma = -x_0$ η ευθεία γράφεται στην μορφή $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ με $A = 1 \neq 0$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ: Έστω η εξίσωση $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$. Θα αποδείξουμε ότι παριστάνει ευθεία. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

A) Αν $B \neq 0$ τότε έχουμε: $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0 \Leftrightarrow B \cdot y = -A \cdot x - \Gamma \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{\Gamma}{B}$ που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -\frac{\Gamma}{B})$.

B) Αν $B = 0$ τότε έχουμε: $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0 \Leftrightarrow A \cdot x + \Gamma = 0 \Leftrightarrow A \cdot x = -\Gamma \Leftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$ αφού $A \neq 0$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετη στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $K(-\frac{\Gamma}{A}, 0)$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η εξίσωση $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

Διάνυσμα Παράλληλο σε Ευθεία

Η ευθεία με εξίσωση $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$

Αν $B \neq 0$ τότε η ευθεία $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B} = \lambda_{\vec{\delta}}$ και επομένως είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Αν $B = 0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και επομένως παράλληλη και ως προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0, -A)$.

Διάνυσμα Κάθετο σε Ευθεία

Η ευθεία με εξίσωση $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$

Όπως είδαμε, το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$. Παρατηρούμε ότι: $\vec{\delta} \cdot \vec{\eta} = (B, -A) \cdot (A, B) = B \cdot A - A \cdot B = 0$, άρα τα διανύσματα θα είναι κάθετα μεταξύ τους, οπότε το διάνυσμα $\vec{\eta}$ θα είναι κάθετο και με την ευθεία $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$.

Ασκήσεις

Βασικές Γενικές Ασκήσεις

7.1 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 3x + y - 1 = 0$. Να βρείτε:

- α) ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $A(-2, -3)$
- β) το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ

7.2 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 6x - 2y + 5 = 0$. Να βρείτε

- α) ευθεία ζ που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$
- β) το σημείο τομής της ευθείας ζ με τους άξονες

7.3 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - y - 4 = 0$, $\varepsilon_2: 3x - 8y + 7 = 0$ και από το σημείο $M(1, 4)$.

7.4 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - 3y + 3 = 0$, $\varepsilon_2: x - 4y + 9 = 0$ και είναι κάθετη στην $\delta: x - 2y + 1 = 0$

7.5 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon : x - 3y + 5 = 0$, $\delta : 3x + y - 5 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.
- β) Να βρείτε το σημείο τομής A των ευθειών ε και δ .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και την αρχή των αξόνων

7.6 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon : 3x + y + 3 = 0$, $\delta : x + 2y - 4 = 0$.

- α) Να βρείτε το σημείο τομής A των ευθειών ε και δ
- β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα y' στο σημείο B και η ευθεία (δ) τέμνει τον άξονα x' στο σημείο Γ τότε :
 - β₁) τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ
 - β₂) την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$

7.7 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ οι πλευρές του AB και $A\Delta$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $2x + y + 2 = 0$ και $x - 2y + 6 = 0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το $K(-1, -2)$, να βρείτε :

- α) τις συντεταγμένες του A και του Γ
- β) την εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$ και την κορυφή Δ .

Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

7.8 Έστω η εξίσωση $(2\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y + 5 = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι

- α) για κάθε λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
- β) οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

7.9 Έστω η εξίσωση $(3 - \lambda)x + (4 - \lambda)y + \lambda = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός.

- α) Να δείξετε ότι για κάθε λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
- β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.
- γ) Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία που έχει εξίσωση την (1) να είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 4x + 2y + 13 = 0$.

7.10 Έστω η εξίσωση $(3 + \lambda)x + \lambda y + \lambda - 4 = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός.

- α) Να δείξετε ότι για κάθε λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
- β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.
- γ) Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία που έχει εξίσωση την (1) να είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x - 3y - 7 = 0$.

7.11 Έστω η εξίσωση $(\lambda + 2)x + (3\lambda - 1)y + 2\lambda - 10 = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι
 α) για κάθε λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
 β) οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

7.12 Έστω η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + (2\lambda^2 - \lambda - 1)y - (3\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός.
 α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
 β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

7.13 Έστω η εξίσωση $(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0$ όπου λ πραγματικός αριθμός.
 α. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
 β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

7.14 Έστω η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x + (\lambda^2 + 2\lambda - 8)y + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός.
 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει
 α) ευθεία
 β) ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
 γ) ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$
 δ) ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

7.15 Δίνεται η εξίσωση $\mu(2x + y + 2) + 2y - x = 0$. Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού αριθμού μ η εξίσωση παριστάνει ευθεία. Για ποιες τιμές του μ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και για ποιες τιμές του μ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$; Πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

7.16 Έστω η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + (\lambda^2 - 4\lambda - 5)y + \lambda^2 - 9 = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός.
 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει
 α) ευθεία
 β) ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
 γ) ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$
 δ) ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

7.17 Έστω η εξίσωση $2\lambda x - (\lambda + 1)y - 3\lambda + 1 = 0$ (1) όπου λ πραγματικός αριθμός.
 α) Να δείξετε ότι για κάθε λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
 β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.
 γ) Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία που έχει εξίσωση την (1) να διέρχεται από το μέσο του AB όπου $A(1, 5)$ και $B(5, -1)$.

Σχετική Θέση δύο Ευθειών

7.18 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 3)y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y - 3 = 0$
 α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε λ πραγματικό αριθμό.
 β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του λ , το σημείο τομής M των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ κινείται πάνω σε ευθεία.

7.19 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda - 1)x + \lambda y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y - 1 = 0$
 α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε λ πραγματικό αριθμό.
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5

7.20 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 1)y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 2)x + \lambda y - 1 = 0$.
 α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε λ πραγματικό αριθμό.
 β) Να βρείτε το λ , ώστε η ευθεία $\zeta : 3x + 2y + 3 = 0$ να διέρχεται από το μοναδικό κοινό σημείο των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Εξισώσεις της μορφής $Ax^2 + By^2 + \Gamma xy + \Delta x + \text{E}y + Z = 0$

7.35 Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2y^2 - 3xy - 7x - y + 3 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες, οι οποίες είναι κάθετες.

β) Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών του προηγούμενου ερωτήματος.

7.36 Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + 2y^2 + 7xy + 2x - y - 1 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

β) Να βρείτε την οξεία γωνία των δύο ευθειών του προηγούμενου ερωτήματος.

7.37 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες και να εξετασθεί η θέση των ευθειών αυτών.

7.38 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 10x - 4y + 21 = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες και να εξετασθεί η θέση των ευθειών αυτών.

7.39 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 3 = 0$ (1).

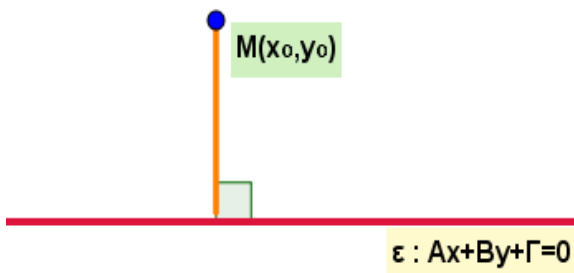
α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2

β) Έστω ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B και έστω M το μέσο του AB.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το M και είναι παράλληλη στις ϵ_1 και ϵ_2 .

8. Εμβαδόν Τριγώνου

Απόσταση Σημείου Από Ευθεία

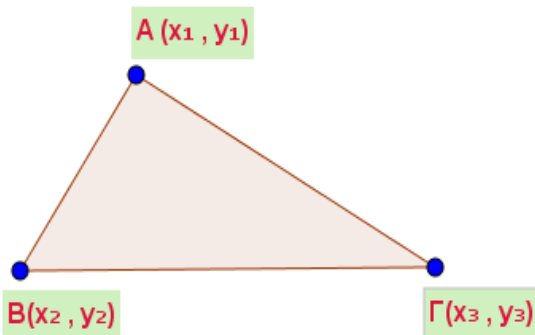


Έστω μια ευθεία $\varepsilon: A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ και ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ εκτός αυτής.

Η απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε) είναι :

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Εμβαδό Τριγώνου



Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου τότε το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο :

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$$

Ασκήσεις

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

- 8.1** Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(-1, 3)$ ισαπέχει από τις ευθείες $\epsilon_1: 12x + 5y + 10 = 0$, $\epsilon_2: 3x + 4y - 14 = 0$.
- 8.2** Δίνονται τα σημεία $A(4, -2)$, $B(2, -8)$, $\Gamma(-1, 13)$. Να βρείτε
 α) την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$
 β) την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $B\Gamma$.
- 8.3** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(3, 2)$, $B(-3, 1)$, $\Gamma(4, 0)$. Να βρείτε :
 α) την εξίσωση της πλευράς AB
 β) το μήκος του ύψους $\Gamma\Delta$ καθώς και την εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται πάνω αυτό.
- 8.4** Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 5x + y - 9 = 0$, $\epsilon_2: 3x - 2y - 8 = 0$ και $\delta: \lambda x + 3y - 3\lambda - 6 = 0$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σημείο τομής των ευθειών ϵ_1 , ϵ_2 απέχει από την ευθεία δ απόσταση ίση με $\sqrt{10}$.
- 8.5** Οι ευθείες $\epsilon_1: \lambda x + (\lambda - 14)y + \lambda + 2 = 0$ και $\epsilon_2: (\lambda - 3)x + (\lambda - 10)y + 4 - 2\lambda = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε :
 α) τον αριθμό λ
 β) σε ποια από τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 βρίσκεται πλησιέστερα το σημείο $A(3, 2)$.
- 8.6** Το σημείο $A(3, 1)$ απέχει από την ευθεία $\epsilon: \lambda x - 4y + 8 - \lambda = 0$ απόσταση ίση με 2. Να βρείτε
 α) τον αριθμό λ
 β) τα σημεία της ευθείας $\zeta: y = x - 3$, τα οποία απέχουν από την ευθεία ϵ απόσταση ίση με 3.
- 8.7** Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με $A(-1, 2)$ και η εξίσωση μιας πλευράς του είναι $x - 2y + 1 = 0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου.

Μεσοπαράλληλη - Απόσταση Παράλληλων - Διχοτόμος

- 8.8** Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\epsilon_1: y = 3x - 1$, $\epsilon_2: y = 3x + 9$. Να βρείτε
 α) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ϵ_1 , ϵ_2
 β) την απόσταση των ευθειών ϵ_1 , ϵ_2
- 8.9** Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + y^2 - 4xy - 6x + 3y - 4 = 0$ (1)
 α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .
 β) Να βρείτε την απόσταση των ϵ_1 , ϵ_2
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ϵ_1 , ϵ_2
- 8.10** Δύο πλευρές ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\epsilon_1: 3x - y - 13 = 0$, $\epsilon_2: 3x - y + 7 = 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.
- 8.11** Οι ευθείες $\epsilon_1: \lambda x + (2 - \lambda)y - 24 = 0$ και $\epsilon_2: (\lambda - 4)x + (5 - \lambda)y + 18 = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε:
 α) τον αριθμό λ
 β) την απόσταση των ϵ_1 , ϵ_2
 γ) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ϵ_1 , ϵ_2

8.12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 8 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ϵ_1, ϵ_2

8.13 Δύο παράλληλες ευθείες απέχουν απόσταση ίση με 8 και έχουν ως μεσοπαράλληλη την ευθεία $\zeta: 3x - 4y + 12 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

8.14 Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 3x - 4y + 1 = 0, \epsilon_2: 8x - 6y + 5 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

Ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 ;

8.15 Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 8x - 6y + 3 = 0, \epsilon_2: 3x - 4y + 5 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

8.16 Θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda - 1, \lambda + 2)$ και $B(\mu + 3, \mu)$ με $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία κινούνται πάνω στις ευθείες $y = x + 3$ και $y = x - 3$ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών

Εμβαδόν Τριγώνου

8.17 Δίνονται τα σημεία $A(-2, 1), B(3, 4), \Gamma(1, -6)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

8.18 Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(2, -3), B(-1, 7), \Gamma(-2, -5), \Delta(7, 0)$

8.19 Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-2, 3)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $y'y$ ώστε να ισχύει $(MAB) = 5$ τ.μ.

8.20 Δίνονται τα σημεία $K(8, 3)$ και $\Lambda(6, -1)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε να ισχύει $(MK\Lambda) = 7$ τ.μ.

8.21 Θεωρούμε τα σημεία $A(2, -1), B(4, 5)$ και έστω σημείο Γ της ευθείας $\epsilon: 2x - y - 1 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδόν ίσο με 4 τ.μ.

8.22 Θεωρούμε τα σημεία $A(2, -1), B(1, 3)$ και έστω σημείο K της ευθείας $\epsilon: x - y + 1 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του K ώστε το τρίγωνο ABK να έχει εμβαδόν ίσο με 2 τ.μ.

8.23 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1, 2), B(3, 5)$. Αν η κορυφή Γ κινείται στην ευθεία $\epsilon: 2x - y + 3 = 0$ και το εμβαδόν του $AB\Gamma$ είναι 5 τ.μ. να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

8.24 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3, 7)$ με $B\Gamma: 4x - 3y - 11 = 0$ και το σημείο $M(5, 3)$ το μέσο της $B\Gamma$.

Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 40 τ.μ., να βρείτε:

α) την απόσταση του A από την ευθεία $B\Gamma$

β) το μήκος της πλευράς $B\Gamma$

γ) τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ

8.25 Δίνεται η ευθεία $\epsilon: x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2, 4), B(2, 6)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M της ευθείας (ϵ) το οποίο ισαπέχει από τα A και B

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $K(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$

8.26 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(6, 6), B(-3, 0)$ και $\Gamma(3\mu - 1, 2\mu + 3), \mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Γ

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

8.27 Θεωρούμε τα σημεία $A(1, -2), B(3, 4)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου ώστε το τρίγωνο AMB να έχει εμβαδόν ίσο με 4 τ.μ.

Προσδιορισμός Ευθείας με χρήση Απόστασης ή Εμβαδού

- 8.28** Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $3x - 4y + 3 = 0$ και απέχει από το σημείο $A(1, -2)$ απόσταση ίση με 3 μονάδες .
- 8.29** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία $\delta : 3x - 2y + 5 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 3 τ.μ.
- 8.30** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το $M(3, 1)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 8 τ.μ.
- 8.31** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta : 3x + y + 2017 = 0$ και απέχουν από το σημείο $K(-4, 2)$ απόσταση ίση με $2\sqrt{10}$
- 8.32** Δίνεται η ευθεία $\delta : x + 2y - 25 = 0$ και το σημείο $M(3, 1)$. Να βρείτε :
 α) την απόσταση του M από την ευθεία (δ)
 β) τις ευθείες που είναι κάθετες στην (δ) και απέχουν από το M απόσταση ίση με $\sqrt{20}$
- 8.33** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta : 6x - 3y - 13 = 0$ και ισαπέχει από τα σημεία $A(1, -4)$ και $B(5, 2)$
- 8.34** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και απέχει από το σημείο $M(2, 1)$ απόσταση ίση με 3 μονάδες .
- 8.35** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και ισαπέχει από τα σημεία $K(-3, 0)$ και $\Lambda(1, 3)$
- 8.36** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία $\delta : x + 2y - 1 = 0$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 1 τ.μ.

Ευθεία και Ελάχιστο

- 8.37** Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x + 2y - 6 = 0$. Να βρείτε :
 α) την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας (ε) από την αρχή των αξόνων
 β) ποιο σημείο της ευθείας (ε) απέχει την μικρότερη απόσταση από το σημείο $M(2, -3)$
- 8.38** Δίνονται τα σημεία $K(-2, 4)$ και $\Lambda(8, -1)$. Να βρείτε :
 α) την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία K, Λ
 β) ποιο σημείο της ευθείας (ε) απέχει την μικρότερη απόσταση από το σημείο $M(5, 3)$
- 8.39** Θεωρούμε τα σημεία $K(\lambda - 4, 3\lambda - 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :
 α) την εξίσωση της ευθείας (ε) πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία K
 β) την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας (ε) από την αρχή των αξόνων .
- 8.40** Οι ευθείες $\varepsilon : \lambda x + (\lambda - 1)y - 5 = 0$ και $\delta : (\lambda + 1)x - (\lambda + 4)y - 15 = 0$ είναι κάθετες . Να βρείτε :
 α) τον αριθμό λ
 β) το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (δ)
 γ) την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας (ε) από την αρχή των αξόνων , καθώς και ποιο είναι το σημείο αυτό .
- 8.41** Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x + y - 4 = 0$. Να βρείτε :
 α) ποιο σημείο της ευθείας (ε) απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων
 β) την ελάχιστη απόσταση που απέχει το σημείο της ευθείας (ε) από την αρχή των αξόνων

Τυπολόγιο στην Ευθεία

1. Συντελεστής Διεύθυνσης ευθείας

- Αν ω η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, τότε $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\omega$
- Είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ όπου $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της ευθείας (ε)
- Ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$
- Ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$
- Ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0$
- Ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon \perp x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \text{δεν ορίζεται}$

2. Εξίσωση Ευθείας

- Είναι $\varepsilon : y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, όπου $A(x_0, y_0)$ σημείο της ευθείας (ε) και λ ο συντελεστής διεύθυνσής της.
- Κατακόρυφη Ευθεία: $x = x_0$
- Οριζόντια Ευθεία: $y = y_0$
- Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων: $y = \lambda x$
- Διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων : $y = x$
- Διχοτόμος της δεύτερης και τέταρτης γωνίας των αξόνων : $y = -x$

3. Η Εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$

- παριστάνει ευθεία αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$
- έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$
- είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$
- είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$

4. Απόσταση Σημείου από Ευθεία

- Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, όπου $K(x_0, y_0)$ σημείο και $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ ευθεία.

5. Εμβαδόν Τριγώνου

- Είναι : $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$

9. Ενδοσχολικά Θέματα Εξετάσεων στην Ευθεία

9.1 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 2y + 3 = 0$

- α) Να βρεθεί η ευθεία που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το $A(-3, 5)$
 β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της προβολής του A στην ε .
 γ) Να βρεθεί το συμμετρικό του A ως προς την ε . (ΓΕΛ 2009)

9.2 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$. Η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $x - 2y + 1 = 0$ και του ύψους $B\Delta$ είναι $x + 2y + 3 = 0$. Να βρείτε:

- α) την κορυφή B
 β) την εξίσωση της πλευράς AG
 γ) το μήκος του AK , αν AK είναι ύψος (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2009)

9.3 Δίνονται τα σημεία $A(3, -2)$, $B(6, -4)$, $\Gamma(1, 5)$, $\Delta(-1, 2)$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της ευθείας AB
 β) την απόσταση του Γ από την AB
 γ) την γωνία που σχηματίζουν τα \overline{AB} και $\overline{\Gamma\Delta}$
 δ) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο του $\Gamma\Delta$ και είναι κάθετη στην AB
 ε) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2010)

9.4 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με την εξίσωση του ύψους από το A είναι $x = 2$. Επίσης γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της πλευράς AB είναι $y = x + 2$ και $\Gamma(6, -2)$

- α) Να βρείτε τα A , B καθώς και την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
 β) Να βρείτε την απόσταση του Γ από την ευθεία AB
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BE
 δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (2^ο ΓΕΛ ΚΑΡΔΙΤΣΑΣ 2011)

9.5 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(1, 2)$, $B(2, -2)$ και κέντρο $O(2, 0)$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ , Δ
 β) Να βρείτε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$
 γ) Να βρεθεί η εξίσωση της AG
 δ) Να βρείτε την προβολή του \overline{AB} στο $\overline{A\Delta}$ (1^ο ΓΕΛ ΖΑΚΥΝΘΟΥ 2011)

9.6 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 2xy - 5 = 0$ (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες
 β) Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων ευθειών
 γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δύο ευθειών (ΓΕΛ ΓΕΡΑΣ 2011)

9.7 Δίνονται τα σημεία $A(7, 3)$, $B(-5, 4)$ και $\Gamma(\lambda + 1, 2\lambda - 3)$

α) Να αποδείξετε ότι το Γ κινείται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση

β) Για $\lambda = 2$ να βρείτε:

β1) Την εξίσωση της διαμέσου BM του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου M το μέσο της πλευράς AG

β2) Την απόσταση του σημείου A από την $B\Gamma$

β3) Την προβολή του διανύσματος \vec{BM} πάνω στο $\vec{B\Gamma}$ (ΒΕΝΕΤΟΚΛΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2011)

9.8 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x + y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x - 4y + 10 = 0$

α) Να βρεθεί το σημείο τομής K των δύο ευθειών

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο K και απέχουν από το σημείο $A(2, 3)$ απόσταση ίση με 4. (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)

9.9 Δίνεται η εξίσωση $(\kappa + 1)x + (\kappa - 1)y + 4\kappa - 2 = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού κ

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

γ) Για ποια τιμή του κ η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) Για ποια τιμή του κ η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα x'

ε) Για ποια τιμή του κ η ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: y = x + 5$

ζ) Για ποια τιμή του κ η ευθεία διέρχεται από το $A(-2, 0)$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)

9.10 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: ax - 2y - 4 = 0$ και $\delta: x - 2y + \beta = 0$

α) Να βρείτε τα α, β αν οι ευθείες είναι παράλληλες και η απόσταση αυτών είναι $\frac{2}{\sqrt{5}}$

β) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των ε και δ (ΓΕΛ ΠΟΛΙΧΝΙΤΟΥ 2011)

9.11 Δίνονται τα σημεία $A(3, 8)$, $B(-7, 2)$

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο του AB και είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 2x + y - 2011 = 0$

β) Να βρεθεί η απόσταση του O από την ε (ΓΕΛ ΠΕΤΡΑΣ 2011)

9.12 Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(8, -4)$. Η κάθετη στην AB στο A τέμνει την $\varepsilon: y = 2x - 2$ στο Γ .

α) Να βρείτε το μήκος του τμήματος AB

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AG

γ) Να δείξετε ότι $\Gamma(6, 10)$

δ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΥΤΙΑΗΝΗΣ 2011)

9.13 Δίνεται η εξίσωση $x - y + 2 + \lambda(2x - y + 1) = 0$ (1) και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y = -4$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό λ

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο M

γ) Αν K είναι το σημείο τομής της (ε) με την ευθεία που προκύπτει από την (1) για $\lambda = 0$

να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OKM είναι 3 τ.μ. (ΓΕΛ ΠΑΜΦΙΛΙΩΝ 2011)

9.14 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2)$, $B(3, -2)$, $\Gamma(1, -1)$. Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των πλευρών AB και AG .

β) την εξίσωση του ύψους AD

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2012)

9.15 Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2 + \alpha + 2)x + (\alpha - 3)y - (3\alpha^2 + 5\alpha) = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του α και ότι δεν υπάρχει ευθεία που να είναι παράλληλη στον άξονα x' .

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο

γ) Να βρείτε την ευθεία ε της (1) που είναι κάθετη στην $\eta : x + 2y + 5 = 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

9.16 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 4$ και το σημείο $A(5, 1)$

α) Να βρείτε ευθεία ζ κάθετη στην ε που να διέρχεται από το A

β) Να βρείτε την απόσταση του A από την ευθεία ε

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε και ζ

δ) Να βρείτε το συμμετρικό του A ως προς την ε

(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

9.17 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : -x + 2y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y - 6 = 0$

α) Να βρείτε το σημείο τομής M των δύο ευθειών

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ευθεία $\delta : 4x - 3y = 1$

γ) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην δ που να διέρχεται από το M (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

9.18 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 4x + 4 = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1 : x - y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y + 2 = 0$

β) Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών M καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν οι ευθείες με τον άξονα $y'y$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής M και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2. (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

9.19 Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(-1, 3)$ και τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία A , B αντίστοιχα, ώστε το P να είναι το μέσο του AB .

α) Να αποδείξετε ότι είναι $\varepsilon_1 : y = 3x + 6$

β) Θεωρούμε τα σημεία $\Gamma(-5, 1)$ και $\Delta(2\alpha - 7, 5 - 4\alpha)$ και το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ε_1

β1) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $P\Gamma\Delta$

β2) Για $\alpha = 2$ να βρείτε την μεσοκάθετη ε_2 του τμήματος $\Gamma\Delta$

β3) Για $\alpha = 2$ να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2013)

9.20 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ και η εξίσωση $6\vec{\alpha}\vec{\beta}x - 4|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|y - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία (ε)

β) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να δείξετε ότι η ευθεία ε είναι ο άξονας $x'x$

γ) Αν η (ε) διέρχεται από το $B(3, 2)$, τότε να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (4^ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2013)

9.21 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(4, 3)$, $B(2, 5)$, $\Gamma(2, -1)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της πλευράς AB

β) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

δ) το συμμετρικό του Γ ως προς την ευθεία AB

(1^ο ΓΕΛ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

9.22 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1 : x + y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y - 2 = 0$

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες

γ) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών

δ) Αν $A(-1, -1)$ σημείο της ευθείας ε_1 και B, Γ τα σημεία τομής της ευθείας ε_2 με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (ΓΕΛ 2013)

9.23 Δίνεται η εξίσωση $x + y - 5 + \lambda(2x + y - 7) = 0$ (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ και ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που ορίζεται από την (1) και διέρχεται από το $A(4, 1)$
 γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\eta: -x + y + 1 = 0$ δεν ανήκει στην παραπάνω οικογένεια ευθειών.
 δ) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που ορίζεται από την (1) και είναι κάθετη στην (η) (ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΥ 2013)

9.24 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ και τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$

- α) Αν η απόσταση του σημείου A από την (ε) είναι ίση με το μήκος του τμήματος AB , να βρείτε το α
 β) Για $\alpha = 4$ να βρείτε:
 β1) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$
 β2) Το σημείο της (ε) που απέχει την μικρότερη απόσταση από το O . (1^ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2013)

9.25 Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(5, \alpha - 1)$, $\Gamma(4, 1)$

- α) Για ποιες τιμές του α είναι κορυφές τριγώνου;
 β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με 2, να βρείτε τις τιμές του α
 γ) Για $\alpha = 3$, να βρείτε τις εξισώσεις των $B\Gamma$ και της διαμέσου AM (2^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2013)

9.26 Δίνεται η εξίσωση $2x + y - 5 + \lambda(x + y - 3) = 0$ (1)

- α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (1) παριστάνει ευθεία ε
 β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.
 γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει λ για το οποίο η ε να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135°
 (14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

9.27 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)y - \lambda + 2 = 0$ (1)

- α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η (1) παριστάνει ευθεία
 β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε.
 γ) Να βρείτε το λ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (1) με τους άξονες να είναι $\frac{1}{2}$
 δ) Για $\lambda = 4$ αν βρείτε την απόσταση του σημείου $O(0,0)$ από την ευθεία. (3^ο ΓΕΛ ΑΛΕΞ/ΛΗΣ 2014)

9.28 Δίνεται η εξίσωση $2x + y - 2 + \lambda(x - y + 5) = 0$ (1) και η ευθεία $\zeta: 2x - y + 11 = 0$

- α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (1) παριστάνει ευθεία
 β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε.
 γ) Να βρείτε την ευθεία (ε) που ορίζεται από την (1) και είναι παράλληλη στην ευθεία ζ .
 δ) Αν $\varepsilon: 2x - y + 6 = 0$ να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ε και ζ . (ΓΕΛ ΣΑΝΤΟΡΙΝΗΣ 2014)

9.29 Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ (1) και

$$(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + (\lambda^2 + 1)y - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0 \quad (2)$$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο κάθετες ευθείες των οποίων να βρείτε και το σημείο τομής τους.
 β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (2) παριστάνει ευθεία
 γ) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (2) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε (ΟΕΦΕ 2014)

9.30 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2\lambda = 0$ (1)

- α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (1) παριστάνει ευθεία
 β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

9.31 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda - 2)x + (\lambda - 1)y + \lambda^2 - 1 = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (1) παριστάνει ευθεία

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο K

γ) Αν το K είναι κέντρο τετραγώνου του οποίου η μια πλευρά βρίσκεται στην ευθεία $3x - 4y + 2 = 0$, να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου
(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

9.32 Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2 + 2\alpha)x - (\alpha^2 + \alpha + 1)y - \alpha^2 - 2 = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α , η (1) παριστάνει ευθεία

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (1) που είναι:

γ1) Κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - y + 3 = 0$

γ2) Παράλληλη στον άξονα $x'x$

(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

9.33 Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 3)$, $B(-2, -7)$ και $\Gamma(4, -1)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση του ύψους AD , καθώς και τις συντεταγμένες του D

β) την εξίσωση της διαμέσου AM

γ) την οξεία γωνία των AM και AD

δ) το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$

(2° ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)

9.34 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 0)$, $B(-3, 4)$ και $\Gamma(3, 2)$.

α) Να δείξετε ότι η γωνία A είναι ορθή

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD

γ) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$

(ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

9.35 Δίνονται τα σημεία $A(4, 0)$ και $B(0, 4)$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα A και B , καθώς και την γωνία που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην (ε)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών (ε) και (δ) καθώς και το εμβαδό του τριγώνου OMB , όπου O η αρχή των αξόνων
(ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2015)

9.36 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, -3)$, $B(6, 6)$

α) Αν η εξίσωση του ύψους AD είναι $2x + y = 2$, να βρείτε την εξίσωση της $B\Gamma$

β) Αν η εξίσωση της διαμέσου AM είναι $x = 3$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(3° ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)

9.37 Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2y^2 - 3xy + 10y - 8 = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1: -x + 2y - 2 = 0$, $\varepsilon_2: -2x - y + 4 = 0$

β) Έστω A το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $x'x$ και B το σημείο τομής της ε_2 με τον άξονα $x'x$

β1) Βρείτε τις συντεταγμένες των A, B

β2) Βρείτε σημείο Δ της ευθείας ε_1 του πρώτου τεταρτημορίου, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ να είναι ίσο με 6

β3) Έστω (ε) η ευθεία που είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ στο σημείο A . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(MB) = d(M, \varepsilon)$ (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑΣ 2015)

9.38 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 3)$. Η εξίσωση του ύψους BD είναι $x + 2y - 13 = 0$ και η εξίσωση της διαμέσου BM είναι $4x - 3y + 3 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του B

β) Αν $B(3, 5)$ να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AB και $A\Gamma$

γ) Αν η $A\Gamma$ έχει εξίσωση $y = 2x + 1$ να βρείτε το Γ **(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑΣ 2015)**

9.39 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda - 1)x - y + 4 = 0$, $\varepsilon_2: (3 - \lambda)x - y + \lambda = 0$

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 διέρχονται από το σημείο $A(0, 4)$

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_2 διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε

γ) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

δ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε:

δ1) την απόσταση των παραλλήλων ευθειών

δ2) Το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει τις δύο απέναντι πλευρές του, τις ευθείες αυτές

(ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΣ 2015)

9.40 Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-3, 2)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(4, 1)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά δεν είναι συνευθειακά

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος $B\Gamma$ είναι η $y = x - 1$

γ) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς την (ε) **(ΟΕΦΕ 2015)**

9.41 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4ly - 2lx - 3l^2 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο κάθετες ευθείες

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής M των παραπάνω ευθειών βρίσκεται σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Αν $\lambda = 1$ και A το σημείο τομής της $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$ με τον άξονα $y'y$ και B το σημείο τομής της $\varepsilon_2: x + y + 1 = 0$ με τον άξονα $x'x$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABM

δ) Ποια από τις παραπάνω ευθείες απέχει μεγαλύτερη απόσταση από το σημείο K , το οποίο είναι το σημείο που διέρχονται όλες οι ευθείες με εξίσωση $(\alpha^2 + \alpha + 2)x + (\alpha - 3)y - (3\alpha^2 + 5\alpha) = 0$.

(ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ 2015)

9.42 Δίνεται η εξίσωση $\eta\mu^2\theta \cdot x + \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot y - 1 = 0$. (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει για κάθε πραγματικό αριθμό θ .

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1), διέρχονται από σταθερό σημείο A

γ) Για $\theta = \frac{\pi}{4}$, να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε_1 και μετά τα σημεία τομής της με τους άξονες.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $A'B\Gamma$ όπου Γ το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $x'x$, B το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $y'y$ και A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την αρχή των αξόνων

ε) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που ανήκει στην ευθεία $x+y-2=0$ και απέχει από το σημείο $\Delta(-1, 2)$ την ελάχιστη απόσταση.

ζ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M ώστε να ισχύει $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{M\Gamma} \cdot \overline{OA}$

(ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2015)

9.43 Αν το σημείο $A(1 - \beta, 2\alpha\beta - \beta^2)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3y = 4x + \alpha^2 + 4\beta^2$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 6$ και $\beta = 2$

β) Ποιο το συμμετρικό N του σημείου $M(-2, 5)$ ως προς την ευθεία ε .

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων που εφάπτεται στην ευθεία ε .

δ) Πόσα κοινά σημεία έχει ο κύκλος με την ευθεία MN **(6° ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)**

9.44 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x + 2\lambda y - 4 + 4\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού λ
 β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο
 γ) Να εξετάσετε αν οι ευθείες $y = 6x + 1$, $y = \frac{1}{2}x$ ανήκουν στην οικογένεια ευθειών της (1)
 δ) Βρείτε ποια ευθεία της οικογένειας ευθειών απέχει τη μέγιστη απόσταση από το $M(-6, 1)$.
 Στη συνέχεια υπολογίστε την απόσταση αυτή. (LISSARI 2016)

9.45 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, \lambda)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(-1, 0)$ με $\lambda > 0$.

- α) Αν $(AB\Gamma) = 4\sqrt{3}$ τ.μ. να δείξετε ότι $\lambda = 2\sqrt{3}$
 β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους από την κορυφή Γ
 δ) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η πλευρά AB με τον άξονα $x'x$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2016)

9.46 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(0, -3)$, $\Gamma(4, -1)$

- α) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου AM
 β) Να δείξετε ότι: $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = 4 |\overline{AM}|$ (3^ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)

9.47 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-3, 3)$, $B(1, 5)$, $\Gamma(3, 3)$

- α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$
 β) Να δείξετε ότι $d(A, B\Gamma) = 3\sqrt{2}$
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ όπου $A\Delta$ το ύψος του. (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)

9.48 Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$, $B(2\kappa + 1, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: x - 2y - 1 = 0$
 β) Να βρείτε την προβολή M του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε)
 γ) Αν $M(3, 1)$ να βρείτε το συμμετρικό σημείο Γ του A ως προς την ευθεία (ε)
 δ) Να βρείτε το κ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο στο B (1^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

9.49 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + (\lambda^2 + \lambda - 2)y + 4(\lambda - 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

- α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η (1) παριστάνει ευθεία
 β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία από την (1) που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο M
 δ) Ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με εμβαδόν $E = 8$ τ.μ. έχει την πλευρά του AB πάνω στην ευθεία που ορίζει η (1) για $\lambda = 0$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά του $\Gamma\Delta$.
 (ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΣ 2016)

9.50 Δίνονται τα σημεία $A(-3, 1)$, $B(\kappa, \lambda)$, $M\left(-1, \frac{5}{2}\right)$

- α) Αν M μέσο της AB να βρείτε τα κ και λ
 β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = 4$ να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB
 γ) Να βρείτε την απόσταση της αρχής των αξόνων από την μεσοκάθετο του AB
 (1^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2016)

9.51 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5, -2)$ και η διάμεσος BM βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$ και το ύψος $\Gamma\Delta$ πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = -2x - 2$

- α) Να δείξετε ότι $AB: x - 2y + 1 = 0$
 β) Να δείξετε ότι $B(3, 2)$
 γ) Να δείξετε ότι $\Gamma(1, -4)$ (2^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2016)

9.52 Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-5, -6)$

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB καθώς και ο συντελεστής διεύθυνσής του .

β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) του τμήματος AB .

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής της ευθείας AB με τους άξονες .
(ΓΕΛ ΛΙΜΕΝΑΡΙΩΝ ΘΑΣΟΥ 2016)

9.53 Δίνονται τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, $B(2, -1)$, $\Gamma\left(\kappa, \frac{\kappa-4}{2}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τα διανύσματα \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{B\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ είναι συνευθειακά και να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας αυτής .

β) Να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι αμβλεία .

γ) Αν $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 2 \cdot |\overrightarrow{B\Gamma}|^2$ να βρείτε τον αριθμό κ .
(ΓΕΛ ΛΙΜΝΗΣ ΕΥΒΟΙΑΣ 2016)

9.54 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$

α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες κάθετες .

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής M των παραπάνω ευθειών βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

γ) Αν K , είναι το σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες με εξίσωση

$(3\alpha^2 + \alpha + 2)x - (\alpha^2 + \alpha + 1)y + (6\alpha + 3) = 0$ να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η απόσταση (MK) να γίνεται ελάχιστη

δ) Για το λ που βρήκατε να βρείτε το εμβαδόν του (OKM)
(ΓΕΛ ΛΙΜΝΗΣ ΕΥΒΟΙΑΣ 2016)

9.55 Δίνονται τα σημεία $B(-3, 7)$ και $\Gamma(3, 1)$ και οι ευθείες $\varepsilon : 3x - y + 2 = 0$, $\eta : 2x + y - 7 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο A . Να βρείτε :

α) τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία $B\Gamma$ με τον άξονα $x'x$

β) τις συντεταγμένες του σημείου A

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

δ) την εξίσωση της διαμέσου AM

ε) την γωνία των ευθειών AM και $B\Gamma$
(ΓΕΛ ΜΑΝΤΟΥΔΙΟΥ 2016)

9.56 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5, 4)$, $B(-1, 6)$, $\Gamma(1, 1)$ και σημείο M της πλευράς AB

ώστε $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{AB}

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M

γ) Αν $M(-3, 5)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Γ και M

δ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y = -x + 2$ με τον $x'x$
(ΠΕΡΙΚΕΝΤΡΟ 2016)

9.57 Δίνεται η ευθεία $\zeta : x + 2y - 25 = 0$ και το σημείο $A(3, 1)$. Να βρείτε :

α) την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ζ

β) τις ευθείες που είναι κάθετες στην ζ και απέχουν από το A απόσταση ίση με $\sqrt{20}$

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ABM , όπου B, M τα σημεία τομής της ευθείας ζ με τους άξονες $x'x, y'y$
(4^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2017)

9.58 Δίνονται τα σημεία $A(3, 1)$, $B(5, 5)$, $\Gamma(1, 3)$ του επιπέδου

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του

β) Να υπολογίσετε την εξίσωση της μεσοκάθετου AG

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ έτσι ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ρόμβος

(1^ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2017)

9.59 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 5)$, $B(1, -1)$, $\Gamma(5, 1)$. Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της διαμέσου BM
 β) την εξίσωση του ύψους που φέρουμε από την κορυφή A
 γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (3^ο ΓΕΛ ΓΑΛΑΤΣΙΟΥ 2017)

9.60 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 0)$, $B(-3, -4)$, $\Gamma(3, -2)$ του επιπέδου

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο είναι ορθογώνιο στο A και ισοσκελές
 β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD
 δ) Να βρείτε το μήκος του ύψους AD (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ LISARI 2017)

9.61 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(-2, 3)$, ύψος $AD: y = x + 1$, και διάμεσο $AM: y = -3x + 5$. Να βρείτε:

- α) την κορυφή A
 β) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
 γ) την κορυφή Γ
 δ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΣΚΗΣΟΠΟΛΙΣ 2017)

9.62 Δίνεται η εξίσωση $(3\alpha - 5)x + (\alpha - 3)y - 4\alpha + 8 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού α
 β) Αν $\alpha > 2$, να βρείτε ποια από τις ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) ισαπέχει από τα σημεία $A(4, -3)$, $B(3, 2)$
 γ) Αν (δ) είναι η ευθεία που προκύπτει από την (1) για $\alpha = 5$, και Γ είναι το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (ΓΕΛ ΒΟΙΩΤΙΑΣ 2017)

9.63 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 3)$, $B(-4, 5)$, $\Gamma(5, -6)$. Έστω M το μέσο του AB και το ύψος ΓD

- α) Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma M}$
 β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓD
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2017)

9.64 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y + 3 = 0$, $\varepsilon_2: 2x - y - 4 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται κάθετα και να βρείτε το σημείο τομής τους T
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda(x + 2y + 3) + \lambda^2(2x - y - 4) = 0$ (ε) παριστάνει ευθεία για $\lambda \neq 0$ και στη συνέχεια ότι όλες οι ευθείες αυτές διέρχονται από το T
 γ) Να βρεθεί η ευθεία (ε) η οποία τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες συντεταγμένων σε σημεία A και B ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές (ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2017)

9.65 Δίνονται τα σημεία $A(5, 1)$, $B(1, 3)$. Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της ευθείας AB και την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB
 β) σημείο Γ του άξονα $y'y$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές στο Γ
 γ) σημείο M του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τριγώνου MAB να είναι 7. (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

9.66 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (x - y, 1)$ και $\vec{\beta} = (5x - 5y - 4, x - y)$

- α) Αν τα διανύσματα είναι παράλληλα, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι δύο παράλληλες ευθείες
 β) Αν οι παραπάνω ευθείες είναι οι $\varepsilon_1: x - y - 1 = 0$, $\varepsilon_2: x - y - 4 = 0$ τότε να βρείτε :
 β1) το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις δύο προηγούμενες παράλληλες ευθείες
 β2) την μεσοπαράλληλη ευθεία των δύο παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

9.67 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2κx - (1 + κ)y + 1 - 3κ = 0$, $\varepsilon_2: (1 + 3κ)x + (κ - 1)y - 6κ = 0$

- α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του $κ$ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες
 β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες για $κ = 1$ τέμνονται σε σημείο A το οποίο και να βρείτε
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $κ$ η ευθεία ε_1 απέχει από το $B(1, -1)$ απόσταση ίση με 1
 δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OBΓ$ (ΓΕΛ ΛΕΧΑΙΟΥ 2017)

9.68 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$, $Γ(4, 6)$. Να βρείτε :

- α) το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$
 β) την εξίσωση της ευθείας $BΓ$
 γ) την εξίσωση του ύψους από την κορυφή A
 δ) τις συντεταγμένες του σημείου A' που είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $BΓ$, καθώς και την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την AA' (ΓΕΛ ΜΕΣΣΗΝΙΑΣ 2017)

9.69 Δίνεται η εξίσωση $2x + y + 1 + κ(x - y + 4) = 0$ (1) και τα σημεία $A(4, 0)$, $B(1, 2)$, $Γ(-1, -1)$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $κ$
 β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ABΓ$
 δ) Να βρείτε την ευθεία που προκύπτει από την (1) και είναι παράλληλη προς την βάση του ισοσκελούς $BΓA$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ύψος του τραapeζίου που σχηματίζεται. (ΓΕΛ ΜΗΛΟΥ 2017)

9.70 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $A(1, 1)$, $B(-7, -5)$, $Γ(-1, 7)$. Να βρείτε :

- α) το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$
 β) την εξίσωση της ευθείας $BΓ$ καθώς και την εξίσωση του ύψους AD
 γ) την εξίσωση της διαμέσου AM (ΓΕΛ ΜΥΓΔΟΝΙΑΣ 2017)

9.71 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $A(-1, 1)$, $B(4, 1)$, $Γ(1, 5)$

- α) Αν M μέσο της $AΓ$, να δείξετε ότι $BM: x + 2y = 6$
 β) Δίνεται η εξίσωση της ευθείας $\zeta: 4x + 3y = -1$, η οποία διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα B και $Γ$. Να αποδείξετε ότι :
 β1) Το σημείο τομής Δ των ευθειών BM και ζ είναι $\Delta(-4, 5)$
 β2) το $ABΓ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
 γ) Να βρείτε την παράμετρο p και την εστία E της παραβολής $x^2 = 2py$, της οποίας η διευθετούσα είναι η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από τα A και B . (ΟΕΦΕ 2017)

9.72 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $A(3, 6)$, $B(2, 4)$ καθώς και η διάμεσος $AM: x = 3$ και η μεσοκάθετος του τμήματος $BΓ$, (η): $y = x$. Να βρείτε :

- α) το μέσο M της $BΓ$ καθώς και την κορυφή $Γ$
 β) την εξίσωση της πλευράς $AΓ$
 γ) την εξίσωση του ύψους BD
 δ) το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$ (ΠΟΥΚΑΜΙΣΙΑΣ 2017)

9.73 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 2xy + 2y - 3 = 0$ (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$, $\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$
 β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
 γ) Αν $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2) \cdot x - 2y + |\vec{\alpha}| - 2 = 0$ είναι ευθεία παράλληλη στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$ και $|\vec{\alpha}| = 2$
 δ) Αν επιπλέον ισχύει $|\vec{\beta}| = d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (ΠΟΥΚΑΜΙΣΙΑΣ 2017)

9.74 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x + y - 3 = 0$, $\varepsilon_2: x - 4y + 2 = 0$

α) Να βρείτε το σημείο τομής A των δύο ευθειών

β) Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το $A(2, 1)$ και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2
(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2017)

9.75 α) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(1, \alpha)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(-1, 0)$, όπου $\alpha > 0$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(AB\Gamma) = 4\sqrt{3}$ τ.μ., να βρεθεί το α

β) Αν $\alpha = 2\sqrt{3}$ τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Γ
(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2017)

9.76 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(1, -1)$, $B(4, 2)$, $\Gamma(0, 6)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της διαμέσου AM

β) το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

γ) το εμβαδόν του τριγώνου AMB
(ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

9.77 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$, $\Gamma(5, 1)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της διαμέσου AM

β) την εξίσωση της ΒΓ

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ
(ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

9.78 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 2\lambda)x + (\lambda^2 - \lambda - 2)y + \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η (1) παριστάνει ευθεία

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

γ) Αν $\varepsilon: 4x + 5y = 0$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) με την ευθεία $\zeta: 4x - y = 24$ και τον άξονα $x'x$
(ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

9.79 Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$, $B(0, -2)$, $\Gamma(4, 0)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της πλευράς AB

β) την εξίσωση της διαμέσου AM
(ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

9.80 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 3$, $\varepsilon_2: \sqrt{3}x + y - 5 = 0$ και έστω A το σημείο τομής τους.

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του A και να σχεδιαστούν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε_3 που είναι παράλληλη στην ε_2 και διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_3 με τον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2

δ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB όπου B το σημείο τομής της ευθείας ε_2 με τον άξονα $x'x$ (ΚΑΖΟΥΛΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2018)

9.81 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(1, 0)$, $B(5, -2)$, $\Gamma(3, 4)$. Να βρείτε :

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

β) Την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABΓ. (ΓΕΛ ΠΥΛΟΥ 2018)

9.82 Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών : $\varepsilon_\lambda : (\lambda - 1)x - y + \lambda = 0$ (1)

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε πραγματικό λ , η (1) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδειχθεί ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της οικογένειας που σχηματίζει με τους άξονες xx' και yy' ισοσκελές τρίγωνο. (ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ ΠΕΛΛΑΣ 2018)

9.83 Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : -4x + 3y - 8 = 0, \varepsilon_2 : -4x + 3y + 2 = 0,$$

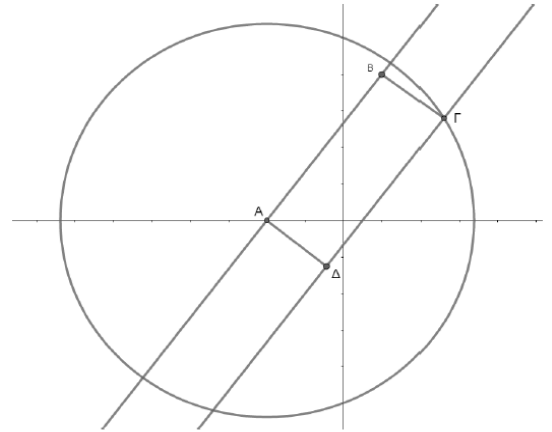
οι οποίες είναι παράλληλες και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με εμβαδόν $E = 10$. Ο κύκλος C έχει κέντρο το σημείο A το οποίο είναι το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $x'x$

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου A

β) Να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $A\Delta$

γ) Αν $A\Delta = 2$ να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C

(ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)



9.84 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 4)$, $B(2, 6)$, $\Gamma(4, 4)$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση του ύψους του τριγώνου $AB\Gamma$ που άγεται από την κορυφή A .

β) Τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

δ) Σημείο Δ τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

ε) Την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2. (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2018)

9.85 Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(5, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB και στη συνέχεια να εξετάσετε αν τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται το ύψος ΓH του τριγώνου $AB\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓH .

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

9.86 α) Να βρείτε την ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\delta : 2x - 3y + 6 = 0$.

β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε, δ . (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2018)

9.87 Δίνεται η εξίσωση : $(\mu^2 - 2\mu)x + (\mu^2 - \mu - 2)y + \mu^2 - 6\mu + 8 = 0, \mu \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να υπολογίσετε για ποιές τιμές του μ , η παραπάνω εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

β) Για $\mu \neq 2$, να αποδείξετε ότι οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να βρείτε

γ) Να βρείτε ποιά από τις ευθείες που παριστάνονται από την (1) είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 : 2x - y + 4 = 0$.

δ) Αν $\varepsilon_2 : -x - 2y + 3 = 0$ η ζητούμενη ευθεία του παραπάνω ερωτήματος, να σχεδιάσετε τις ευθείες και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ο άξονας $x'x$ (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2018)

9.88 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2y^2 + x \cdot y - 3x - 6y = 0$ (1), $x, y \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες του επιπέδου.

β) Αν η (1) παριστάνει τις ευθείες $(\varepsilon_1): x - y - 3 = 0$, $(\varepsilon_2): x + 2y = 0$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB όπου O (0,0), A το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και B το σημείο όπου η (ε_1) τέμνει τον $y'y$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διέρχεται από το σημείο K (0, -1) και χωρίζει το τρίγωνο OAB σε δύο ισοεμβαδικά σχήματα. (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018)

9.89 α) Να βρείτε το σημείο τομής Γ των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - 3y - 7 = 0$, $\varepsilon_2: x + 4y + 2 = 0$.

β) Αν A(-5, 0), B(-4, 17), Γ(2, -1) είναι κορυφές τριγώνου, να βρείτε:

β1) την εξίσωση της διαμέσου AM

β2) την αμβλεία γωνία των AM και BΓ. (6^ο ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2018)

9.90 Δίνονται τα σημεία A(1, 5), B(-3, 7), Γ(3, 1).

α) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας BΓ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην BΓ.

δ) Να υπολογίσετε την απόσταση της ευθείας (ε) από την BΓ. (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2018)

9.91 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 3)x + (2\lambda - 1)y - 5\lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού λ

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο M

γ) Από τις παραπάνω ευθείες να βρείτε εκείνη που είναι παράλληλη στην $\delta: x + y = 2018$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OMA, όπου A το σημείο τομής της δ με τον άξονα $x'x$ (ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2018)

9.92 Η ευθεία $\varepsilon: \lambda x - 3y + \lambda - 3 = 0$ απέχει από το σημείο M(0, 2) απόσταση ίση με 1.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 4$

β) Να βρείτε σημείο του άξονα $x'x$ το οποίο να ισαπέχει από την ευθεία ε και το σημείο N(2, -3)

γ) Θεωρούμε επίσης τα σημεία A(α , β), B(-2 α , 4 - 3 β), Γ(5, 2). Αν τα σημεία A, B ανήκουν στην ευθεία ε , να βρείτε:

γ1) τους αριθμούς α , β

γ2) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ (ΜΟΥΣΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2018)

9.93 Δίνονται τα σημεία A(3, 2), B(-1, 4), Γ(5, -2).

α) Να δείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο

β) Να βρείτε:

β1) το μήκος της διαμέσου BM

β2) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην BΓ

β3) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην BΓ (ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2018)

9.94 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με Γ(3, -1), διάμεσο AM: $2x + 3y - 2 = 0$, ύψος AΔ: $x + y - 1 = 0$ Να βρείτε:

α) την κορυφή A

β) την εξίσωση της ευθείας BΓ

γ) την κορυφή B

δ) το μήκος του ύψους AΔ καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ABM. (ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2018)

9.95 Δίνεται η εξίσωση $\lambda x - (\lambda + 1)y + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού λ
 β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο M
 γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η ευθεία (1) να σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 4 τ.μ.
(6° ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2019)

9.96 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(-1, 0)$ και σημείο $\Delta(3, 4)$ της $B\Gamma$ ώστε να ισχύει $\overline{B\Delta} = 2 \overline{\Delta\Gamma}$

- α) Να δείξετε ότι $\Gamma(5, 6)$
 β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος $B\Delta$
 γ) Αν η κορυφή A του τριγώνου βρίσκεται στον άξονα $y'y$ και $(AB\Gamma) = 12$ τ.μ., να βρείτε το A
(1° ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2019)

9.97 Δίνονται τα σημεία $A(-4, 4)$, $B(5, 1)$, $\Gamma(-3, -3)$

- α) Να δείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $A\Delta$
 δ) Να υπολογίσετε τη γωνία B του τριγώνου $AB\Gamma$
 ε) Να βρεθούν τα σημεία H πάνω στην ευθεία του ύψους $A\Delta$ ώστε $HB \perp H\Gamma$ **(2° ΓΕΛ ΚΕΡΚΥΡΑΣ 2019)**

9.98 Δίνεται η εξίσωση $(\kappa + 1)x + (\kappa - 1)y + 4\kappa + 2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού κ
 β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Σ
 γ) Να βρείτε για ποια τιμή του κ η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
 δ) Να βρείτε την ευθεία (ϵ) της (1) που είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: x + 2y + 5 = 0$
(ΓΕΛ ΓΕΡΑΣ ΛΕΣΒΟΥ 2019)

9.99 Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(0, 3)$

- α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB . Αν επιπλέον $\Gamma(1, 2)$ να βρείτε :
 β) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στην AB
 γ) την προβολή του Γ πάνω στην AB
 δ) το συμμετρικό του Γ ως προς την ευθεία AB **(ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ ΠΕΛΛΑΣ 2019)**

9.100 Το σημείο $A(3, 2)$ είναι μια κορυφή του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ του οποίου η μια διαγώνιος είναι στην ευθεία $x + y - 1 = 0$. Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του τετραγώνου
 β) το κέντρο του τετραγώνου K , καθώς και την κορυφή Γ
 γ) την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ **(ΓΕΛ ΠΥΛΟΥ 2019)**

9.101 Δίνεται η εξίσωση $(\mu - 1)x - \mu y + 2 - \mu = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία (ϵ_μ) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού μ και ότι όλες οι ευθείες που ανήκουν στην (1) διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε
 β) Να βρείτε στις εξής περιπτώσεις την εξίσωση της ευθείας (ϵ_μ) :
 β1) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135°
 β2) διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 γ) Υπάρχει αριθμός μ έτσι ώστε η ευθεία (ϵ_μ) να είναι διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 8x$;
 δ) Να δείξετε ότι η απόσταση του $\Gamma(3, 2)$ από την (ϵ_μ) είναι $\frac{1}{\sqrt{2(\mu - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}}$ και στη συνέχεια να βρείτε το μ αν η απόσταση αυτή είναι μέγιστη **(1° ΓΕΛ ΑΜΑΡΟΥΣΙΟΥ 2019)**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κωνικές Τομές

10. Ο Κύκλος

Κύκλος είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο του επιπέδου αυτού .

Το σταθερό σημείο λέγεται **κέντρο** και η σταθερή απόσταση **ακτίνα** του κύκλου .

Εξίσωση Κύκλου με Κέντρο την Αρχή των Αξόνων

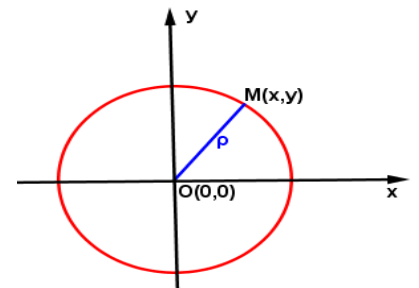
Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση :

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Πράγματι :

Θεωρούμε σημείο $M(x, y)$ του κύκλου , τότε θα απέχει από το κέντρο O απόσταση ίση με την ακτίνα ρ . Δηλαδή :

$$(OM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 .$$



Εξίσωση Κύκλου με Κέντρο Τυχαίο Σημείο

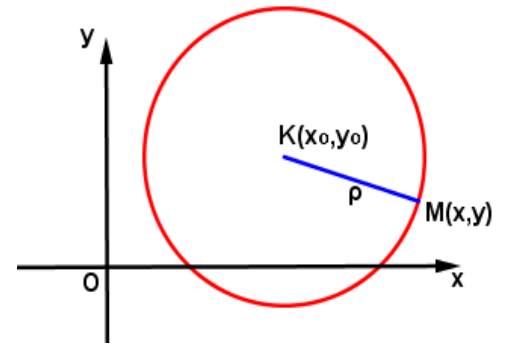
Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Πράγματι :

Θεωρούμε σημείο $M(x, y)$ του κύκλου, τότε θα απέχει από το κέντρο K απόσταση ίση με την ακτίνα ρ . Δηλαδή :

$$(KM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$



Η Εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \quad (1)$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει κύκλο .

ΟΡΘΟ : Θεωρούμε τον κύκλο με εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$. Θα αποδείξουμε ότι γράφεται όπως η (1) .

$$\text{Είναι : } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \rho^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - \rho^2) = 0$$

Άρα ο κύκλος για $A = -2x_0$, $B = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$ παίρνει την μορφή $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ : Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο . Πράγματι :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow (x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -\Gamma \Leftrightarrow \left(x^2 + 2\frac{A}{2}x + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{B}{2}y + \frac{B^2}{4}\right) = -\Gamma + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \text{ . Επομένως :}$$

α) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ τότε η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

β) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ τότε η (1) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

γ) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη .

Εξίσωση Εφαπτομένης Κύκλου με Κέντρο την Αρχή των Αξόνων

Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι :

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$$

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της εφαπτομένης (ε)

Τότε θα είναι : $\overline{OA} \perp \overline{AM} \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{AM} = 0$ (1)

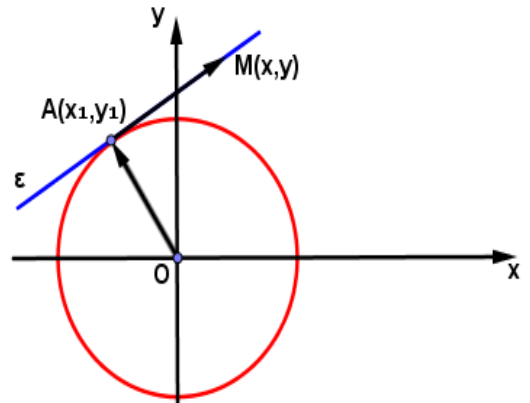
Επίσης $\overline{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1)$

Άρα (1) $\Rightarrow (x_1, y_1) \cdot (x - x_1, y - y_1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 \cdot (x - x_1) + y_1 \cdot (y - y_1) = 0 \Leftrightarrow x \cdot x_1 - x_1^2 + y \cdot y_1 - y_1^2 = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$

αφού το σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$



Ασκήσεις

Εύρεση Εξίσωσης Κύκλου

10.1 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου στις παρακάτω περιπτώσεις :

- α) με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 6
- β) με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 4
- γ) με κέντρο $K(4, 6)$ και ακτίνα 2
- δ) με κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα 4
- ε) με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα 5
- ζ) με κέντρο $K(-5, 0)$ και ακτίνα 7

10.2 Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παρακάτω κύκλων :

- α) $x^2 + y^2 = 25$ β) $x^2 + y^2 = 49$ γ) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$ δ) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$
- ε) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ ζ) $(x - 2)^2 + y^2 = 9$

10.3 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και

- α) διέρχεται από το σημείο $M(-6, 8)$
- β) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 5 = 0$

10.4 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και

- α) διέρχεται από το σημείο $M(-1, 2)$
- β) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 15 = 0$

10.5 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και

- α) διέρχεται από το σημείο $M(-2, 1)$
- β) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 10 = 0$

10.6 Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που έχει μέσο το σημείο $M(1, -1)$
(Σχολικό)

10.7 Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2 + y^2 = 100$ που έχει μέσο το σημείο $M(-3, 1)$ και στη συνέχεια το μήκος της παραπάνω χορδής.

10.8 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(-2, 3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 7)$

10.9 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(-1, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-2, -1)$

10.10 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(-4, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 1 = 0$

10.11 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(0, -3)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 5x - 12y - 10 = 0$

10.12 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1, 2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 4x + 3y + 5 = 0$

10.13 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που είναι ομόκεντρος του κύκλου $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 3x - 4y + 4 = 0$

10.14 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AB με $A(-2, -1)$ και $B(6, 3)$

10.15 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AB με $A(-1, 3)$ και $B(5, 1)$

10.16 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AB με $A(5, -1)$ και $B(-1, 7)$

10.17 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(5, -3)$ και εφάπτεται στον : α) άξονα $x'x$ β) άξονα $y'y$

10.18 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν :

α) έχει κέντρο $K(1, -3)$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$

β) εφάπτεται στον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 3)$ και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x$

10.19 Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ με $A(-2, 1)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(1, 4)$

10.20 Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(6, -4)$ και $\Gamma(-5, -1)$

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A

β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ

10.21 Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(4, -5)$

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A

β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ

Η Εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

10.22 Να βρείτε τι παριστάνει καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$ β) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 = 0$ γ) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 10 = 0$

10.23 Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα τους .

α) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$ β) $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$ γ) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 1 = 0$

10.24 Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα τους .

α) $x(x - 1) + (y + 1)(y - 3) = 0$ β) $(2x - 1)^2 + (2y + 3)^2 = 4$

10.25 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο τη διάκεντρο των κύκλων $C_1: 4x^2 + 4y^2 = 1$

και $C_2: (x - 1)(x + 3) + y(y - 2) = 0$

10.26 Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(1, 1)$, $E(0, 2)$ και $Z(-1, 1)$

και να αποδείξετε ότι ο κύκλος αυτός εφάπτεται στον άξονα $x'x$

10.27 Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους $C_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ διέρχεται από το κέντρο του άλλου .

10.28 Να βρεθεί η εξίσωση ενός κύκλου που είναι ομόκεντρος με τον $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ και :

α) έχει διπλάσια ακτίνα από αυτόν

β) εφάπτεται της ευθείας $y = -x + 1$

γ) διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$

10.29 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρείτε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η διάμετρος του προηγούμενου κύκλου που είναι κάθετη στην $\zeta : 2x + y + 2017 = 0$

γ) Να βρείτε τα άκρα της παραπάνω διαμέτρου

10.30 Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει κύκλο και μετά, να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα τους .

α) $x^2 + y^2 + 2\lambda x - 4\lambda y + 6\lambda^2 - 1 = 0$

β) $x^2 + y^2 + 2\lambda y - \lambda - 1 = 0$

10.31 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1)

10.32 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + \lambda - 1 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το κέντρο του κύκλου της (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 2x - 5y - 8 = 0$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ακτίνα του κύκλου της (1) είναι $2\sqrt{5}$

10.33 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 2\lambda - 1 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ευθεία

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο κύκλος της (1) έχει ακτίνα ίση με 4

10.34 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (2 - \lambda)y + \lambda + 7 = 0$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο

β) Έστω ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου το κέντρο K απέχει από την $\varepsilon: 3x + 4y + 5 = 0$ απόσταση $\frac{2}{5}$

Να βρείτε το λ , καθώς και την εξίσωση του κύκλου C που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο της εξίσωσης (1) και διέρχεται από το σημείο $A(-5, 2)$

10.35 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4\lambda^2 = 4\lambda(x + y)$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο. Ποιο το κέντρο και ποια η ακτίνα του κύκλου;

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ευθεία

γ) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στους άξονες x' και y'

10.36 Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 20 + \lambda(3x + y - 10) = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι της εξίσωσης (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B

γ) Έστω ότι το κέντρο K του κύκλου C που παριστάνει η εξίσωση (1) ανήκει στην ευθεία $\zeta: 2x + y + 8 = 0$.

Να βρείτε το λ και στη συνέχεια το εμβαδό του τριγώνου AKB .

10.37 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων

γ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι της εξίσωσης (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία

δ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής όλων των κύκλων της (1)

10.38 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο

β) Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

10.39 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 5 = 2\lambda(x - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι της εξίσωσης (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής όλων των κύκλων της (1)

Εύρεση Εφαπτομένης Κύκλου

10.40 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στα σημεία του $A(-2, 3)$ και $B(1, 4)$

10.41 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$

β) όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

γ) όταν διέρχεται από το σημείο $A(5, 0)$ (Σχολικό)

10.42 Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που είναι κάθετες στην ευθεία $\delta : x + 2y - 21 = 0$

10.43 Δίνεται ο κύκλος C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $\delta : 3x - 4y - 50 = 0$.
Να βρείτε :

α) την εξίσωση του κύκλου C

β) τις εφαπτόμενες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $K(-10, 20)$

10.44 Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 20$ όταν :

α) είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta : 2x + y - 2017 = 0$

β) διέρχονται από το σημείο $M(-2, 6)$

10.45 Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$ όταν :

α) είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta : 3x - y + 7 = 0$

β) διέρχονται από το σημείο $M(10, 0)$

10.46 Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 20$ που σχηματίζουν με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδό ίσο με 25 τ.μ.

10.47 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ στο σημείο του $A(1, -1)$
(Σχολικό)

10.48 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$ στο σημείο του $A(-3, 5)$

10.49 Δίνονται τα σημεία $A(-4, 3)$ και $B(4, -3)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την AB

β) την εξίσωση της εφαπτομένης του προηγούμενου κύκλου στο σημείο A

10.50 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο $A(10, -4)$

10.51 Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του $A(-1, 5)$

10.52 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Αν το σημείο $A(\mu, 3)$ με $\mu < 0$ ανήκει στον κύκλο, τότε να βρείτε το μ και την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο A .

10.53 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρείτε τα σημεία τομής A και B του παραπάνω κύκλου με τον άξονα $y'y$

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά καθώς και το σημείο τομής των δύο εφαπτομένων

10.54 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(2, 1)$

10.55 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(-6, -8)$ είναι εξωτερικό του κύκλου
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο M

10.56 Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(-2, -1)$. Να βρείτε :

- α) την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την AB
β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία AB

10.57 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon : x - 2y - 1 = 0$

10.58 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta : y = 2x + 2017$

10.59 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (4 - \lambda)y - 2\lambda - 14 = 0$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
β) Έστω ότι το κέντρο του κύκλου που παριστάνει η (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 5x + 3y + 4 = 0$. Να βρείτε :
 β_1) τον αριθμό λ καθώς και το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C
 β_2) τις εφαπτόμενες του κύκλου C που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta : 4x + 2y - 2017 = 0$
 β_3) τις εφαπτόμενες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(-1, 3)$

10.60 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (2\lambda - 4)y - 4\lambda - 1 = 0$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ευθεία ε .
γ) Αν ο κύκλος C που παριστάνει η (1) διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ τότε να βρείτε :
 γ_1) τον αριθμό λ καθώς και το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου C
 γ_2) την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του A
 γ_3) τις εφαπτόμενες του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε

10.61 Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = x - 4$ εφάπτεται του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ και να βρείτε το σημείο επαφής.

10.62 Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x\sin\varphi + y\eta\mu\varphi = 4\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\eta\varphi + 4$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ (Σχολικό)

10.63 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου

10.64 Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : (x - 5)^2 + y^2 = 25$

10.65 Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x - 4)^2 + y^2 = 4$

10.66 Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ και $C_2 : (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4$

Σχετικές Θέσεις Κύκλων – Ευθειών - Σημείων

10.67 Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 4$ ως προς :

- α) το σημείο $M(1, 3)$
 β) την ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$
 γ) τον κύκλο $C_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$

10.68 Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 4y = 0$ ως προς τα σημεία $A(\sqrt{3}, 3)$, $B(1, 3)$, $\Gamma(2, 1)$

10.69 Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 2x = 0$ ως προς τις ευθείες :

- α) $\varepsilon : 3x - 4y + 3 = 0$ β) $\delta : 3x - 4y + 1 = 0$ γ) $\zeta : 3x - 4y + 2 = 0$

10.70 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

- α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων
 β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται
 γ) Να βρείτε την κοινή χορδή των δύο κύκλων

10.71 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

- α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων
 β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται
 γ) Να βρείτε την κοινή χορδή των δύο κύκλων

10.72 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

- α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων
 β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά
 γ) Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
 δ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των δύο κύκλων

10.73 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 10x - 10y + 32 = 0$

- α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων
 β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά
 γ) Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
 δ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των δύο κύκλων

10.74 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ και ο κύκλος C_2 που έχει κέντρο το σημείο $K(-6, -8)$ και εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 . Να βρείτε :

- α) την εξίσωση του κύκλου C_2
 β) το σημείο επαφής των δύο κύκλων
 γ) την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των δύο κύκλων

10.75 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$ και ο κύκλος C_2 που έχει κέντρο το σημείο $K(1, 4)$ και εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 . Να βρείτε :

- α) την εξίσωση του κύκλου C_2
 β) το σημείο επαφής των δύο κύκλων
 γ) την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των δύο κύκλων

10.76 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 + 10x - 20y + 120 = 0$ και ο κύκλος C_2 που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C_1 . Να βρείτε :

- α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1
 β) την εξίσωση του κύκλου C_2
 γ) τις κοινές εφαπτόμενες των δύο κύκλων

10.77 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 16y + 20 = 0$ και ο κύκλος C_2 που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(-1, 2)$ και $B(1, -2)$.

- Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2
- Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται
- Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των δύο κύκλων

Γεωμετρικοί Τόποι

10.78 Δίνονται τα σημεία $M(\eta\mu\theta - 4, \sigma\upsilon\eta\theta + 2)$ με $\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

10.79 Δίνονται τα σημεία $M(2\eta\mu\theta, -2\sigma\upsilon\eta\theta)$ με $\theta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M .

10.80 Δίνονται τα σημεία $M(1 + 3\eta\mu\theta, 3\sigma\upsilon\eta\theta + 2)$ με $\theta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M .

10.81 Δίνονται τα σημεία $M(1 + 2\sigma\upsilon\eta\theta, 3 - 2\eta\mu\theta)$ με $\theta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε που κινούνται τα σημεία M .

10.82 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων $C : x^2 + y^2 + (4\lambda + 8)x - (12\lambda - 28)y - 15 = 0$

10.83 Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 2)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\overline{MA}|^2 + |\overline{MB}|^2 = 4$

10.84 Δίνονται τα σημεία $A(4, -3)$ και $B(-2, -5)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\overline{MA}|^2 + |\overline{MB}|^2 = 70$

10.85 Δίνονται τα σημεία $A(4, -1)$ και $B(-2, 7)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία το τρίγωνο AMB είναι ορθογώνιο στο M .

10.86 Δίνονται τα σημεία $A(x, y)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(1, 0)$. Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη $B\Gamma$, τότε:

- να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε κύκλο
- να βρείτε το A ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές

10.87 Δίνονται τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 3 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BM}$

Μέγιστο - Ελάχιστο στον Κύκλο

10.88 Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$. Να βρείτε:

- το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C
- τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
- τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει το σημείο $A(1, 2)$ από ένα σημείο του κύκλου C

10.89 Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$. Να βρείτε:

- το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C
- τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
- τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει η αρχή των αξόνων από ένα σημείο του κύκλου C

10.90 Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$. Να βρείτε :

- α) τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
- β) τη σχετική θέση του σημείου $A(1, 2)$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από ένα σημείο του κύκλου C
- γ) τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία (ε)

10.91 Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ και η ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y - 10 = 0$. Να βρείτε :

- α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C
- β) τη σχετική θέση της ευθείας (ε) ως προς τον κύκλο C
- γ) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία (ε)

10.92 Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 1$ και η ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y - 25 = 0$. Να βρείτε :

- α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C
- β) τη σχετική θέση της ευθείας (ε) ως προς τον κύκλο C
- γ) την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία (ε)

10.93 Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ και η ευθεία $\varepsilon : y = -x$. Να βρείτε :

- α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C
- β) τη σχετική θέση της ευθείας (ε) ως προς τον κύκλο C
- γ) την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία (ε)

10.94 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$. Να βρείτε :

- α) τη σχετική θέση των δύο κύκλων
- β) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του C_2

10.95 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 + 2y = 8$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Να βρείτε :

- α) τη σχετική θέση των δύο κύκλων
- β) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του C_2

10.96 Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ καθώς και τα σημεία $A(-7, 9)$ και $B(9, -3)$. Να βρείτε :

- α) το κέντρο K και την ακτίνα του κύκλου C
- β) το εμβαδόν του τριγώνου KAB
- γ) την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία A και B
- δ) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία (ε)

10.97 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ και ο κύκλος C_2 που έχει κέντρο $\Lambda(-2, 3)$ ο οποίος εφάπτεται στον άξονα $y'y$

- α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2
- γ) Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους είναι εξωτερικός του άλλου
- δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη του κύκλου C_1 στο σημείο του $A(2, 1)$ εφάπτεται και στον κύκλο C_2
- ε) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του C_2

Γενικά Θέματα στον Κύκλο

10.98 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\cos\theta - 2y\sin\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε θ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου στο σημείο $M(1, 2)$

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 1
(Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων)

10.99 Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμηγκια. Κάθε μυρμηγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμηγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους) του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο A

(Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων)

10.100 α) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μ, λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

β) Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$

β₁) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των προηγούμενων κύκλων βρίσκονται σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β₂) Να βρείτε τα λ, μ έτσι, ώστε αν A, B τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$ να ισχύει: $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

β₃) Για τιμές των μ, λ που βρήκατε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB

(Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων)

10.101 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2), B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$ με $\lambda \neq -2$

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

β) Αν $\lambda = 1$ να βρείτε:

β₁) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

β₂) την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1, 5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$

(Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων)

10.102 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 3)x + \mu y + \lambda = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

β) Έστω ότι ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο $A(6, -1)$ και το κέντρο του ανήκει στην $\varepsilon: 3x + y - 7 = 0$. Να βρείτε:

β₁) τις τιμές των λ και μ

β₂) την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του A

β₃) τα σημεία B και Γ του κύκλου C και της ευθείας (ε), καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

10.103 Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon: 3x + 4y + 6 = 0$ και $\delta: 3x + 4y + 16 = 0$. Να βρείτε:

α) την απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε και δ

β) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε και δ

γ) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία δ χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$ (Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων)

10.104 Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4|\vec{\alpha}|x + 6|\vec{\beta}|y + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με ακτίνα $\rho = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$

β) Αν το κέντρο του κύκλου C ανήκει στην ευθεία $\zeta: 2x + 3y + 2 = 0$ και η εφαπτομένη του (ε) στο σημείο του $\Lambda(|\vec{\alpha}|, -6|\vec{\beta}|)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{2}{3}$ τότε :

β₁) να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

β₂) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 11\vec{\beta}$ είναι κάθετα

β₃) να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{w} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

β₄) να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου C στα σημεία που τέμνει τον άξονα x'

10.105 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x + 2y \sin \theta - 4 \cos \theta = 0$, $0 < \theta < 2\pi$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε θ

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

γ) Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το εμβαδό του κύκλου γίνεται ελάχιστο

δ) Για $\theta = \pi$ να βρείτε :

δ₁) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που άγονται από την αρχή των αξόνων

δ₂) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τον κύκλο

10.106 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x \eta \mu \theta - 2y \sigma \nu \theta - 3 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε θ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x \eta \mu \theta + y \sigma \nu \theta - 3 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο

10.107 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2(\lambda + 1)y = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι συνευθειακά σημεία

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε ο κύκλος της (1) να είναι μοναδιαίος

δ) Αν η ευθεία $\varepsilon: x + y - 3 = 0$ τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Δ και E τέτοια, ώστε $\vec{O\Delta} \cdot \vec{OE} = 0$, όπου O η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$

10.108 Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2\lambda(x + 2y - 5) = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$

β) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων της (1) και να αποδείξετε ότι τα κέντρα ανήκουν σε ευθεία

γ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι της εξίσωσης (1) διέρχονται από το ίδιο σταθερό σημείο

δ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι εφάπτονται της ευθείας $\varepsilon: x + 2y - 5 = 0$

10.109 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2 = 2x \ln \theta + \ln^2 \theta + 4 \ln \theta$, $\theta > 0$ (1)

α) Για ποιες τιμές του θ η (1) παριστάνει κύκλο ;

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παραπάνω κύκλων

γ) Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή του θ για την οποία η ευθεία $\zeta: x - y + 4 = 0$ να εφάπτεται του κύκλου

10.110 Η εξίσωση $4x^2 - 4(\alpha + 1)x - \beta(\beta - 2) = 0$ έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες. Να βρείτε :

α) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(\alpha, \beta)$

β) την εφαπτόμενη του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου, η οποία άγεται από το σημείο $A(0, 2)$

Τυπολόγιο στον Κύκλο

1. Εξίσωση Κύκλου

- Με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ είναι : $x^2 + y^2 = \rho^2$
- Με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

2. Η Εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

- Παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$
- Έχει κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$
- Έχει ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

3. Εφαπτομένη Κύκλου

- Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $M(x_1, y_1)$ είναι $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$

11. Ενδοσχολικά Θέματα Εξετάσεων στον Κύκλο

11.1 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 + 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0$. (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία

γ) Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων (ΓΕΛ ΠΟΛΙΧΝΙΤΟΥ 2011)

11.2 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ (1) και οι ευθείες $\varepsilon_1: y = x - 4$, $\varepsilon_2: 3x + 2y - 7 = 0$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται σε σημείο του προηγούμενου κύκλου

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ε_1 (ΓΕΛ ΠΕΤΡΑΣ 2011)

11.3 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6ax - 8ay = 0$ (1) με $a \neq 0$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό $a \neq 0$ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων

γ) Να βρείτε τα $a \neq 0$ ώστε αν A, B τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $y = x + 1$, να ισχύει $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{0}$ (ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΥΤΙΑΛΗΝΗΣ 2011)

11.4 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 = 2(\eta\mu\theta)x + 2(\sigma\upsilon\nu\theta)y$, (1) με $0 \leq \theta < 2\pi$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε θ όταν $0 \leq \theta < 2\pi$

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

γ) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι ο μοναδιαίος κύκλος (4^ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΑΛΗΝΗΣ 2011)

11.5 Δίνονται τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $\Gamma(3, -7)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα A, B

β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

γ) την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ε

δ) την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Γ ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$ (ΓΕΛ ΜΟΥΔΡΟΥ 2011)

11.6 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 + 2\lambda x - 2\lambda y - 4 = 0$. (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε μια σταθερή ευθεία

γ) Να βρείτε εκείνον τον κύκλο που έχει κέντρο $K(2, -2)$

δ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τον κύκλο του τρίτου ερωτήματος (ΓΕΛ ΓΕΡΑΣ 2011)

11.7 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 4y + \lambda = 0$ (1)

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο
 β) Να βρείτε το λ ώστε ο παραπάνω κύκλος να έχει ακτίνα ίση με 1
 γ) Για $\lambda = 12$ να δείξετε ότι το σημείο $M(4, 2)$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου και στην συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το M (ΓΕΛ ΑΓ.ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΥ 2011)

11.8 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\mu x + 4y + 5 = 0$ (1)

- α) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων
 γ) Για $\mu = 3$ να αποδείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $y = x - 1$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)

11.9 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(2, 3)$ και $\lambda \neq -2$

- α) Να δείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία
 β) Αν $\lambda = 2$ να βρείτε
 β1) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 β2) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην $B\Gamma$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)

11.10 Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2\lambda(x + 2y - 5)$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \neq 0$
 β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
 γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο (14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2012)

11.11 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + (2\lambda - 6)y + 5 - 2\lambda = 0$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
 β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
 γ) Να βρείτε ποιος από τους παραπάνω κύκλους εφάπτεται στον άξονα $y'y$
 δ) Να βρείτε ποιο σημείο του γεωμετρικού τόπου των κέντρων των κύκλων απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

11.12 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$. (1)

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλους των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
 β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
 γ) Για $\lambda = 0$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου από την αρχή των αξόνων (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

11.13 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2\kappa - 1, 3\kappa + 2)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(2, 3)$.

- α) Να βρείτε που κινείται το A καθώς το κ μεταβάλλεται
 β) Για $\kappa = 1$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην $B\Gamma$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

11.14 Δίνεται η εξίσωση $(2x - 1)^2 + 4y^2 = 4$ (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 β) Να δείξετε ότι το $A(0, \frac{1}{2})$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου με μέσο το A (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

11.15 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + 4\lambda^2 = 0$ (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για $\lambda \neq 0$ του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα
 β) Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος που προκύπτει από την (1) εφάπτεται στον άξονα $y'y$
 γ) Να αποδείξετε ότι όλα τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και την διευθετούσα
 δ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) να εφάπτονται στον άξονα $x'x$
(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

11.16 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(3, 4)$

- α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με διάμετρο AB
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο B
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες
 δ) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ η οποία διέρχεται από το σημείο $K(1, 2)$
(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

11.17 Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(5, 2)$. Να βρείτε:

- α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 β) τις εξισώσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$
 γ) τα ύψη BD και GE καθώς και το ορθόκεντρο του τριγώνου
 δ) την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A\Gamma E$
(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

11.18 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 8\lambda x - 2\lambda y + 17\lambda^2 - 2 = 0$ (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα
 β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων και να δείξετε ότι σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$
 γ) Να βρείτε τον λ ώστε ένας κύκλος της (1) να εφάπτεται στην $\varepsilon: -x+y+1=0$
(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

11.19 Δίνονται τα σημεία $M(4\kappa+3, 3\kappa-1)$, $A(7, -3)$, $B(3, -6)$

- α) Να δείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν σε μια ευθεία ε της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση
 β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην ευθεία ε
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB και να δείξετε ότι είναι παράλληλη στην ευθεία ε
 δ) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι σταθερό
(ΒΕΝΕΤΟΚΛΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2013)

11.20 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
 β) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων
 γ) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η (1) ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση
(4^ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2013)

11.21 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(\lambda + 1)x + (2\lambda - 1)y + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
 β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
 γ) Για $\lambda = -1$ να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C_1 καθώς και η σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon: 3x+4y-5=0$ ως προς τον κύκλο C_1
(ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΣ 2013)

11.22 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 2)y - 4 - 3\lambda = 0$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
 β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
 γ) Να βρείτε το λ αν το κέντρο των κύκλων της (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3x+y-9=0$
 δ) Για $\lambda = -4$ να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το σημείο $P(1, 5)$
(1^ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2013)

11.23 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda y + \lambda^2 - 1 = 0$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
 β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται στην ευθεία $y = -x$
 γ) Για $\lambda = 7$ να βρείτε τις ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο που προκύπτει από την (1) και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
(ΜΟΥΣΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

11.24 Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ και $C_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$

- α) Να δείξετε ότι ο C_2 παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 β) Να βρείτε την σχετική θέση των δύο κύκλων
 γ) Αν M και N σημεία των δύο κύκλων, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των M και N .
(2^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2013)

11.25 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x - 4(\lambda + 1)y + 8\lambda + 4 = 0$. (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
 β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
 γ) Να δείξετε ότι οι κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη την $x - 2y + 4 = 0$ **(14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)**

11.26 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2(1 + \lambda)y + 1 + 2\lambda = 0$. (1) με $\lambda \neq 0$

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα
 β) Να δείξετε ότι καθένας από τους παραπάνω κύκλους εφάπτεται στην ευθεία $x+y+1=0$
 γ) Για $\lambda = 1$ να βρείτε το σημείο επαφής με την παραπάνω ευθεία **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)**

11.27 Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(5, 1)$, $B(5, 7)$, $\Gamma(13, 1)$

- α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB και της διαμέσου AM
 β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ καθώς και του ύψους $\Gamma\Delta$
 γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο
 δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του $AB\Gamma$ **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)**

11.28 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 3)x - (\lambda + 2)y - 4 = 0$ (1)

- α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού λ
 β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο
 γ) Να δείξετε ότι η ευθεία ε_1 που προκύπτει από την (1) για $\lambda = 1$ εφάπτεται στον κύκλο $C: (x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25$
 δ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του $\Gamma(-3, 3)$ από ένα σημείο της ε_1 **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)**

11.29 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x + y + \lambda(x + y + 1) = 0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ πραγματικό αριθμό

β) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία $A(0, -1)$, $B(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής AB

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε κέντρο και ακτίνα του κύκλου που περιγράφει η (1) καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A (ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2014)

11.30 Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 + 12x - 6y - 5 = 0$ (1)

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

β) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο του A(1,2)

γ) Αν ο κύκλος $C': (x - 6)^2 + y^2 = 64$ να βρείτε την σχετική θέση των 2 κύκλων (3^ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)

11.31 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6x - 4y + \kappa = 0$ (1)

α) Να βρεθεί ο κ ώστε η εξίσωση (1) να είναι εξίσωση κύκλου

β) Να βρεθεί ο κ ώστε ο παραπάνω κύκλος να έχει ακτίνα 1

γ) Για $\kappa = 12$ να δείξετε ότι το M(1, 2) είναι εξωτερικό του κύκλου (ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2015)

11.32 Δίνονται τα διανύσματα \vec{u}, \vec{v} με $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$ και να σχηματίζουν γωνία 60° . Να βρείτε:

α) την ακτίνα και το κέντρο του κύκλου: $x^2 + y^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v} + 3)x - 6y - |2\vec{u} - \vec{v}| - 10 = 0$

β) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του A(-1, -1) (ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2015)

11.33 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(-3, -8), B(-2, 0) και το μέσο M(2, 2) της πλευράς ΒΓ

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς ΑΓ είναι $4x - 3y - 12 = 0$

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο M και εφάπτεται στην πλευρά ΑΓ

δ) Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος εφάπτεται στον άξονα $y'y$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2015)

11.34 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\mu + 1)x + (\mu - 1)y + \mu^2 + 3\mu + 3 = 0$. (1)

α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου μ , ώστε να παριστάνει κύκλο.

β) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου από το οποίο να διέρχονται όλοι οι κύκλοι της (1)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων

δ) Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: y = x - 1$ και $\varepsilon_2: y = x + 3$. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) βρίσκονται στην ζώνη που ορίζεται από τις παράλληλες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑΣ 2015)

11.35 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 + (\lambda - 6)x + (\lambda - 8)y + 21 - 5\lambda = 0$. (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B

γ) Αν A(3, 2) και B(1, 4) τότε:

γ1) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων

γ2) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_0 που είναι παράλληλες στην AB (ΜΠΑΧΑΡΑΚΗΣ 2016)

11.36 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x + 2)^2 = (5 - y) \cdot (5 + y)$ και $C_2 : 4x^2 + (2y - 3)^2 = 25$

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους και στη συνέχεια να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων

β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και να δείξετε ότι το σημείο τομής τους είναι το $M(2, 3)$

γ) Να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο του M ως προς κάθε κύκλο

δ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων

ε) Να βρείτε τα σημεία των δύο κύκλων που απέχουν την μέγιστη απόσταση μεταξύ τους
(LISARI 2016)

11.37 Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(4, 1)$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) που διέρχεται από τα A και B έχει εξίσωση $x + y - 5 = 0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (δ) που είναι κάθετη στο μέσο M του AB είναι $-x + y + 1 = 0$

γ) Να βρείτε το σημείο τομής Γ της ευθείας (δ) με τον άξονα x'

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Γ και εφάπτεται στην ευθεία (ϵ)
(ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2016)

11.38 α) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ με $|\vec{v}| = 1$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\beta y - 1 = 0$ είναι εξίσωση κύκλου για κάθε τιμή των πραγματικών α, β και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Αν $\vec{v} = (1, 0)$ τότε :

β) να γράψετε την εξίσωση του κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα

γ) να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) : $x - y + 1 = 0$ είναι εφαπτομένη του προηγούμενου κύκλου

δ) αν τα σημεία $M(\mu, \kappa)$ και $N(\nu, \lambda)$ είναι σημεία του κύκλου,

να δείξετε ότι $0 \leq (\mu - \nu)^2 + (\kappa - \lambda)^2 \leq 8$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2016)

11.39 α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα του

β) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (δ) και (ζ) που είναι κάθετες στην ευθεία $\epsilon : x + y - 1 = 0$

γ) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τις ευθείες (δ) και (ζ) στα σημεία A και B αντίστοιχα, να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου KAB
(3^ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)

11.40 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6\alpha x - 8\alpha y = 0$ όπου $\alpha \neq 0$

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρεθεί το α ώστε η ευθεία $\epsilon : 3x + 4y - 5 = 0$ να εφάπτεται στον κύκλο

γ) Να βρείτε την τιμή του α έτσι, ώστε αν A, B τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία (ϵ)

να ισχύει : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ (3^ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)

11.41 Δίνεται η εξίσωση $4x \cdot (x - y) + y \cdot (y - \beta) + 2\beta x = 0$ (1) με $\beta > 0$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες

Ένα τετράγωνο έχει τις δύο πλευρές του πάνω στις ευθείες $\delta : y = 2x$ και $\zeta : y = 2x + \beta$

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 20 τ.μ. να δείξετε ότι $\beta = 10$

Θεωρούμε κύκλο C που έχει το κέντρο του στην ευθεία (δ) και εφάπτεται στην (ζ)

γ) Αν $A(5, 4)$ σημείο του επιπέδου και B, Γ τα σημεία τομής της (δ) με τον κύκλο C να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που προκύπτουν αν η γωνία ΓAB είναι ορθή

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2016)

11.42 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά

β) Αν η εφαπτόμενη του κύκλου C_2 στο σημείο του $A(-1, 0)$ τέμνει τον κύκλο C_1 στα σημεία B και Γ αντίστοιχα να υπολογισθούν οι εφαπτόμενες του C_1 στα σημεία αυτά

γ) Αν ο C_2 τέμνει τον θετικό ημιάξονα $y'y$ στο σημείο Δ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C_2 στο σημείο Δ .
(ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)

11.43 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, y)$, $\vec{\beta} = (1, 2)$, $\vec{\gamma} = (2\lambda, y)$ και $\vec{\delta} = (x, 4\lambda)$ με $\lambda \neq 0$

α) Αν ισχύει $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} - 10\lambda$ (1), να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

β) Αν ο παραπάνω κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 4(\lambda + 1)y + 10\lambda + 5 = 0$:

β1) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων

β2) να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

(1^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

11.44 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4y + 2\lambda = 0$ (1) και η ευθεία $(\varepsilon) : y = x - 2 - \lambda$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας (ε) ως προς τον κύκλο της (1)

γ) Αν η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα Α και Β και ισχύει $|\vec{OA} - \vec{OB}| = 2\sqrt{3}$, να βρείτε το λ

δ) Για $\lambda = 1$ να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην (ε)

(2^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

11.45 α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C_1 ο οποίος διέρχεται από το σημείο $P(2, 1)$, έχει ακτίνα

$\rho_1 = \sqrt{2}$ και η ευθεία $(\varepsilon) : x - y + 1 = 0$ τον τέμνει στα σημεία Α και Β έτσι ώστε $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$

β) Να βρεθεί κύκλος C_2 που εφάπτεται εξωτερικά στον $C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$

και έχει κέντρο το $\Lambda(4, 5)$

γ) Να αποδείξετε ότι το κοινό σημείο των $C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ και $C_2 : (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 8$ είναι το $M(2, 3)$ και στη συνέχεια να βρείτε την κοινή τους εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C_1 που διέρχονται από το

σημείο $A(1 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$ και στη συνέχεια να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους.

(2^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2016)

11.46 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 6y = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Αν $\lambda = 0$ να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : 4x - 3y = 0$ τέμνει τον κύκλο και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας και το κύκλου

γ) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $\varepsilon : 4x - 3y = 0$ να είναι εφαπτόμενη του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής

(ΓΕΛ ΛΙΜΕΝΑΡΙΩΝ ΘΑΣΟΥ 2016)

11.47 Δίνονται οι κύκλοι C_1 που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : 24x - 7y - 100 = 0$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4(x + y - 6)$. Να βρείτε :

α) τις εξισώσεις των δύο κύκλων

β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του C_1 που είναι παράλληλες στην ευθεία $\sqrt{3}x + y + 6 = 0$

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης του C_2 στο σημείο $A\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$ (ΓΕΛ ΜΥΓΔΟΝΙΑΣ 2016)

11.48 Δίνονται οι ίσοι κύκλοι C_1, C_2 με κέντρα $O(0, 0), K(2, -4)$ αντίστοιχα, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κύκλων

β) Να βρείτε το σημείο επαφής M των δύο κύκλων

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης στο σημείο $M(1, -2)$

δ) Να υπολογίσετε το σημείο της ευθείας $\varepsilon : 2x + y - 7 = 0$ από το οποίο οι εφαπτόμενες του κύκλου $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ να είναι κάθετες

(1^ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2016)

11.49 Δίνονται τα σημεία $M(2\eta\theta+1, 2\sigma\theta)$ με θ πραγματικό αριθμό.

- α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι κύκλος C με κέντρο $K(1, 0)$ και $\rho=2$
 β) Να βρείτε τις κατακόρυφες εφαπτόμενες του κύκλου C
 γ) Εξετάστε αν το σημείο $\Sigma(2, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο C και να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη του κύκλου C στο Σ με τον άξονα $x'x$.
 δ) Να βρείτε σημείο A του άξονα $x'x$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $ΚΑΣ$ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}$
(6^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)

11.50 Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\epsilon_1: 3x - 4y + 12 = 0$ και $\epsilon_2: 3x - 4y + 22 = 0$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των 2 ευθειών
 β) την απόσταση των 2 παραλλήλων ευθειών
 γ) την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ϵ_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία ϵ_2 χορδή μήκους $d=4\sqrt{3}$
(1^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)

11.51 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4y + 5 = 0$ (1).

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο
 β) Να βρείτε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) και εφάπτεται στην ευθεία $\epsilon: y = x - 1$
 γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που παριστάνει η (1)
 δ) Αν τα σημεία M_1, M_2 διατρέχουν τον κύκλο C που ορίζεται από την (1) για $\lambda=2$ και $(M_1M_2) = 2\sqrt{3}$ τότε να υπολογίσετε το $|\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}|$
(1^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)

11.52 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6\lambda x + 2\lambda y = 0$ (1) με $\lambda \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \neq 0$, οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του
 β) Να δείξετε ότι οι κύκλοι της (1) εφάπτονται της ευθείας $\epsilon: y = 3x$
 γ) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που παριστάνει η (1) είναι η ευθεία $\delta: x + 3y = 0$ εκτός του σημείου $O(0, 0)$
 δ) Αν το τμήμα OA είναι διάμετρος του κύκλου που ορίζεται από την (1) και έχει μήκος $2\sqrt{10}$, να βρείτε τις τιμές του λ και μετά με την θετική τιμή του λ που βρήκατε, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του A
(1^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2017)

11.53 Έστω ο κύκλος $C: (x + 1)^2 + y^2 = 20$

- α) Να βρεθεί το κέντρο K και η ακτίνα ρ του κύκλου
 β) Να αποδειχθεί ότι το σημείο $A(1, 6)$ δεν ανήκει στον κύκλο
 γ) Αποδείξτε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου
 δ) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το A
(4^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2017)

11.54 Έστω κύκλος C που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3), B(4, 1)$ με το κέντρο του να ανήκει στην ευθεία $x - 3y + 3 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι $C: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$
 β) Να υπολογίσετε τις εφαπτόμενες του κύκλου στο σημείο $\Sigma(0, 1)$
 γ) Έστω η παραμετρική εξίσωση γραμμής $x - y - 1 + \mu(-x - y + 5) = 0$ (1)
 γ1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία (ϵ) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού μ και ότι διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο να βρείτε
 γ2) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ϵ) τέμνουν τον κύκλο C για κάθε τιμή του μ στα σημεία $\Gamma(x_1, y_1), \Delta(x_2, y_2)$ τέτοια ώστε $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 8$
(1^ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2017)

11.55 α) Να βρείτε :

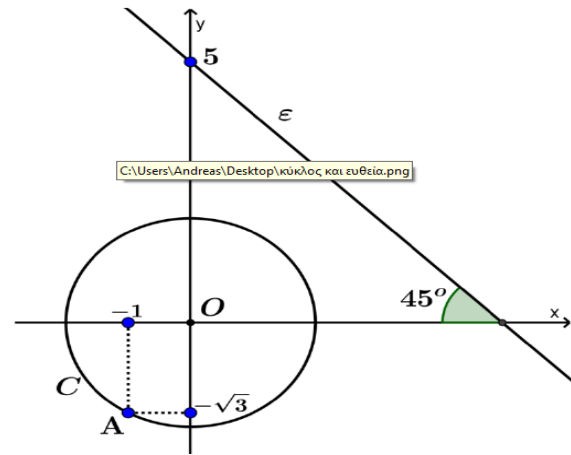
α1) την εξίσωση της ευθείας (ϵ)

α2) την εξίσωση του κύκλου C

α3) τις εξισώσεις των εφαπτομένων ϵ_1, ϵ_2 του κύκλου, που είναι κάθετες με την (ϵ)

β) Αν B, Γ είναι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων ϵ_1, ϵ_2 με τον κύκλο C , να αποδείξετε ότι το τμήμα $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου.

(ΓΕΛ ΓΑΛΑΤΣΙΟΥ 2017)



11.56 Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + y^2 - 4xy - 12x + 6y - 16 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης (ϵ) των ϵ_1, ϵ_2

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τραapeζίου που σχηματίζουν οι ϵ, ϵ_2 με τους άξονες x', y'

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, εφάπτεται στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και το κέντρο του ανήκει στην (ϵ) (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ LISARI 2017)

11.57 Δίνονται τα διανύσματα \vec{u}, \vec{v} με $2|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$, $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$ καθώς και οι εξισώσεις

$C: x^2 + y^2 + 6x + (\vec{u} \cdot \vec{v} - 1)y + |2\vec{u} + \vec{v}| + 7 = 0$ (1) και $(\lambda - 2)x + (\lambda + 3)y + 1 - 3\lambda = 0$ (2)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-3, 1)$ και ακτίνα $\rho = 1$

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων

γ) Να αποδείξετε ότι η (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού λ

δ) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της (2) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε

ε) Να βρείτε ποια από τις ευθείες της (2) ορίζει στον κύκλο C χορδή με το μέγιστο δυνατό μήκος.

(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ LISARI 2017)

11.58 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 = 2\lambda(3x - y)$ (1) με $\lambda \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \neq 0$, οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

β) Να δείξετε ότι οι κύκλοι της (1) εφάπτονται της ευθείας $\epsilon: y = 3x$

γ) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που παριστάνει η (1) είναι η ευθεία $\delta: x + 3y = 0$ εκτός του σημείου $O(0, 0)$

δ) Αν το τμήμα OA είναι διάμετρος του κύκλου που ορίζεται από την (1) και έχει μήκος $2\sqrt{10}$, να βρείτε τις τιμές του λ και μετά με την θετική τιμή του λ που βρήκατε, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του A (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2017)

11.59 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα του ρ

β) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $\epsilon: 3x - 4y = -7$ να είναι διπλάσια από την απόσταση του K από τον άξονα $y'y$

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

δ) Να βρείτε ποιος από τους κύκλους της (1) εφάπτεται στην ευθεία $\delta: y = -x + 1$

(ΓΕΛ ΒΟΙΩΤΙΑΣ 2017)

11.60 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \mu x - 2\mu y + \frac{(3\mu-1)\mu}{2} - \frac{3}{4} = 0$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του φυσικού μ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο

β) Για $\mu = 0$ να βρεθεί η εξίσωση, το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

γ) Για τον κύκλο που προκύπτει από το β) ερώτημα, να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του, που σχηματίζουν γωνία 60° με τον άξονα $x'x$ (ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2017)

11.61 Έστω κύκλος C_1 ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $3x + 4y - 25 = 0$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου είναι $C_1 : x^2 + y^2 = 25$

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι παράλληλες στην $4x - 3y + 2 = 0$

γ) Αν $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ είναι ένας άλλος κύκλος C_2 , να δείξετε ότι το κέντρο του είναι σημείο του κύκλου C_1 και ότι εφάπτεται στον άξονα $y'y$

δ) Αν δύο σημεία A, B κινούνται στον κύκλο C_2 έτσι ώστε $(AB) = 6$, να δείξετε ότι $|\vec{OA} + \vec{OB}| = 10$ (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

11.62 α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημεία $O(0, 0), A(2, 0), B(0, 3)$ καθώς επίσης και το κέντρο K και την ακτίνα του ρ

β) Αν ο παραπάνω κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ τότε :

β1) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο $A(2, 0)$ είναι η ευθεία $2x - 3y - 4 = 0$

β2) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AK\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της εφαπτομένης (ε) με τον άξονα $y'y$ (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

11.63 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4(\eta\mu\theta)x - 4(\sigma\upsilon\nu\theta)y - 5 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$,

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε θ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 2

γ) Αν $\theta = 0$ και σημείο $M(3, 5)$:

γ1) Να αποδείξετε ότι το M είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου

γ3) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που άγονται από το σημείο M (ΓΕΛ ΜΕΣΣΗΝΙΑΣ 2017)

11.64 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ καθώς και οι εξισώσεις $C: x^2 + y^2 - \frac{4}{3}|\vec{\alpha}|x + 2|\vec{\beta}|y - 3(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = 8$ (1) και $(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (2) με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2, -4)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{10}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $\Lambda(3, -1)$

γ) Να αποδείξετε ότι η (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού λ

δ) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της (2) διέρχονται από σταθερό σημείο M , το οποίο και να βρείτε

ε) Να βρείτε την απόσταση του κέντρου K του κύκλου από το σταθερό σημείο M του δ) ερωτήματος (ΓΕΛ ΜΥΓΔΟΝΙΑΣ 2017)

11.65 α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $O(0, 0)$ που διέρχεται από το σημείο $A(-\sqrt{3}, 1)$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ στο σημείο $A(-\sqrt{3}, 1)$

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον θετικό ημιάξονα Ox

δ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $B(1, 1)$ από την εφαπτομένη $\varepsilon_1 : -\sqrt{3}x + y - 4 = 0$ (ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2017)

11.66 Δίνεται η εξίσωση $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|x + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}y - 8 = 0$ (1), $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που προκύπτει από την (1) αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

γ) Έστω κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ζ: $x + y - 2 = 0$ στο σημείο N. Να βρείτε :

γ1) τις συντεταγμένες του N

γ2) την εξίσωση του κύκλου C

(ΟΕΦΕ 2017)

11.67 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 2y + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ (1) με $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η (1) παριστάνει κύκλο

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η (1) παριστάνει κύκλο ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων

γ) Αν C είναι ο κύκλος που προκύπτει από την (1) για $\alpha = -1$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία τομής του C με τους άξονες (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2017)

11.68 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2, 1)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(4, 1)$ και $B(2, 0)$ ανήκουν στον παραπάνω κύκλο

γ) Να βρείτε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 3 = 0$

δ) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο B (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2017)

11.69 Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2\lambda(x + 2y - 5)$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο

β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που έχουν συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 2

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων του παραπάνω κύκλου (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

11.70 Δίνεται η εξίσωση $x(2x - 2\alpha) + (2y - 4)(y + \alpha) = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε α και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

β) Να βρείτε το α αν ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: y = x$

γ) Για $\alpha = -2$ να αποδείξετε ότι η ευθεία $3x + 4y + 10 = 0$ δεν τέμνει τον κύκλο (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

11.71 Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y - 10 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + 2\alpha x + (2 - \beta)y + 10 = 0$

Αν οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο $A(-3, 1)$:

α) να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = -6$

β) Να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα τους

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στο σημείο A

δ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

11.72 Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 = 20$ και σημείο $A(6, 2)$

α) Να αποδείξετε ότι το A είναι εξωτερικό του κύκλου

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το A

γ) Αν B, Γ τα σημεία τομής των εφαπτόμενων του β) με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

11.73 Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$, $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y = 14$.
Να αποδειχθεί ότι :

- α) μέρος της ευθείας ε σχηματίζει χορδή στον κύκλο C_1
β) ο κύκλος C_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C_2
γ) το μήκος κάθε εφαπτόμενου τμήματος που άγεται απ' το σημείο $\Sigma(-3, 2)$ στον κύκλο C_2 είναι ίσο με $\sqrt{13}$ (ΚΑΖΟΥΛΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2018)

11.74 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|x - 2|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|y + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$ (1) με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \sqrt{2}|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.
β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν μέτρα $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$, να δείξετε ότι:
β1) Το κέντρο του κύκλου είναι το $K(2, 2)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$ καθώς και ότι ο κύκλος περνά από την αρχή O των αξόνων.
β2) Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $C: x^2 = 16y$, αφού δείξετε ότι η εστία E της παραβολής είναι σημείο του κύκλου, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που είναι παράλληλες στην KE . (ΓΕΛ ΠΥΛΟΥ 2018)

11.75 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$.

- α) Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
β) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία τομής του παραπάνω κύκλου και της ευθείας $y = x$ είναι τα $A(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2})$

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του παραπάνω κύκλου στο σημείο A .
(ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ ΠΕΛΛΑΣ)

11.76 Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$ και το σημείο $M(2, 4)$ της παραβολής. Τμήμα AB έχει τα άκρα του πάνω στην παραβολή και περνά από την εστία E και είναι παράλληλο στην εφαπτομένη ε της παραβολής στο σημείο M .

- α) Να βρεθεί η εστία E και η διευθετούσα δ της παραβολής.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε στο σημείο M
γ) Αν $\varepsilon: y = x + 2$
γ1) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το τμήμα AB
γ2) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C_1 που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB
γ3) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C_1 εφάπτεται της διευθετούσας δ (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

11.77 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4x - 2\alpha y = 0$, (1) όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων O .
γ) Έστω A, B τα σημεία που τέμνει η εξίσωση (1) τους άξονες x' και y' αντίστοιχα διαφορετικά από την αρχή των αξόνων O . Για ποιες τιμές του α το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές;
δ) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η ευθεία με εξίσωση (ε): $y = x$ να είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
ε) Έστω Δ το αντιδιαμετρικό σημείο της αρχής των αξόνων στο κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1) για $\alpha = -2$. Να βρείτε την εφαπτομένη ευθεία του κύκλου αυτού στο σημείο του Δ .
(ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2018)

11.78 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση : $x^2 + y^2 - 6kx - 8ky = 0$.

α) Για ποια τιμή του $k \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο ; Να υπολογίσετε την ακτίνα του και το κέντρο του .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία κινούνται τα κέντρα των παραπάνω κύκλων .

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από την αρχή των αξόνων .

δ) Έστω C_1 ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση για $k = 1$ και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + 2$. Να υπολογίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία ε να τέμνει τον κύκλο C_1 σε δυο σημεία A και B έτσι ώστε η γωνία $\widehat{AOB} = 90^\circ$. (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

11.79 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4ax - 2y + 4a = 0$ (1) , $a \in \mathbb{R}$.

α) Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, η (1) παριστάνει κύκλο .

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η (1) ανήκουν σε ευθεία η οποία και να βρεθεί .

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) εφάπτονται σε σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί . (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

11.80 Έστω C_1 ένας κύκλος που έχει κέντρο $K(2, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(5, 3)$

α) Να βρείτε το μήκος της ακτίνας R και την εξίσωση του κύκλου C_1

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 15 = 0$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C_1 και να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής της με τον C_1

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση : $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C_2 του οποίου να βρείτε το κέντρο του Λ και την ακτίνα του ρ

δ) Να υπολογίσετε την εξίσωση της διακεντρικής ευθείας $K\Lambda$ και να υπολογίσετε το σημείο τομής αυτής με την εφαπτομένη ε (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2018)

11.81 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 4(\lambda + 1)y + (10\lambda + 5) = 0$ (1) η οποία παριστάνει μια οικογένεια κύκλων για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K , καθώς και την ακτίνα ρ , για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το κέντρο K , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που εκφράζονται μέσω της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο A , του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

δ) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο αντίστοιχος κύκλος της (1) να διέρχεται από το σημείο $B(5, 2)$ καθώς και την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο αυτόν στο σημείο B .

ε) Αν το σημείο A του ερωτήματος Δ3 έχει συντεταγμένες $(1, 2)$, να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018)

11.82 Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (x + 2y, -x)$, $\vec{\beta} = (2x + y, 5y)$.

α) Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (C) των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου, των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 8x + 12y - 8$.

γ) Αν $C: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ ο πιο πάνω γεωμετρικός τόπος να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του (C) που άγονται από σημείο $\Gamma(-1, -3)$.

δ) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(2, 0)$

ε) Αν η ευθεία : $x - y + 1 = 0$ τέμνει τον κύκλο (C) στα σημεία A και B , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$. (6^ο ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2016)

11.83 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 = 2x + 1$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) του κύκλου που είναι παράλληλη στην ευθεία ζ: $x - y + 1 = 0$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες. (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2018)

11.84 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2(\lambda + 1)y - 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. (1)

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$

β) Να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα των παραπάνω κύκλων

γ) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία

δ) Να βρεθεί ο θετικός αριθμός λ ώστε η ευθεία με εξίσωση $4x - 3y + 12 = 0$ να εφάπτεται στον κύκλο (ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2018)

11.85 Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο $M(3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι από το M άγονται δύο εφαπτόμενες ως προς τον κύκλο.

β) Αν A, B τα σημεία επαφής αυτών των εφαπτόμενων με τον κύκλο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι $3x + y = 5$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας AMB

δ) Να βρείτε το συμμετρικό του M ως προς την ευθεία AB (ΓΕΛ ΜΗΛΟΥ 2018)

11.86 α) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μ, λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

β) Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$

β₁) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των προηγούμενων κύκλων βρίσκονται σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β₂) Να βρείτε τα λ, μ έτσι, ώστε αν A, B τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία

$x + y + 2 = 0$ να ισχύει: $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ (ΜΟΥΣΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2018)

11.87 Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2y^2 - 4(\lambda - 1)x + 4\lambda y - 4\lambda + 2 = 0$. (1)

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε τα κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1), διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

δ) Να βρεθεί ο αριθμός λ ώστε η ευθεία με εξίσωση $x - y - 3 = 0$ να εφάπτεται στον κύκλο

(2^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2018)

11.88 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x + y + 3 = 0$ και το σημείο $A(0, -5)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ε .

β) το συμμετρικό A' του A ως προς την ε .

γ) τις εξισώσεις των κύκλων C, C' με κέντρα τα A, A' αντίστοιχα που εφάπτονται στην ε .

δ) τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορεί να έχουν ένα σημείο του κύκλου C από ένα σημείο του κύκλου C'

ε) τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των κύκλων C, C' (ΟΕΦΕ 2018)

11.89 Θεωρούμε τις εξισώσεις $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ (1) και $(2\lambda + 1)x + (1 - \lambda)y + 3 = 0$ (2)
 α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
 β) Να δείξετε ότι η (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ και ότι όλες οι ευθείες που ανήκουν στην (2) διέρχονται από ένα σταθερό σημείο T , το οποίο και να βρείτε.
 γ) Να δείξετε ότι οποιαδήποτε ευθεία της (2) για $\lambda \neq 1$ τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία
 δ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία ορίζει στον κύκλο χορδή μήκους $2\sqrt{2}$
 ε) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (ΟΕΦΕ 2018 Β ΦΑΣΗ 2018)

11.90 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ (1).
 α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ϵ) του κύκλου στο $A(-3, -3)$ (6^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2019)

11.91 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\sin\theta)x - 2(\eta\mu\theta)y - 1 = 0$ (1), $0 \leq \theta < 2\pi$,
 α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε θ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του
 β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 1
 γ) Να βρείτε το θ ώστε το κέντρο του κύκλου (1) να βρίσκεται στη διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου
 δ) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την (1) για $\theta = \frac{\pi}{2}$ και η ευθεία $\epsilon: 3x - 4y = 11$. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση σημείου του κύκλου από την ευθεία (ϵ) (1^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2019)

11.92 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ (1)
 α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο C_1 με κέντρο $K(3, 4)$ και ακτίνα $\rho = 1$
 β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C_2 που είναι ομόκεντρος του C_1 και εφάπτεται της ευθείας $\epsilon: 3x + 4y + 5 = 0$
 γ) Αν C_3 είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του C_3 οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(4, 0)$ (2^ο ΓΕΛ ΚΕΡΚΥΡΑΣ 2019)

11.93 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(\lambda + 1)x - 4\lambda y + 5\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$. (1)
 α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ
 β) Να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα των παραπάνω κύκλων
 γ) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = -2x - 2$
 δ) Για $\lambda = 2$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το κέντρο του και σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox' και Oy ισοσκελές τρίγωνο. (ΓΕΛ ΓΕΡΑΣ ΛΕΣΒΟΥ 2019)

11.94 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y + 9 = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$
 α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) παριστάνει κύκλο
 β) Έστω ότι $\lambda = -5$. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που προκύπτει από την (1)
 γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου του β) ερωτήματος, στο σημείο $A(2, 2 + \sqrt{3})$. Διέρχεται η ευθεία που βρήκατε από την αρχή των αξόνων; (ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ ΠΕΛΛΑΣ 2019)

11.95 Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4|\vec{\beta}|x + 3|\vec{\alpha}|y - 7(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = 0$ (1), με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}, \vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$.
 Δίνεται επίσης ότι η εφαπτόμενη του παραπάνω κύκλου στο σημείο του $M\left(6|\vec{\beta}|, -\frac{|\vec{\alpha}|}{2}\right)$ έχει κλίση ίση με -2 και ότι το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $x + y + 1 = 0$
 α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων καθώς και τη γωνία τους
 β) Να δείξετε ότι ο κύκλος έχει τη μορφή $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$
 γ) Αφού δείξετε ότι το $A(0, 1)$ ανήκει στον κύκλο C , να βρείτε το σημείο ή τα σημεία Z του άξονα x' ώστε να ισχύει $(ZAK) = 1$ τ.μ. (ΓΕΛ ΠΥΛΟΥ 2019)

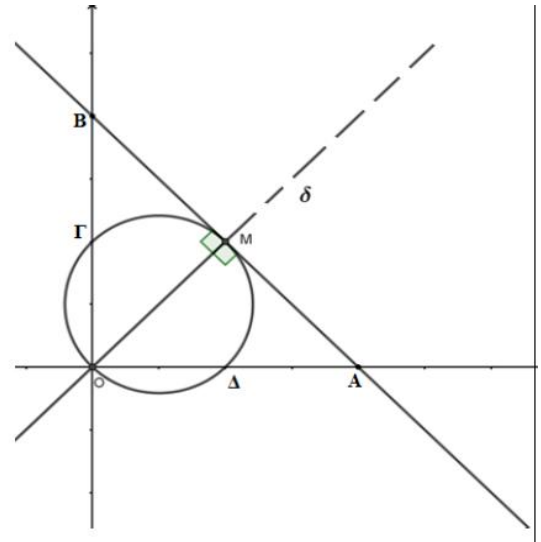
11.96 Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy του διπλανού σχήματος, δίνεται η ευθεία ϵ που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \alpha)$ με $\alpha > 0$.
 Η ευθεία δ διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι κάθετη προς την ευθεία ϵ στο σημείο M .

Αν Γ και Δ τα σημεία τομής του κύκλου με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα OM , με τους ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα, τότε :

- α) Να δείξετε ότι $\delta: y = x$
 β) Να δείξετε ότι $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$

Αν $\alpha = 4$ τότε :

- γ) Να δείξετε ότι η $C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
 δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στα Γ και Δ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη στο Δ είναι παράλληλη με την ευθεία δ και μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AM
 ε) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (O, ρ) που εφάπτεται στην ευθεία (ϵ) .
 (1^ο ΓΕΛ ΑΜΑΡΟΥΣΙΟΥ 2019)



11.97 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\lambda y - 2\lambda + 1 = 0$. (1)

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε τα κέντρο και την ακτίνα
 β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων
 γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1), διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.
 δ) Να βρεθεί ο αριθμός λ ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = x - 3$ να εφάπτεται στον κύκλο
 (2^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2019)