

Ασκήσεις Φυσικής Α τάξης γενικού Λυκείου

Περιεχόμενα

σελίδα

Κεφάλαιο Α: Κινήσεις

A1	Μετατόπιση και διάστημα	3
A1.1	Αριθμητικές εφαρμογές στη μετατόπιση	
A1.2	Διαφορά διαστήματος και μετατόπισης	
A2	Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση	5
A2.1	Αριθμητικές εφαρμογές	
A2.2	Ένα σώμα που κάνει πολλές ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις με διαφορετική ταχύτητα	
A2.3	Μη σημειακά αντικείμενα (όπως τρένα που διέρχονται από μια γέφυρα κτλ)	
A2.4	Δύο κινητά σώματα που ξεκινούν από διαφορετικά σημεία σε διάφορες χρονικές στιγμές.	
A3	Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση	12
A3.1	Αριθμητικές εφαρμογές (απλές, επίλυση δευτεροβάθμιας κτλ)	
A3.2	Συνδυασμοί κινήσεων για ένα σώμα	
A3.3	Περισσότερα σώματα	
A4	Διαγράμματα	19
A4.1	Διαγράμματα ε.ο.κ.	
A4.2	Διαγράμματα ε.ο.μ.κ.	
A4.3	Συνδυασμοί κινήσεων για ένα σώμα	
A4.4	Περισσότερα σώματα	

Κεφάλαιο Β: Δυναμική σε μία διάσταση

B1	Δυνάμεις σε μία διάσταση	28
B1.1	Συνισταμένη δύναμη – Ισορροπία	
B1.2	Ανάλυση δύναμης σε μία διάσταση	
B1.3	Αριθμητικές εφαρμογές στο 2 ^ο νόμο του Νεύτωνα	
B1.4	Διαδοχικές δυνάμεις	
B1.5	Διαφορετικά σώματα	
B2	Βάρος και ελεύθερη πτώση	33
B2.1	Διαφορά βάρους και μάζας	
B2.2	Ελεύθερη πτώση – εφαρμογές	
B2.3	Βολές	
B2.4	Δύο σώματα	

Κεφάλαιο Γ: Δυναμική στο επίπεδο

Γ1	Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα	37
Γ2	Σύνθεση και ανάλυση δυνάμεων. Ισορροπία	39
Γ2.1	Σύνθεση πολλών μη συγγραμμικών δυνάμεων	

	Γ2.2	Ανάλυση δυνάμεων. Σύνθεση δυνάμεων που δε βρίσκονται όλες σε άξονες	
	Γ2.3	Ισορροπία στο επίπεδο – Ισορροπία πολλών σωμάτων	
Γ3		Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα. Τριβή	41
	Γ3.1	Βασικές αριθμητικές εφαρμογές	
	Γ3.2	Τριβή	
	Γ3.3	Περισσότερα του ενός σώματα	
	Γ3.4	Κεκλιμένα επίπεδα και άλλες απαιτητικές ασκήσεις	

Κεφάλαιο Δ: Έργο - Ενέργεια

Δ1		Έργο	61
	Δ1.1	Σταθερή δύναμη	
	Δ1.2	Έργο μεταβλητής δύναμης	
Δ2		Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Διατήρηση μηχανικής ενέργειας. Ισχύς	65
	Δ2.1	Κινητική ενέργεια	
	Δ2.2	Η δυναμική ενέργεια	
	Δ2.3	Θ.μ.κ.ε – α.δ.μ.ε. Βασικές εφαρμογές	
	Δ2.4	Θ.μ.κ.ε. – α.δ.μ.ε. Πολλά σώματα	
	Δ2.5	Θ.μ.κ.ε. – α.δ.μ.ε. Κεκλιμένα επίπεδα	
	Δ2.6	Μεταβλητές δυνάμεις	
	Δ2.7	Ισχύς	

Κεφάλαιο Α

Κινήσεις¹

Α1 Μετατόπιση και διάστημα

Α1.1 Αριθμητικές εφαρμογές στη μετατόπιση

Α1.1.1 Ένα σώμα βρίσκεται αρχικά στη θέση $x_0 = -10m$. Ποια είναι η μετατόπιση του σώματος, αν κάποια επόμενη χρονική στιγμή βρεθεί στη θέση: α) $x = 10m$. β) $x = -10m$. γ) $x = 20m$. δ) $x = -20m$.
(Απ.: α) $20m$. β) 0 . γ) $30m$. δ) $-10m$.)

Α1.1.2 Ένα σώμα βρίσκεται αρχικά στη θέση $x_0 = 10m$. Αν η μετατόπισή του είναι: α) $\Delta x = 10m$. β) $\Delta x = -10m$. γ) $\Delta x = 20m$. δ) $\Delta x = -20m$, να βρείτε την τελική θέση του σώματος.
(Απ.: α) $x = 20m$. β) $x = 0$. γ) $x = 30m$. δ) $x = -10m$.)

Α1.1.3 Ένα σώμα έχει μονίμως θετικές θέσεις. Οι μετατοπίσεις του θα είναι θετικές απαραίτητα; Αν έχει μονίμως αρνητικές θέσεις, οι μετατοπίσεις του θα είναι αρνητικές απαραίτητα;
(Απ.: Όχι και στα δύο.)

Α1.2 Διαφορά διαστήματος και μετατόπισης

Μεθοδολογικά σχόλια: Η μετατόπιση είναι το πόσο μετατοπίστηκε το κινητό, όπως λέει και η ίδια η λέξη, δηλαδή η τελική θέση, μείον την αρχική θέση. Δε μας ενδιαφέρει αν το κινητό μετέβη από την αρχική στην τελική θέση κινούμενο προς μία κατεύθυνση και ευθύγραμμα, ή αν ακολούθησε μια τεθλασμένη, ή οσοδήποτε πολύπλοκη διαδρομή. Το διάστημα είναι το συνολικό μήκος της τροχιάς, δηλαδή το πόσα μέτρα ή χιλιόμετρα διήνυσε το κινητό, άσχετο αν επιστρέφει στο ίδιο σημείο ή όχι, αν κινείται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά. Στο διάστημα μας ενδιαφέρει η ακριβής διαδρομή που ακολούθησε το κινητό. Το πρώτο φυσικό μέγεθος μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν και είναι διανυσματικό μέγεθος. Το διάστημα, εφόσον το κινητό κινείται και δεν παραμένει ακίνητο, είναι πάντα θετικό και είναι μονόμετρο μέγεθος.

Α1.2.1 Ένα σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 20m$, όπου έχουμε ορίσει θετική φορά την προς τα δεξιά. Το σώμα μετακινείται πέντε μέτρα αριστερά α)

¹ Δημιουργία υλικού: Αθανάσιος Πρίκας, φυσικός, διδάκτωρ Φυσικής. E-mail: athanasios_prikas@yahoo.gr

κινούμενο διαρκώς, β) με μια ενδιάμεση στάση στα δύο μέτρα από την αφετηρία του. Ποια είναι η τελική του θέση, το διάστημα και η μετατόπισή του;

(Απ.: Και στις δύο περιπτώσεις $x = 25m$, $\Delta x = 5m$, $S = 5m$.)

A1.2.2 Ένα σώμα ξεκινά από τη θέση $x_0 = 20m$ και μετακινείται δεκαπέντε μέτρα δεξιά, σταματά στιγμιαία και κατόπιν μετακινείται 10 μέτρα αριστερά. Θετική φορά έχει οριστεί προς τα δεξιά. Ποια είναι η τελική του θέση, η μετατόπισή του και το διάστημα που διήνυσε;

(Απ.: $x = 25m$, $\Delta x = 5m$, $S = 25m$.)

A1.2.3 Ένα σώμα ξεκινά από τη θέση $x_0 = 20m$ και μετακινείται δεκαπέντε μέτρα αριστερά, σταματά στιγμιαία και κατόπιν μετακινείται δέκα μέτρα δεξιά. Θετική φορά έχει οριστεί η προς τα δεξιά. Ποια είναι η τελική του θέση, η μετατόπισή του και το διάστημα που διήνυσε; Συγκρίνετε αυτό το πρόβλημα με προηγούμενα και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

(Απ.: $x = 15m$, $\Delta x = -5m$, $S = 25m$.)

A1.2.4 Ένα σώμα ξεκινά από την Αθήνα, μετά από κάποιες ώρες φτάνει στη Θεσσαλονίκη έχοντας διανύσει περίπου 510 χιλιόμετρα και σε μια επόμενη μέρα επιστρέφει στην Αθήνα α) από την ίδια διαδρομή διανύοντας και πάλι απόσταση 510 χιλιομέτρων, β) από διαφορετική διαδρομή διανύοντας απόσταση 590 χιλιομέτρων. Να βρείτε κατά περίπτωση τη μετατόπισή του, από τη στιγμή που έφυγε από την Αθήνα μέχρι να επιστρέψει, και το διάστημα που διήνυσε.

(Απ.: Και στις δύο περιπτώσεις η μετατόπισή του είναι μηδέν, ενώ το διάστημα που διήνυσε, στην πρώτη περίπτωση είναι 1020 χιλιόμετρα και στη δεύτερη 1100 χιλιόμετρα.)

A1.2.5 Ένα σώμα μετακινείται σε ένα κυκλικό στάδιο, διαγράφοντας κύκλους ακτίνας $30m$. Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος και το συνολικό διάστημα που έχει διανύσει όταν έχει διαγράψει N κύκλους.

(Απ.: $\Delta x = 0$, $S = N2\pi R$.)

A1.2.6 Αν γνωρίζουμε την αρχική και την τελική θέση ενός κινητού, $x_{αρχ.}$ και $x_{τελ.}$, μπορούμε να βρούμε τη μετατόπιση του κινητού; Μπορούμε να βρούμε το διάστημά του; Υπό ποιες προϋποθέσεις;

(Απ.: Μπορούμε να βρούμε τη μετατόπιση $\Delta x = x_{τελ.} - x_{αρχ.}$. Το διάστημα μπορούμε να το βρούμε μόνο αν το κινητό δεν αλλάζει φορά κίνησης.)

A1.2.7 Ένα σώμα κάνει τις εξής διαδοχικές κινήσεις: Μία με μετατόπιση Δx_1 σε χρόνο Δt_1 και μία με μετατόπιση Δx_2 σε χρόνο Δt_2 . α) Μπορείτε να βρείτε τη συνολική μετατόπιση του σώματος; β) Μπορείτε να βρείτε το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα; Υπάρχουν κάποιες προϋποθέσεις για την απάντηση στα ερωτήματα αυτά;

(Απ.: α) Η μετατόπιση είναι πάντα το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους μετατοπίσεων. β) Το διάστημα δεν μπορούμε να το βρούμε. Για να το βρούμε, θα πρέπει να ξέρουμε ότι κατά τη διάρκεια των επιμέρους χρονικών διαστημάτων το σώμα δεν αλλάζει κατεύθυνση κίνησης.)

A2 Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

A2.1 Αριθμητικές εφαρμογές

A2.1.1 Ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα 20m/s . α) Σε πόσο χρόνο το σώμα διανύει απόσταση 100 μέτρων; β) Ποια θα έπρεπε να είναι η ταχύτητα του σώματος ώστε να καλύψει την παραπάνω απόσταση σε ένα δευτερόλεπτο; γ) Ποια απόσταση έχει διανύσει το σώμα σε χρόνο τριών δευτερολέπτων; δ) Ποια απόσταση διανύει το σώμα στη διάρκεια του $29^{\text{ου}}$ δευτερολέπτου αν υποθεθεί ότι η ταχύτητά του είναι σταθερή; ε) Ποια απόσταση διανύει το σώμα στη διάρκεια του $13^{\text{ου}}$ δευτερολέπτου; στ) Ποια απόσταση διανύει το σώμα από τη χρονική στιγμή των δέκα δευτερολέπτων μέχρι τη χρονική στιγμή των 14 δευτερολέπτων; ζ) Υπάρχει διαφορά ανάμεσα στη μετατόπιση και στο διάστημα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω ερωτήσεις;

(Απ.: α) $t = 5\text{s}$. β) $v = 100\text{m/s}$. γ) $\Delta x = 60\text{m}$. δ) $\Delta x = 20\text{m}$. ε) $\Delta x = 20\text{m}$. στ) $\Delta x = 80\text{m}$. ζ) Σε καμιά από τις παραπάνω ερωτήσεις δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στη μετατόπιση και στο διάστημα που διανύει το σώμα, αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη και ομαλή.)

A2.1.2 Υπάρχει περίπτωση το μέτρο της ταχύτητας ενός σώματος να είναι σταθερό, αλλά το σώμα να μην εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση; Να αναφέρετε παραδείγματα για να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

A2.2 Ένα σώμα που κάνει πολλές ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις με διαφορετική ταχύτητα²

A2.2.1 Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $v_1 = 10\text{m/s}$ για χρόνο $t_1 = 5\text{s}$ και με ταχύτητα $v_2 = 20\text{m/s}$ για χρόνο $t_2 = 5\text{s}$, προς την ίδια κατεύθυνση. Να βρεθούν: α) Η συνολική μετατόπιση του σώματος. β) Το διάστημα που διανύει το

² Εκείνο που δεν έχω καταλάβει, είναι γιατί, ενώ θα πρέπει τα παιδιά αυτής της ηλικίας να ασχοληθούν με τη μετατόπιση, να μην ασχοληθούν όμως με τη μέση «διανυσματική» ταχύτητα όπως την αναφέρει το σχολικό εγχειρίδιο. Αντίθετα όμως θα πρέπει να ασχοληθούν με τη μέση αριθμητική ταχύτητα, γιατί υποτίθεται ότι είναι ευκολότερη. Από πού κι ως πού είναι ευκολότερη η μέση αριθμητική ταχύτητα, την οποία αποκαλεί το εγχειρίδιο απλά μέση ταχύτητα; Και αν είναι όντως ευκολότερη, γιατί οι εξισώσεις δίνουν κατ' ευθείαν τη μετατόπιση του κινητού, από την οποία θα προέκυπτε η μέση «διανυσματική» ταχύτητα και όχι το διάστημά του, από το οποίο προκύπτει η μέση αριθμητική ταχύτητα; Ας κοιτάξουμε μία προς μία τις ασκήσεις στις οποίες ζητείται συνολικό διάστημα και συνολική μετατόπιση. Τί είναι πιο εύκολο να βρεθεί, η συνολική μετατόπιση, ή το συνολικό διάστημα, στο οποίο θα πρέπει να αθροίζουμε απόλυτες τιμές μετατοπίσεων, ανάλογα με το αν το κινητό αλλάζει φορά κίνησης; Ας σκεφτούμε, εμείς οι διδάσκοντες μόνον, την ολοκληρωτική (με τη μορφή ολοκληρωμάτων) γραφή της μετατόπισης και του διαστήματος, να διαπιστώσουμε ότι πολύ πιθανό τη δεύτερη να μη τη θυμόμαστε καν, για να πείσουμε εαυτούς και αλλήλους ότι η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι σαφώς δυσκολότερο μέγεθος από τη μέση «διανυσματική» ταχύτητα. Είναι τυχαίο μήπως που όλα συγγράμματα Φυσικής, έγκυρης Φυσικής, μου έρχονται στο νου, όλα αναφέρονται μόνο στη «διανυσματική» μέση ταχύτητα; Και για να εξηγήσουμε τα εισαγωγικά, οφείλονται στο ότι τα παραπάνω βιβλία Φυσικής αναφέρουν την αποκαλούμενη μέση «διανυσματική» ταχύτητα ως μέση ταχύτητα απλά. Διότι αυτή είναι ο μέσος όρος της ταχύτητας (ας θυμηθούμε πώς με ολοκληρώματα υπολογίζουμε τη μέση τιμή μιας συνάρτησης, και θα πειστούμε).

σώμα. γ) Η μέση ταχύτητά του. Έχετε κάτι να σχολιάσετε για τη σχέση της μέσης ταχύτητας του σώματος με τις τιμές των ταχυτήτων v_1 και v_2 ;

(Απ.: α) $\Delta x = 150m$. β) $S = 150m$. γ) $v_\mu = 15m/s$. Η μέση ταχύτητα είναι ο μέσος όρος των ταχυτήτων των δύο σωμάτων. Αλλά αυτό έτυχε, και ο λόγος είναι ότι οι δύο κινήσεις γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Θα δούμε στα επόμενα προβλήματα ότι αυτό γενικά δεν ισχύει.)

A2.2.2 Ένα σώμα κινείται περίπου όπως το σώμα του προηγούμενου προβλήματος με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10m/s$ για χρόνο $t_1 = 5s$ προς τα δεξιά και με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 20m/s$ πάλι για χρόνο $t_2 = 5s$, αυτή τη φορά όμως προς τα αριστερά. Να βρεθούν: α) Η συνολική του μετατόπιση. β) Το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα. γ) Η μέση ταχύτητά του. δ) Σε αυτό το πρόβλημα συμπίπτει η μέση ταχύτητα του σώματος με το μέσο όρο των ταχυτήτων του;

(Απ.: α) $\Delta x = -50m$. β) $S = 150m$. γ) $v_\mu = 15m/s$. δ) Δε συμπίπτει. Διότι η μία ταχύτητα είναι θετική και η άλλη αρνητική. Τυχαίνει ο μέσος όρος των μέτρων των ταχυτήτων να είναι ίσος με τη μέση ταχύτητα.)

A2.2.3 Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $v_1 = 10m/s$ για χρόνο $t_1 = 5s$ και με ταχύτητα $v_2 = 20m/s$ για χρόνο $t_2 = 2,5s$, προς την ίδια κατεύθυνση. Να βρεθούν: α) Η συνολική μετατόπιση του σώματος. β) Το διάστημα που διανύει το σώμα. γ) Η μέση ταχύτητά του. Έχετε κάτι να σχολιάσετε για τη σχέση της μέσης ταχύτητας του σώματος με τις τιμές των ταχυτήτων v_1 και v_2 ;

(Απ.: α) $\Delta x = 100m$. β) $S = 100m$. γ) $v_\mu = \frac{40}{3} m/s = 13,3m/s$. Όπως έχουμε πει ο μέσος όρος των ταχυτήτων και η μέση ταχύτητα σπανίως έχουν κάποια μεταξύ τους σχέση.)

A2.2.4 Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10m/s$ προς κάποια κατεύθυνση για χρόνο $t_1 = 5s$ και με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 20m/s$ για χρόνο $t_2 = 2,5s$ προς την αντίθετη κατεύθυνση. Να βρεθούν: α) Η συνολική μετατόπιση του σώματος. β) Το διάστημα που αυτό διανύει. γ) Η μέση ταχύτητά του.

(Απ.: α) $\Delta x = 0$. β) $S = 100m$. γ) $v_\mu = \frac{40}{3} m/s = 13,3m/s$.)

A2.2.5 Ένα σώμα έχει να διανύσει μια απόσταση συνολικά διακοσίων μέτρων σε σταθερή κατεύθυνση. Τα πρώτα 100 μέτρα το σώμα τα διανύει με ταχύτητα $v_1 = 10m/s$ και τα επόμενα 100 μέτρα τα διανύει με ταχύτητα $v_2 = 20m/s$. Να βρεθεί: α) Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να διανύσει αυτή την απόσταση. β) Η μέση ταχύτητα του σώματος.

(Απ.: α) $t = 15s$. β) $v_\mu = \frac{40}{3} m/s = 13,3m/s$.)

A2.2.6 Ένας ασυνείδητος οδηγός έχει αποφασίσει να διανύσει μια απόσταση πεντακοσίων χιλιομέτρων (Αθήνας και κάποια επαρχιακής πόλης ειδικότερα) σε τέσσερις ώρες. α) Να βρείτε τη μέση ταχύτητά του, αν επιτύχει αυτή την απόδοση. β) Ο οδηγός όσο βρίσκεται κοντά στην Αθήνα οδηγεί μόνο με μια

ταχύτητα 100 χιλιομέτρων ανά ώρα, για δύο ώρες, μέχρι να βρεθεί εκτός της πυκνής κυκλοφορίας της πρωτεύουσας. Ποια θα πρέπει να είναι η ταχύτητα του οδηγού για να διανύσει την απόσταση που απέμεινε και να βρίσκεται σε πέντε συνολικά ώρες στον προορισμό του; Δικαιολογείται ο χαρακτηρισμός του ασυνείδητου που δώσαμε για τον οδηγό;

(Απ.: α) $v_{\mu} = 125 \text{ Km/h}$. β) $v_{\mu} = 150 \text{ Km/h}$.)

A2.2.7 Ένα κινητό πρέπει να καλύψει την απόσταση Αθήνα – Θεσσαλονίκη (500 χιλιόμετρα) σε πέντε ώρες. Τα πρώτα 200 χιλιόμετρα τα διανύει με ταχύτητα 85 Km/h. Ποια θα πρέπει να είναι η ταχύτητά του τα επόμενα χιλιόμετρα ώστε να φτάσει έγκαιρα στον προορισμό του;

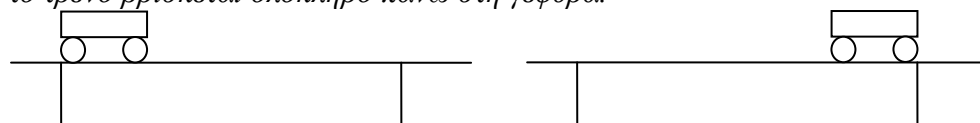
(Απ.: 110 Km/h.)

A2.2.8 Ένα σώμα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα 100 χιλιομέτρων την ώρα για τέσσερις ώρες και μετά επιστρέφει από την ίδια διαδρομή με ταχύτητα 80 χιλιομέτρων. Να βρεθούν: α) Ο συνολικός χρόνος κίνησης. β) Η συνολική μετατόπιση του κινητού. γ) Το συνολικό διάστημα που διήνυσε το κινητό. δ) Η μέση ταχύτητά του.

(Απ.: α) $t = 9 \text{ h}$. β) 0 . γ) $S = 800 \text{ Km}$. δ) $v_{\mu} = \frac{800}{9} \text{ Km/h}$.)

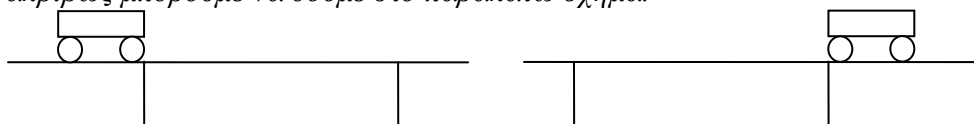
A2.3 Μη σημειακά αντικείμενα (όπως τρένα που διέρχονται από μια γέφυρα κτλ)

Μεθοδολογικά σχόλια: Σε αυτά τα προβλήματα το σχήμα είναι παραπάνω από χρήσιμο. Πρέπει να σχεδιάσουμε τη σήραγγα ή τη γέφυρα, όχι με καλλιτεχνικές λεπτομέρειες, ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο θα παριστάνει τη γέφυρα ή τη σήραγγα αρκεί. Θα πρέπει επίσης να σχεδιάσουμε και το μη σημειακό αντικείμενο, όπως το τρένο, σαν ένα μακρόστενο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, χωρίς επίσης πολλές καλλιτεχνίες, όπως και στα περισσότερα προβλήματα φυσικής, γιατί αυτές δεν κάνουν κάτι άλλο πέρα από το να αποπροσανατολίζουν από το συγκεκριμένο εκάστοτε πρόβλημα. Θα σχεδιάζουμε διάφορα στιγμιότυπα του σώματος που κινείται, ανάλογα με την εκφώνηση της άσκησης. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε ολόκληρο το τρένο να βρίσκεται πάνω στη γέφυρα, το πρώτο στιγμιότυπο θα είναι όταν ολόκληρο το τρένο έχει εισέλθει σε αυτή, και το δεύτερο στιγμιότυπο όταν το μπροστινό μέρος του τρένου έχει φτάσει στην άλλη άκρη της γέφυρας. Νομίζουμε ότι είναι προφανές πως η μετατόπιση που έχει διανυθεί ανάμεσα στα δύο στιγμιότυπα είναι το μήκος της γέφυρας, μείον το μήκος του τρένου. Εν ανάγκη, κόψτε το χαρτί στο παρακάτω σχήμα, και μετρώντας, βρείτε το μήκος της διαδρομής που έχει διανυθεί. Και στα δύο στιγμιότυπα το τρένο βρίσκεται ολόκληρο πάνω στη γέφυρα.



Σε περίπτωση που μας ζητηθεί να βρούμε το χρονικό διάστημα που έστω και ένα μικρό μέρος του σώματος βρίσκεται πάνω στη γέφυρα (ή μέσα στη σήραγγα), σαν πρώτο στιγμιότυπο θα σχεδιάσουμε όταν το μπροστινό μέρος του τρένου μόλις έχει εισέλθει στη γέφυρα και σαν δεύτερο στιγμιότυπο όταν το πίσω μέρος του τρένου μόλις έχει εγκαταλείψει τη γέφυρα. Είναι νομίζουμε προφανές σε μια τέτοια περίπτωση ότι η

συνολική μετατόπιση είναι όσο το μήκος της γέφυρας συν το μήκος του τρένου. Αυτό ακριβώς μπορούμε να δούμε στο παρακάτω σχήμα.



Σε όλες πάντως τις υπόλοιπες κατηγορίες ασκήσεων θεωρούμε τα κινητά σαν υλικά σημεία. Αν δηλαδή ζωγραφίσουμε στις υπόλοιπες περιπτώσεις ένα εκτεταμένο κινητό σώμα, θα δυσκολευτούμε στην αξιοποίηση του σχήματος. Σε αυτής της κατηγορίας τις ασκήσεις πρέπει υποχρεωτικά τα σώματα να είναι εκτεταμένα σε διαστάσεις.

A2.3.1 Ένα τρένο έχει μήκος 100 μέτρων και πρόκειται να διέλθει από μια γέφυρα μήκους 300 μέτρων με σταθερή ταχύτητα 72 χιλιομέτρων την ώρα. Να βρεθούν οι χρόνοι για τους οποίους: α) Ολόκληρο το τρένο βρίσκεται πάνω στη γέφυρα. β) Ένα οποιοδήποτε τμήμα του τρένου βρίσκεται πάνω στη γέφυρα. γ) Χρειάζεται ένα οποιοδήποτε σημείο του τρένου, για παράδειγμα το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο μηχανοδηγός, για να διανύσει τη γέφυρα.

(Απ.: α) 10s . β) 20s . γ) 15s .)

A2.3.2 Μία αμαξοστοιχία έχει μήκος 50 μέτρα και διανύει μια σήραγγα μήκους 1000 μέτρων κινούμενη με ταχύτητα 25m/s . α) Για πόσο χρόνο η αμαξοστοιχία βρίσκεται ολόκληρη μέσα στη σήραγγα; (χωρίς να φαίνεται καθόλου). β) Για πόσο χρόνο παραμένει κρυμμένο μέσα στη σήραγγα έστω και ένα μικρό τμήμα της αμαξοστοιχίας;

(Απ.: α) 38s . β) 42s .)

A2.4 Δύο κινητά σώματα που ξεκινούν από διαφορετικά σημεία σε διάφορες χρονικές στιγμές.

A2.4.1 Ένα σώμα ξεκινά τη χρονική στιγμή t_0 , που δεν είναι απαραίτητα μηδέν από κάποια αρχική θέση x_0 . Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα v . Να γραφούν οι εξισώσεις που δίνουν τη μετατόπιση του σώματος και τη θέση του συναρτήσει του χρόνου.

(Απ.: $\Delta x = v(t - t_0)$, $x = x_0 + v(t - t_0)$.)

A2.4.2 Δύο σώματα ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο και κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 3\text{m/s}$ και $v_2 = 5\text{m/s}$. Να βρεθούν η απόσταση των δύο σωμάτων συναρτήσει του χρόνου και η απόστασή τους τη χρονική στιγμή $t = 10\text{s}$.

(Απ.: Σε αυτά τα προβλήματα ένα σχήμα είναι χρήσιμο. Αν δυσκολευόμαστε, ζωγραφίζουμε με διαφορετικά χρώματα κάθε κινητό. Τα κινητά σώματα τα θεωρούμε υλικά σημεία, που σημαίνει ότι δε ζωγραφίζουμε ένα μεγάλο σε διαστάσεις σώμα, αλλά μια κουκκίδα, εμφανή μεν, αλλά περιορισμένη σε μέγεθος, για να μη δυσκολευόμαστε στην εύρεση των αποστάσεων που ζητούνται. $d = 2t$, $d = 20\text{m}$.)

A2.4.3 Δύο σώματα ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο και κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες $v_1 = 3\text{m/s}$ και $v_2 = 5\text{m/s}$. Να

βρεθούν η απόσταση των δύο σωμάτων συναρτήσει του χρόνου και η απόστασή τους τη χρονική στιγμή $t = 10s$.

(Απ.: $d = 8t$, $d = 80m$.)

A2.4.4 Δύο κινητά έχουν ταχύτητες $v_1 = 15m/s$ και $v_2 = 5m/s$. Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση μετά από χρόνο $5s$ αν: α) Τα δύο σώματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή και οι ταχύτητες είναι ομόρροπες. β) Αν τα δύο σώματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο την ίδια στιγμή και οι ταχύτητες είναι αντίρροπες. γ) Αν τα δύο σώματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο με ομόρροπες ταχύτητες, αλλά το 1ο ξεκινά δύο δευτερόλεπτα αργότερα από το 2ο. δ) Αν τα δύο σώματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο με ομόρροπες ταχύτητες αλλά το 2ο ξεκινά δύο δευτερόλεπτα αργότερα από το 1ο. Ποιο σώμα βρίσκεται μπροστά και ποιο βρίσκεται πίσω σε κάθε περίπτωση;

(Απ.: α) $50m$. β) $100m$. γ) $20m$. δ) $60m$.)

A2.4.5 Δύο σώματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο και κινούνται στην ίδια κατεύθυνση με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 3m/s$ και $v_2 = 5m/s$. Το δεύτερο όμως σώμα ξεκινά αργότερα κατά δύο δευτερόλεπτα από το πρώτο. Να βρεθούν: α) Η απόσταση των δύο σωμάτων συναρτήσει του χρόνου. β) Η απόστασή τους τη χρονική στιγμή $t = 10s$. γ) Η χρονική στιγμή κατά την οποία τα κινητά συναντώνται.

(Απ.: α) Εφόσον ξεκίνησαν από το ίδιο σημείο η απόστασή τους είναι: $\Delta x_1 = 3t$, μέχρι να ξεκινήσει και το δεύτερο κινητό, και αφού ξεκινήσει και το δεύτερο κινητό, δηλαδή μετά τη χρονική στιγμή των δύο δευτερολέπτων: $\Delta x_1 - \Delta x_2 = -2t + 10$ (S.I.). β) $\Delta x_1 - \Delta x_2 = -10m$ που σημαίνει ότι το δεύτερο κινητό προπορεύεται. Μπορείτε αντί του $\Delta x_1 - \Delta x_2$ να χρησιμοποιήσετε για την απόσταση των δύο κινητών το $\Delta x_2 - \Delta x_1$ ή την απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο μετατοπίσεων. γ) $t = 5s$.)

A2.4.6 Δύο σώματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο και κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 3m/s$ και $v_2 = 5m/s$. Το δεύτερο όμως σώμα ξεκινά αργότερα κατά δύο δευτερόλεπτα από το πρώτο. Να βρεθούν: α) Η απόσταση των δύο σωμάτων συναρτήσει του χρόνου. β) Η απόστασή τους τη χρονική στιγμή $t = 10s$. γ) Υπάρχει περίπτωση να συναντηθούν τα δύο κινητά και γιατί;

(Απ.: α) Εφόσον ξεκίνησαν από το ίδιο σημείο η απόστασή τους είναι: $\Delta x_1 = 3t$, μέχρι να ξεκινήσει και το δεύτερο κινητό, και αφού ξεκινήσει και το δεύτερο, δηλαδή μετά από το χρόνο των δύο δευτερολέπτων, η απόστασή τους δίνεται από τη σχέση: $|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 8t - 10$ (S.I.). β) $|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 70m$. γ) Προφανώς δεν υπάρχει περίπτωση να συναντηθούν τα κινητά, αφού κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.)

A2.4.7 Δύο σώματα έχουν αρχική μεταξύ τους απόσταση $100m$ και ξεκινούν ταυτόχρονα με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 3m/s$ και $v_2 = 5m/s$, κινούμενα προς την ίδια κατεύθυνση. Να βρεθεί η απόστασή τους συναρτήσει του χρόνου, αν α) δεξιότερα βρίσκεται το πρώτο κινητό, β) δεξιότερα βρίσκεται το δεύτερο κινητό. γ) Υπάρχει περίπτωση να συναντηθούν τα δύο σώματα; Πότε μπορεί αυτό να συμβεί;

(Απ.: α) $d = 100 - 2t$. (S.I.). β) $d = 100 + 2t$. (S.I.). γ) Μόνο στην πρώτη περίπτωση που η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται με το χρόνο. Συναντώνται για $t = 50s$.)

A2.4.8 Δύο σώματα έχουν αρχική μεταξύ τους απόσταση $100m$ και ξεκινούν ταυτόχρονα με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 3m/s$ και $v_2 = 5m/s$, κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις. Να βρεθεί η απόστασή τους συναρτήσει του χρόνου, αν το σώμα που βρίσκεται αριστερά κινείται με κατεύθυνση προς τα αριστερά και το σώμα που βρίσκεται δεξιά κινείται με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Υπάρχει περίπτωση να συναντηθούν τα δύο σώματα; Γιατί; Έχει σημασία ποιο από τα δύο σώματα βρίσκεται αριστερά και ποιο δεξιά;

(Απ.: $d = 100 + 8t$. (S.I.). Για να απαντήσουμε στα υπόλοιπα ερωτήματα, ή θα κάνουμε ένα σχεδιάγραμμα ή θα θεωρήσουμε δύο μικρά σώματα, δύο χαρτάκια, δύο συνδετήρες ή οτιδήποτε μικρό, ώστε να καταλάβουμε την κίνησή τους και το γιατί η απόστασή τους αυξάνεται με το χρόνο.)

A2.4.9 Δύο κινητά που κινούνται με ταχύτητες 4 και $6 m/s$ αντίστοιχα βρίσκονται σε μεταξύ του απόσταση 100 μέτρων. Σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν αν α) κινούνται ομόρροπα, β) κινούνται αντίρροπα.

(Απάντηση: α) $50s$. β) $10s$.)

A2.4.10 Δύο σώματα απέχουν 150 μέτρα και κινούνται το ένα προς το άλλο με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 2m/s$ και $v_2 = 3m/s$. Τα δύο σώματα έχουν ξεκινήσει ταυτόχρονα. α) Ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν; β) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει το κάθε σώμα τότε;

(Απ.: α) $t = 30s$. β) Τα μέτρα των μετατοπίσεων είναι: $\Delta x_1 = 60m$, $\Delta x_2 = 90m$.)

A2.4.11 Πόσα δευτερόλεπτα αργότερα θα έπρεπε να είχε ξεκινήσει το δεύτερο σώμα από τον πρώτο, στο προηγούμενο πρόβλημα, ώστε η συνάντηση να γίνει στο μέσο της απόστασης των δύο σωμάτων;

(Απ.: $12,5s$.)

A2.4.12 Δύο σώματα απέχουν 150 μέτρα και ξεκινούν ταυτόχρονα να κινούνται με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 2m/s$ και $v_2 = 3m/s$, προς την ίδια κατεύθυνση (έστω προς τα δεξιά). α) Ποιο σώμα πρέπει να βρίσκεται δεξιότερα για να συναντηθούν, και ποιο αριστερά; β) Ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν; γ) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει το κάθε σώμα τότε;

(Απ.: α) Αφού κινούνται και τα δύο σώματα προς τα δεξιά, έπεται ότι το προπορευόμενο πρέπει να είναι το αργό, δηλαδή αυτό που κινείται με $v_1 = 2m/s$. β) $t = 150s$. γ) $\Delta x_1 = 300m$, $\Delta x_2 = 450m$.)

A2.4.13 Δύο σώματα που απέχουν 150 μέτρα κινούνται με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 2m/s$ και $v_2 = 3m/s$, προς την ίδια κατεύθυνση (έστω προς τα δεξιά). Να βρείτε το χρόνο συνάντησης και την απόσταση που θα έχει διανύσει κάθε σώμα, αν προπορεύεται το αργότερο από τα δύο σώματα και: α) Καθυστερεί κατά $20s$ το αργότερο στην εκκίνησή του. β) Καθυστερεί κατά $20s$ το ταχύτερο στην εκκίνησή του.

(Απ.: α) $t = 110s$, $\Delta x_2 = 330m$, $\Delta x_1 = v_1(t - t_0) = 180m$. β) $t = 210s$, $\Delta x_2 = 570m$, $\Delta x_1 = 420m$.)

A2.4.14 Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $20m/s$. 50 μέτρα πίσω από αυτό βρίσκεται δεύτερο αυτοκίνητο που κινείται επίσης με σταθερή ταχύτητα. Πόση πρέπει να είναι αυτή ώστε το δεύτερο αυτοκίνητο σε χρόνο δέκα δευτερολέπτων να προσπεράσει το πρώτο και να βρεθεί μπροστά από αυτό κατά πενήντα μέτρα;

(Απ.: $30m/s$.)

A2.4.15 Ένα τρένο κινείται με ταχύτητα $21m/s$ και έχει μήκος $100m$. Κάτω από το τρένο βρίσκεται ένας περιπατητής ο οποίος κινείται με ταχύτητα $1m/s$. Το τρένο και ο περιπατητής ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή με τον περιπατητή και το μπροστινό μέρος του τρένου να βρίσκονται στην ίδια αφετηρία. Σε ποια χρονική στιγμή ο περιπατητής θα βρεθεί στο ίδιο σημείο με το πίσω μέρος του τρένου;

(Απ.: $t = 5s$.)

A2.4.16 Ένα λεωφορείο με μήκος $l_1 = 20m$ βρίσκεται σε εθνική οδό (με αρκετές λωρίδες κυκλοφορίας) και κινείται με $v_1 = 20m/s$. Σε παρακείμενη λωρίδα βρίσκεται αυτοκίνητο με μήκος $l_2 = 4m$, το οποίο κινείται με $v_2 = 30m/s$. Το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου βρίσκεται $40m$ πριν από το πίσω μέρος του λεωφορείου. α) Ποια χρονική στιγμή το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου θα φτάσει στο πίσω μέρος του λεωφορείου; β) Ποια χρονική στιγμή το πίσω μέρος του αυτοκινήτου θα βρίσκεται ακριβώς μπροστά από το μπροστινό μέρος του λεωφορείου;

(Απ.: α) $4s$. β) $6,4s$.)

A3 Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

A3.1 Αριθμητικές εφαρμογές (απλές, επίλυση δευτεροβάθμιας κτλ)

Μεθοδολογικά σχόλια: Αν v_0 και a είναι ομόρροπα, δηλαδή με το ίδιο πρόσημο, τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι $v = v_0 + at$, $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, και η κίνηση είναι σίγουρα επιταχυνόμενη. Αν v_0 και a είναι αντίρροπα δηλαδή με διαφορετικά πρόσημα, τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι $v = v_0 - |a|t$, $\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} |a|t^2$, και η κίνηση είναι αρχικά επιβραδυνόμενη, για όσο χρονικό διάστημα δηλαδή η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος έχουν αντίθετα πρόσημα. Σε κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητα του σώματος θα μηδενιστεί και, αν αυτό εξακολουθήσει να υπακούει στις ίδιες εξισώσεις κίνησης, τότε κανονικά η ταχύτητά του θα αποκτήσει το πρόσημο της επιτάχυνσης και η κίνηση θα γίνει ξανά επιταχυνόμενη. Θα δούμε τέτοιες περιπτώσεις μέσα από αρκετές ασκήσεις, αλλά προς το παρόν ας σκεφτούμε την απλούστερη πιθανή περίπτωση: Όταν πετάμε ένα σώμα προς τα πάνω, τότε αρχικά η κίνησή του είναι επιβραδυνόμενη, μέχρι να σταματήσει, οπότε και πάλι το σώμα επιταχύνεται προς τα κάτω.

A3.1.1 Παρατηρούμε ότι ένα σώμα που εκτελεί ε.ο.μ.κ. (ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση) έχει ταχύτητα μέτρου 10m/s με κατεύθυνση προς τα δεξιά, και μετά από τρία δευτερόλεπτα η ταχύτητά του έχει μέτρο 20m/s προς τα αριστερά. Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της επιτάχυνσης του σώματος. Είναι επιβραδυνόμενη η κίνηση ή επιταχυνόμενη;

(Απ.: $a = 10\text{m/s}^2$ με κατεύθυνση προς τα αριστερά. Η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη μέχρι τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται και επιταχυνόμενη από αυτή τη χρονική και μετά. Θυμίζουμε, προς αποφυγή ενός συνήθους λάθους ότι επιβραδυνόμενη δε λέμε την κίνηση στην οποία η επιτάχυνση είναι αρνητική. Απολύτως εσφαλμένο. Επιταχυνόμενη είναι η κίνηση στην οποία v και a έχουν τα ίδια πρόσημα, και επιβράδυνση η κίνηση στην οποία v και a έχουν αντίθετα πρόσημα. Παράδειγμα: Μπορούμε να θεωρήσουμε την προς τα δεξιά φορά θετική. Αν ένα όχημα κινείται προς τα αριστερά και ταυτόχρονα ο οδηγός του πατάει γκάζι, τότε, εφόσον ο οδηγός πατάει γκάζι, θα είναι παράλογο να ονομάσουμε την κίνηση επιβραδυνόμενη, επειδή το a είναι προς τα αριστερά, δηλαδή αρνητικό. Σε αυτή την περίπτωση, όπως είπαμε λίγο παραπάνω, η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, διότι και η v και η a είναι ομόσημες, δηλαδή αρνητικές, αφού κατευθύνονται προς τα αριστερά.)

A3.1.2 Για ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση τιμής a : α) να λύσετε την εξίσωση της ταχύτητας ως προς το χρόνο, όταν η τελική ταχύτητα του σώματος είναι v (χωρίς

αριθμούς). β) Να αντικαταστήσετε το χρόνο που βρήκατε στην εξίσωση της μετατόπισης.

$$(Απ.: α) t = \frac{v - v_0}{a} . β) \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} .)$$

A3.1.3 Για ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ισχύει: $v_0 = 4m/s$, $a = 2m/s^2$. Να βρείτε: α) Την ταχύτητα και τη μετατόπιση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 1s$. β) Τη χρονική στιγμή στην οποία η ταχύτητα του σώματος γίνεται $10m/s$ και τη μετατόπισή του τότε. γ) Τη χρονική στιγμή που η μετατόπιση του σώματος είναι $12m$ και την ταχύτητα που έχει τότε. δ) Τη μετατόπιση του σώματος στο 1° , 2° , 3° , νιοστό δευτερόλεπτο της κίνησής του. ε) Τη μετατόπιση του σώματος από τη στιγμή $3s$ ως τη στιγμή $6s$ και τη μεταβολή της ταχύτητάς του για αυτό το χρονικό διάστημα. στ) Τη μέση ταχύτητα του σώματος για το 1° , 2° , 3° , νιοστό δευτερόλεπτο της κίνησής του. ζ) Τη μέση ταχύτητα του σώματος από την αρχή της κίνησης μέχρι η ταχύτητά του να γίνει $16m/s$.

(Απ.: α) $v = 6m/s$, $\Delta x = 5m$. β) $t = 3s$, $\Delta x = 21m$. γ) $t = 2s$, $v = 8m/s$. δ) $\Delta x_{0 \rightarrow 1} = 5m$, $\Delta x_{1 \rightarrow 2} = 7m$, $\Delta x_{2 \rightarrow 3} = 9m$, $\Delta x_{v-1 \rightarrow v} = (2v + 3)m$. ε) $\Delta x_{3 \rightarrow 6} = 39m$, $\Delta v_{3 \rightarrow 6} = 6m/s$. στ) $v_{0 \rightarrow 1} = 5m/s$, $v_{1 \rightarrow 2} = 7m/s$, $v_{2 \rightarrow 3} = 9m/s$, $v_{v-1 \rightarrow v} = (2v + 3)m/s$. ζ) $v_\mu = 10m/s$.)

A3.1.4 Για ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $v_0 = 4m/s$ και $a = 2m/s^2$ αντίρροπη στην αρχική ταχύτητα, να βρείτε: α) Τη μετατόπιση του σώματος τις χρονικές στιγμές $1, 2, 3, 4, 5, 6$ δευτερολέπτων. β) Τη μέγιστη μετατόπιση του σώματος και το χρόνο που αυτή επιτυγχάνεται. γ) Το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα από την αρχή της κίνησης μέχρι το τέλος του $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$, $4^{ου}$, $5^{ου}$ και $6^{ου}$ δευτερολέπτου. Τι έχετε να παρατηρήσετε για τη σχέση διαστήματος και μετατόπισης στην ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση; δ) Τη μετατόπιση του σώματος κατά τη διάρκεια του $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$, $4^{ου}$, $5^{ου}$ και $6^{ου}$ δευτερολέπτου. ε) Τη μέση ταχύτητα του σώματος κατά τη διάρκεια του $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$, $4^{ου}$, $5^{ου}$ και $6^{ου}$ δευτερολέπτου. στ) Τη μέση ταχύτητα του σώματος από τη χρονική στιγμή που το σώμα ξεκινά μέχρι τη στιγμή $1, 2, 3, 4, 5$ και 6 δευτερόλεπτα. ζ) Για ποιο χρονικό διάστημα η κίνηση του σώματος είναι επιβραδυνόμενη και για ποιο χρονικό διάστημα επιταχυνόμενη;

(Απ.: α) $3m, 4m, 3m, 0, -5m, -12m$, αντίστοιχα. β) $\Delta x = 4m$, $t = 2s$. γ) $3m, 4m, 5m, 8m, 13m, 20m$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι μετατοπίσεις και τα διαστήματα ταυτίζονται μόνο όταν το κινητό δεν αλλάζει φορά κίνησης. Δηλαδή για τα πρώτα δύο δευτερόλεπτα, το κινητό κινείται διαρκώς προς τα δεξιά και επιβραδύνεται μέχρι να σταματήσει. Η μέγιστη απόσταση από την αφετηρία στην οποία φτάνει είναι τα τέσσερα μέτρα. Κατόπιν, αφού σταματήσει, το κινητό γυρνάει προς τα πίσω. Για παράδειγμα τη χρονική στιγμή $t = 3s$, το κινητό αφού έχει φτάσει μέχρι τα 4 μέτρα, έχει γυρίσει πίσω στα τρία μέτρα. Έχει λοιπόν διανύσει διάστημα τεσσάρων μέτρων κινούμενο προς τα δεξιά, και ενός μέτρου κινούμενο προς τα αριστερά, για να πάει από τα 4 μέτρα στα 3 κατά τη διάρκεια του $3^{ου}$ δευτερολέπτου της κίνησης. (Το 1° δευτερόλεπτο πήγε από τα 0 στα 3 μέτρα, το 2° δευτερόλεπτο από τα 3 μέτρα στα τέσσερα και το 3° δευτερόλεπτο από τα 4 μέτρα ξανά πίσω στα 3). Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο προκύπτουν οι διαφορές ανάμεσα στο διάστημα και τη μετατόπιση όταν το κινητό αλλάζει φορά κίνησης, με άλλα λόγια όταν η κίνησή του περιλαμβάνει ένα τμήμα επιβραδυνόμενης κίνησης και ένα τμήμα

επιταχυνόμενης κίνησης. δ) $3m, 1m, 1m, 3m, 5m, 7m$, αντίστοιχα. ε) $3m/s, 1m/s, -1m/s, -3m/s, -5m/s, -7m/s$, αντίστοιχα. στ) $3m/s, 2m/s, \frac{5}{3}m/s, 2m/s, \frac{13}{5}m/s, \frac{10}{3}m/s$. ζ) Επιβράδυνση έχουμε μέχρι το κινητό να σταματήσει. Μετά η κίνησή του γίνεται επιταχυνόμενη. Ωστόσο οι εξισώσεις που περιγράφουν και τα δύο τμήματα της κίνησής του είναι ίδιες: $v = v_0 - |a|t$, $\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2}|a|t^2$. Πώς συμβαίνει οι ίδιες εξισώσεις να περιγράφουν και επιτάχυνση και επιβράδυνση; Μέχρι να αλλάξει κατεύθυνση κίνησης το σώμα, η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του είναι αντίρροπες, με την πρώτη θετική και τη δεύτερη αρνητική. Άρα όντως έχουμε επιβράδυνση. Όταν αλλάξει η κατεύθυνση κίνησης, τότε η ταχύτητα γίνεται αρνητική, δηλαδή ομόρροπη της επιτάχυνσης, άρα έχουμε επιταχυνόμενη κίνηση.)

A3.1.5 Ένα κινητό έχει αρχική ταχύτητα $20m/s$ και επιτάχυνση μέτρου $2m/s^2$, η οποία είναι αρχικά αντίρροπη προς την ταχύτητα. Να βρεθούν: α) Η ταχύτητα που έχει το σώμα τη χρονική στιγμή $3s$. β) Το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα σε αυτή τη στιγμή. γ) Η χρονική στιγμή (ή στιγμές) κατά τις οποίες το σώμα έχει μετατόπιση 75 μέτρων από την αφετηρία του δ) Η ταχύτητα που έχει το σώμα όταν βρίσκεται σε μετατόπιση 75 μέτρων από την αρχή. ε) Ο χρόνος για να φτάσει στη μέγιστη μετατόπιση. στ) Η μέγιστη μετατόπιση που μπορεί να έχει το σώμα. ζ) Ο χρόνος για να επιστρέψει το σώμα στην αφετηρία του. η) Η ταχύτητα που έχει τότε. Παρατηρούμε κάτι; Είναι λογικό αυτό; θ) Ο χρόνος για να βρεθεί το σώμα 125 μέτρα πίσω από την αφετηρία του. Έχει κάποιο νόημα το ότι προκύπτει και αρνητικός χρόνος; ι) Η ταχύτητα που έχει τότε το σώμα.

(Απ.: α) $14m/s$. β) $51m$. γ) $5s, 15s$. δ) $10m/s, -10m/s$. ε) $10s$ στ) $100m$. ζ) $20s$. η) $-20m/s$. θ) $25s$. Εμφανίζεται σαν λύση και ένας αρνητικός χρόνος, ο οποίος θα απορριφθεί βέβαια, αλλά έχει φυσικό νόημα. ι) $-30m/s$.)

A3.1.6 Ένα κινητό έχει αρχική ταχύτητα $60m/s$ προς τα δεξιά και $a = 10m/s^2$ προς τα αριστερά. Να βρεθούν: α) Η μέγιστη μετατόπιση του κινητού και ο χρόνος για να την επιτύχει. β) Οι χρονικές στιγμές στις οποίες το κινητό απέχει $100m$ από την αφετηρία του και η ταχύτητα που έχει τότε. γ) Η χρονική στιγμή που το κινητό επιστρέφει στην αφετηρία του και η ταχύτητα που έχει τότε. δ) Η χρονική στιγμή στην οποία το κινητό βρίσκεται $65m$ αριστερότερα της αφετηρίας του και η ταχύτητα που έχει τότε. ε) Ο χρόνος για να μεταβεί το κινητό από ένα σημείο που απέχει $100m$ από την αφετηρία στο σημείο που απέχει $55m$ από αυτή. στ) Η μέση ταχύτητα του σώματος για να φτάσει από την αφετηρία στη μέγιστη απομάκρυνση. ζ) Η μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ξεκινά μέχρι να επιστρέψει στην αφετηρία του.

(Απ.: α) $t = 6s, \Delta x = 180m$. β) $t_1 = 2s, v_1 = 40m/s, t_2 = 10s, v_2 = -40m/s$. γ) $t = 12s, v = -60m/s$. δ) $t = 13s, v = -70m/s$. ε) Αν το κινητό περνάει από τα $100m$ κινούμενο με αρνητική ταχύτητα, τότε ο ζητούμενος χρόνος είναι $1s$. Αν περνάει κινούμενο με θετική ταχύτητα, τότε ο ζητούμενος χρόνος είναι $9s$. στ) $v_{\mu} = 30m/s$. ζ) $v_{\mu} = 30m/s$.)

A3.1.7 Ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, παρατηρούμε πως τη στιγμή $t_1 = 2s$ έχει ταχύτητα $v_1 = 10m/s$ και τη στιγμή

$t_2 = 6s$ έχει $v_2 = 20m/s$. Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος.

(Απ.: $v_0 = 5m/s$, $a = 2,5m/s^2$.)

A3.1.8 Ένα σώμα εκτελεί ε.ο.μ.κ. Αν η αρχική του ταχύτητα είναι $v_0 = 10m/s$, ποια πρέπει να είναι η επιτάχυνση του σώματος ώστε αυτό να διανύσει μια απόσταση $100m$ στα πρώτα $5s$;

(Απ.: $a = 4m/s^2$.)

A3.1.9 Ένα σώμα κινείται με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10m/s$. Ποιο θα πρέπει να είναι το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος, ώστε αυτό να σταματήσει σε απόσταση $25m$ από την αφετηρία του;

(Απ.: $a = 2m/s^2$.)

A3.1.10 Ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση έχει τη χρονική στιγμή $t = 2s$ ταχύτητα $14m/s$ και έχει διανύσει απόσταση $24m$. Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος.

(Απ.: $10m/s$, $2m/s^2$.)

A3.1.11 Ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με μηδενική αρχική ταχύτητα, ξεκινά από ένα σημείο Ο περνάει κάποια χρονική στιγμή από το σημείο Α και μετά από $4s$ περνάει από το σημείο Β που απέχει $64m$ από το σημείο Α. Στο σημείο Β η ταχύτητά του είναι $24m/s$. Να βρεθούν η επιτάχυνση του σώματος και ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να μεταβεί από το Ο στο Α.

(Απ.: $a = 4m/s^2$, $t = 2s$.)

A3.1.12 Ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ξεκινώντας από την ηρεμία, με επιτάχυνση $2m/s^2$ διανύει τα τελευταία δύο δευτερόλεπτα της κίνησής του απόσταση 100 μέτρων. Να βρεθεί το συνολικό χρονικό διάστημα της κίνησης.

(Απ.: $26s$.)

A3.2 Συνδυασμοί κινήσεων για ένα σώμα

A3.2.1 Ένας οδηγός κινείται με ταχύτητα $20m/s$. Αν ο χρόνος αντίδρασής του είναι $1s$ και η επιβράδυνση που μπορεί να αναπτύξει στο όχημά του έχει μέτρο $4m/s^2$, να βρεθούν: α) Ο χρόνος για να ακινητοποιηθεί το όχημα. β) Η ολική του μετατόπιση. γ) Η μέση ταχύτητα μέχρι να ακινητοποιηθεί.

(Απ.: α) $t = 6s$. β) $\Delta x = 70m$. γ) $v_{\mu} = \frac{70}{6} m/s$.)

A3.2.2 Ένα σώμα ξεκινά από την ηρεμία και κινούμενο για $t_1 = 4s$ επιταχύνει με σταθερή επιτάχυνση $10m/s^2$. Από εκείνη τη χρονική στιγμή και για τα επόμενα $t_2 = 2s$ το σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Μετά για κάποιο χρονικό διάστημα επιβραδύνει με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $4m/s^2$ μέχρι να σταματήσει.

Να βρεθούν: α) Ο συνολικός χρόνος της κίνησης. β) Η συνολική μετατόπιση του σώματος. γ) Η μέση ταχύτητά του.

(Απ.: α) $t = 16s$. β) $\Delta x = 360m$. γ) $v_{\mu} = 22,5m/s$.)

A3.2.3 Ένα σώμα ξεκινά από την ηρεμία και επιταχύνεται για κάποιο χρονικό διάστημα. Κατόπιν το σώμα επιβραδύνεται με επιβράδυνση διπλάσιου μέτρου από την επιτάχυνσή του, μέχρι να σταματήσει. Αν ο συνολικός χρόνος της κίνησης είναι $30s$ και η μέγιστη τιμή της ταχύτητάς του είναι $10m/s$ να βρείτε τα μέτρα της επιτάχυνσης και της επιβράδυνσης a_1 και a_2 αντίστοιχα, τα χρονικά διαστήματα για τα οποία το σώμα κινείται επιταχυνόμενα και επιβραδυνόμενα t_1 και t_2 αντίστοιχα και τις αντίστοιχες μετατοπίσεις Δx_1 και Δx_2 .

(Απ.: $a_1 = 0,5m/s^2$, $a_2 = 1m/s^2$, $t_1 = 20s$, $t_2 = 10s$, $\Delta x_1 = 100m$, $\Delta x_2 = 50m$.)

A3.2.4 Ένα σώμα ξεκινά από την ηρεμία και επιταχύνεται για κάποιο χρονικό διάστημα. Κατόπιν επιβραδύνει με επιβράδυνση διπλάσιου μέτρου από την επιτάχυνσή του. Αν ο συνολικός χρόνος κίνησης του σώματος είναι $t = 12s$ και η συνολική μετατόπιση του σώματος είναι $\Delta x = 120m$, να βρείτε τα μέτρα της επιτάχυνσης και της επιβράδυνσης του σώματος, τους χρόνους κατά τους οποίους κινούταν επιταχυνόμενο και επιβραδυνόμενο, και τις μετατοπίσεις του σε αυτά τα χρονικά διαστήματα.

(Απ.: Για την επιτάχυνση ισχύει: $t_1 = 8s$, $a_1 = 2,5m/s^2$, $\Delta x_1 = 80m$. Για την επιβράδυνση ισχύει: $t_2 = 4s$, $a_2 = 5m/s^2$, $\Delta x_2 = 40m$.)

A3.3 Περισσότερα σώματα

A3.3.1 Δύο σώματα απέχουν μεταξύ τους $d = 250m$ και, ενώ ξεκινούν από την ηρεμία, κινούνται το ένα προς το άλλο με επιταχύνσεις που έχουν μέτρα $a_1 = 2m/s^2$ και $a_2 = 3m/s^2$. Τα σώματα ξεκινούν ταυτόχρονα. Να βρείτε τη χρονική στιγμή που συναντώνται και το διάστημα που έχει διανύσει κάθε σώμα.

(Απ.: $t = 10s$, $\Delta x_1 = 100m$, $\Delta x_2 = 150m$.)

A3.3.2 Δύο σώματα απέχουν μεταξύ τους $d = 200m$ και ενώ ξεκινούν ταυτόχρονα από την ηρεμία, κινούνται και τα δύο προς τα δεξιά με επιταχύνσεις $a_1 = 2m/s^2$ και $a_2 = 3m/s^2$. Αρχικά προπορεύεται το 1^ο, το αργότερο, σώμα. α) Να βρεθεί η χρονική στιγμή στην οποία συναντώνται τα σώματα και η μετατόπιση καθενός. β) Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία το γρήγορο σώμα προπορεύεται του πιο αργού κατά $d = 200m$.

(Απ.: $t = 20s$, $\Delta x_1 = 400m$, $\Delta x_2 = 600m$. β) $t = 20\sqrt{2}s$.)

A3.3.3 Αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα $30m/s$ και διέρχεται μπροστά από περιπολικό που αρχικά ηρεμεί. Το περιπολικό αναπτύσσει επιτάχυνση τη στιγμή που το αυτοκίνητο περνά από μπροστά του, ίση με $4m/s^2$ καταδιώκοντάς το. Να βρεθεί η χρονική στιγμή στην οποία το περιπολικό θα συναντηθεί με το

αυτοκίνητο, η μετατόπιση του κάθε σώματος τότε και η ταχύτητα που θα έχει αναπτύξει σε αυτή τη στιγμή το περιπολικό.

(Απ.: $t = 15s$, $\Delta x = 450m$, $v = 60m/s$.)

A3.3.4 Όπως αντιλαμβανόμαστε από το προηγούμενο πρόβλημα, μάλλον το περιπολικό δε μπορεί να κινείται διαρκώς επιταχυνόμενα, ώστε τελικά να φτάσει στην ταχύτητα των $60m/s$, η οποία είναι υπερβολική. (Να τη μετατρέψετε σε χιλιόμετρα ανά ώρα για να πειστείτε γι' αυτό.) Έτσι, αφού φτάσει μέχρι την τελική ταχύτητα των $40m/s$, παραμένει σε αυτή, καταδιώκοντας τον αυτοκινητιστή. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία συναντώνται τα δύο σώματα, αν το περιπολικό ξεκινά ακριβώς τη στιγμή που το αυτοκίνητο περνάει από δίπλα του, και τη μετατόπιση καθενός από αυτά.

(Απ.: $t = 20s$, $\Delta x = 600m$.)

A3.3.5 Μπροστά από ένα αρχικά ακίνητο σώμα διέρχεται ένα δεύτερο που κινείται με ταχύτητα $v_2 = 10m/s$. Να βρείτε την επιτάχυνση που πρέπει να έχει το δεύτερο σώμα ώστε να συναντηθούν στο τέρμα της διαδρομής, η οποία απέχει 400 μέτρα από την αφετηρία, αν υποθεθεί ότι το ακίνητο σώμα ξεκινά να επιταχύνεται τη στιγμή που το δεύτερο περνάει από μπροστά του. Να βρεθεί η ταχύτητα που έχει αναπτύξει τότε το πρώτο σώμα, όταν φτάνει στο τέρμα της διαδρομής.

(Απ.: $a = 0,5m/s^2$, $v = 20m/s$.)

A3.3.6 Να λύσετε το προηγούμενο πρόβλημα αν υποθεθεί ότι το αρχικά ακίνητο σώμα ξεκινά δέκα δευτερόλεπτα μετά τη διέλευση του πρώτου κινητού από μπροστά του.

(Απ.: $a = \frac{8}{9}m/s^2$, $v = \frac{80}{3}m/s$.)

A3.3.7 Θεωρούμε δύο σώματα. Το πρώτο έχει ταχύτητα $v_1 = 20m/s$, βρίσκεται δεξιότερα και κινείται προς τα δεξιά. Το δεύτερο με ταχύτητα $v_2 = 15m/s$ βρίσκεται αριστερότερα και κινείται και αυτό προς τα δεξιά. Τα δύο σώματα απέχουν αρχικά $d = 100m$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η μεταξύ τους απόσταση διπλασιάζεται.

(Απ.: Πρέπει σε αυτό και σε όλα τα παρόμοια προβλήματα να κάνουμε σχήμα. Αν d' είναι η τελική απόσταση των δύο σωμάτων, τότε εύκολα θα προκύψει από το σχήμα ότι $\Delta x_1 + d = \Delta x_2 + d' \Rightarrow t = 20s$.)

A3.3.8 Θεωρούμε δύο σώματα. Το πρώτο με ταχύτητα $v_1 = 20m/s$ και επιτάχυνση $a_1 = 4m/s^2$ βρίσκεται δεξιότερα και κινείται προς τα δεξιά. Το δεύτερο με ταχύτητα $v_2 = 15m/s$ και επιτάχυνση $a_2 = 2m/s^2$ βρίσκεται αριστερότερα και κινείται και αυτό προς τα δεξιά. Τα δύο σώματα απέχουν αρχικά $d = 100m$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η μεταξύ τους απόσταση γίνεται $d' = 150m$.

(Απ.: $t = 5s$.)

Μεθοδολογικό σχόλιο: Για να βρούμε την κοντινότερη απόσταση στην οποία φτάνουν δύο σώματα, θα πρέπει να εξισώσουμε τις ταχύτητές τους. Για να το καταλάβετε, φανταστείτε την περίπτωση, στην οποία δύο κινητά κινούνται προς τα

δεξιά, με προπορευόμενο ένα αργό όχημα, και πίσω του να ακολουθεί ένα ταχύτερο. Αν το μπροστινό σώμα, το αργό, αποφασίσει να επιταχύνει και το γρήγορο σώμα που ακολουθεί αποφασίσει να επιβραδύνει για να αποφευχθεί η σύγκρουση, τότε όσο το πίσω εξακολουθεί να έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το μπροστινό, τόσο θα πλησιάζουν. Από τη στιγμή όπως που θα εξισωθούν οι ταχύτητές τους, το πίσω θα αρχίσει να καθυστερεί, γιατί θα επιβραδύνεται περισσότερο, και το μπροστινό θα αρχίσει να μεγαλώνει την απόστασή του από το πίσω, γιατί θα επιταχύνεται περισσότερο. Έτσι όμως η απόστασή τους θα μεγαλώνει και πάλι. Ελάχιστη απόσταση θα έχουν όταν οι ταχύτητές τους εξισωθούν.

A3.3.9 Θεωρούμε δύο αυτοκίνητα. Το πρώτο με ταχύτητα $v_{01} = 20\text{m/s}$ βρίσκεται αριστερότερα και κινείται προς τα δεξιά. Δεξιά του και σε απόσταση $d = 20\text{m}$ βρίσκεται το άλλο αυτοκίνητο με ταχύτητα $v_{02} = 11\text{m/s}$, το οποίο κινείται επίσης προς τα δεξιά. Οι οδηγοί των δύο αυτοκινήτων βρίσκονται σε πορεία σύγκρουσης με τις ταχύτητες που έχουν, έτσι αντιλαμβανόμενοι ο ένας την παρουσία του άλλου ταυτόχρονα, αναπτύσσουν ο μεν πρώτος επιβράδυνση μέτρου $a_1 = 2\text{m/s}^2$ και ο δεύτερος επιτάχυνση $a_2 = 1\text{m/s}^2$. Ποια είναι η κοντινότερη απόσταση στην οποία φτάνουν τα δύο σώματα, και σε ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό; Μπορείτε να πιστοποιήσετε ότι η σύγκρουση έχει αποφευχθεί;
(Απ.: $t = 3\text{s}$, $d' = 6,5\text{m}$.)

A3.3.10 Θεωρούμε δύο τρένα. Το πρώτο με ταχύτητα $v_{01} = 20\text{m/s}$ βρίσκεται αριστερότερα και κινείται προς τα δεξιά. Δεξιά του και σε απόσταση $d = 16\text{m}$ από αυτό βρίσκεται δεύτερο τρένο που κινείται με $v_{02} = 8\text{m/s}$. Αντιλαμβανόμενοι ταυτόχρονα οι δύο μηχανοδηγοί την πιθανότητα σύγκρουσης, αναπτύσσουν ο μεν αριστερότερος επιβράδυνση μέτρου $a_1 = 1\text{m/s}^2$, και ο δεύτερος επιτάχυνση. Ποια είναι η ελάχιστη επιτάχυνση που πρέπει να αναπτύξει ο δεύτερος ώστε τα τρένα μόλις να αποφύγουν τη σύγκρουση; Σε ποια χρονική στιγμή θα καταφέρουν να πάψουν να βρίσκονται σε πορεία σύγκρουσης;

(Απ.: $t = \frac{8}{3}\text{s}$, $a_2 = 3,5\text{m/s}^2$.)

A3.3.11 Ένα ύποπτο αυτοκίνητο περνάει με ταχύτητα v_0 μπροστά από ένα περιπολικό που είναι ακίνητο. Τη στιγμή διέλευσης του αυτοκινήτου ένα περιπολικό ξεκινά με ευθύγραμμη ομαλά κίνηση να το καταδιώκει. Υπάρχει περίπτωση το περιπολικό να έχει πολύ μικρή επιτάχυνση ώστε να μη συναντήσει ποτέ το ύποπτο αυτοκίνητο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Απ.: Δεν υπάρχει τέτοια περίπτωση.)

A4 Διαγράμματα

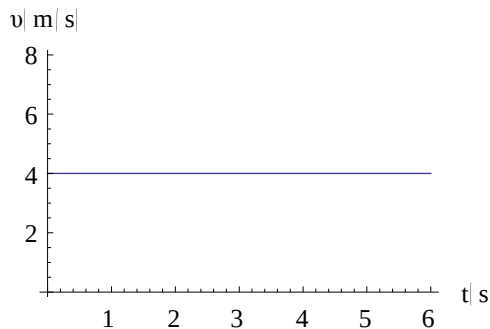
A4.1 Διαγράμματα ε.ο.κ.

A4.1.1 Σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση δίνεται ότι το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 10\text{ m/s}$. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας, της μετατόπισης και της θέσης του κινητού συναρτήσει του χρόνου, για το χρονικό διάστημα των τριών πρώτων δευτερολέπτων της κίνησης, αν το σώμα ξεκινά: α) Από τη θέση $x_0 = 0$. β) $x_0 = 5\text{ m}$. γ) $x_0 = -5\text{ m}$.

A4.1.2 Μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση περιγράφεται από τη σχέση: $\Delta x = 5t$. Αφού βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται το κινητό να κάνετε τα διαγράμματα της ταχύτητας, της μετατόπισης και της επιτάχυνσης του κινητού συναρτήσει του χρόνου για το χρονικό διάστημα των τριών πρώτων δευτερολέπτων της κίνησης.

(Υπόδειξη: Σε ό,τι αφορά την επιτάχυνση, το γεγονός ότι αυτή είναι μηδενική, δε σημαίνει ότι δεν μπορούμε να κάνουμε γραφική παράστασή της.)

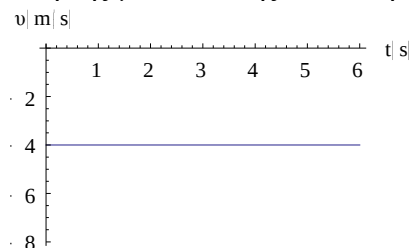
A4.1.3 Με βάση το παρακάτω διάγραμμα να βρείτε τη μετατόπιση του κινητού: α) Από την αρχή μέχρι το τέλος της κίνησης. β) Στο 2^ο δευτερόλεπτο της κίνησής του. Να κάνετε επίσης τη γραφική παράσταση της μετατόπισης του κινητού συναρτήσει του χρόνου.



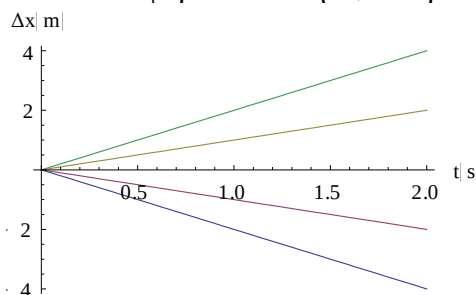
(Απ.: α) $\Delta x = 24\text{ m}$. β) $\Delta x = 4\text{ m}$.)

A4.1.4 Για το διάγραμμα της παραπάνω άσκησης να κάνετε τη γραφική παράσταση της θέσης του κινητού συναρτήσει του χρόνου, αν αυτό ξεκινά: α) Από τη θέση $x_0 = 0$. β) $x_0 = 5\text{ m}$. γ) $x_0 = -5\text{ m}$.

A4.1.5 Με βάση το παρακάτω διάγραμμα να κάνετε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης του κινητού συναρτήσει του χρόνου.

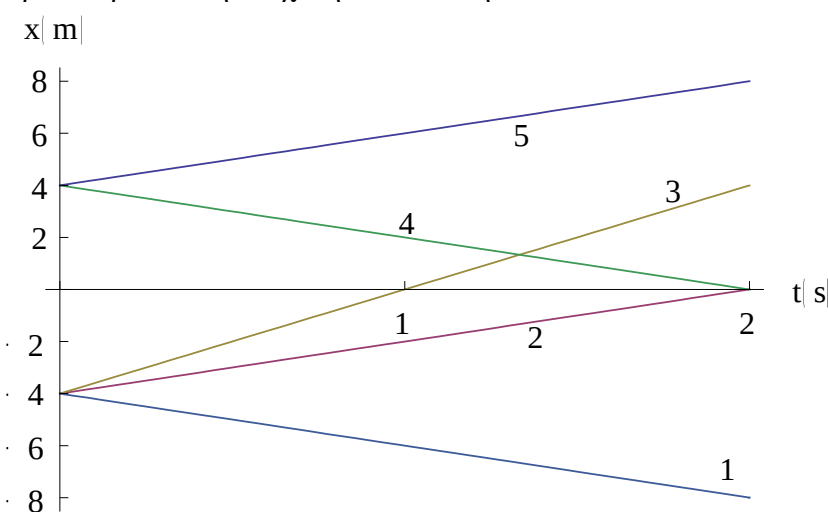


A4.1.6 Από τα παρακάτω διαγράμματα μετατόπισης χρόνου για κάποια διαφορετικά κινητά, να προσδιορίσετε την ταχύτητά τους.



(Απ.: Από κάτω προς τα πάνω: -2 m/s , -1 m/s , 1 m/s , 2 m/s .)

A4.1.7 Από τα παρακάτω διαγράμματα θέσης – χρόνου, να προσδιορίσετε την ταχύτητα των κινητών:



(Απ.: $v_1 = -2\text{ m/s}$, $v_2 = 2\text{ m/s}$, $v_3 = 4\text{ m/s}$, $v_4 = -2\text{ m/s}$, $v_5 = 2\text{ m/s}$.)

A4.1.8 Να κάνετε τα διαγράμματα θέσης – χρόνου, μετατόπισης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου και επιτάχυνσης – χρόνου για ένα κινητό που είναι ακίνητο.

(Υπόδειξη: Για όλα τα διαγράμματα εκτός από το πρώτο, η απάντηση είναι μοναδική.)

A4.2 Διαγράμματα ε.ο.μ.κ.

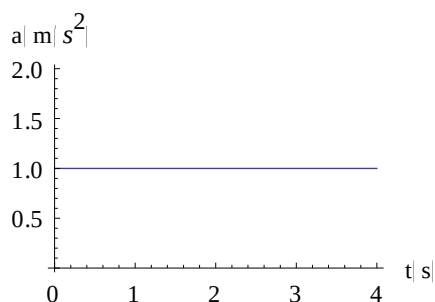
A4.2.1 Για ένα κινητό που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με $a = 2\text{ m/s}^2$, $v_0 = 4\text{ m/s}$ και α) $x_0 = 0$, β) $x_0 = 3\text{ m}$, γ) $x_0 = -3\text{ m}$, να κάνετε τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου, μετατόπισης – χρόνου και θέσης – χρόνου για τα πρώτα 4 δευτερόλεπτα της κίνησης.

A4.2.2 Για ένα κινητό που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με $a = -2\text{ m/s}^2$, $v_0 = 4\text{ m/s}$ και α) $x_0 = 0$, β) $x_0 = 3\text{ m}$, γ) $x_0 = -3\text{ m}$, να κάνετε τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου, μετατόπισης – χρόνου και θέσης – χρόνου για τα πρώτα 4 δευτερόλεπτα της κίνησης. Για ποιο

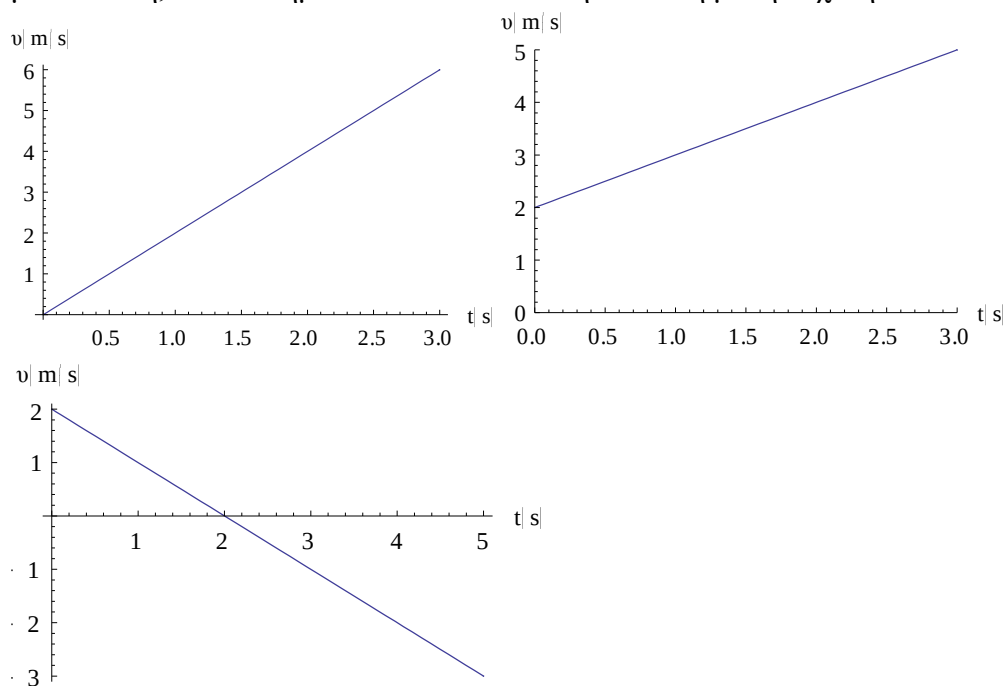
χρονικό διάστημα το κινητό εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση και για ποιο διάστημα επιβραδυνόμενη;

A4.2.3 Για ένα κινητό που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με $a = 2\text{m/s}^2$, $v_0 = -4\text{m/s}$ και α) $x_0 = 0$, β) $x_0 = 3\text{m}$, γ) $x_0 = -3\text{m}$, να κάνετε τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου, μετατόπισης – χρόνου και θέσης – χρόνου για τα πρώτα 4 δευτερόλεπτα της κίνησης. Για ποιο χρονικό διάστημα το κινητό εκτελεί επιβραδυνόμενη και για ποιο επιταχυνόμενη κίνηση;

A4.2.4 Από το παρακάτω διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου να κατασκευάσετε το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου και μετατόπισης – χρόνου αν η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι: α) $v_0 = -5\text{m/s}$. β) $v_0 = 5\text{m/s}$.

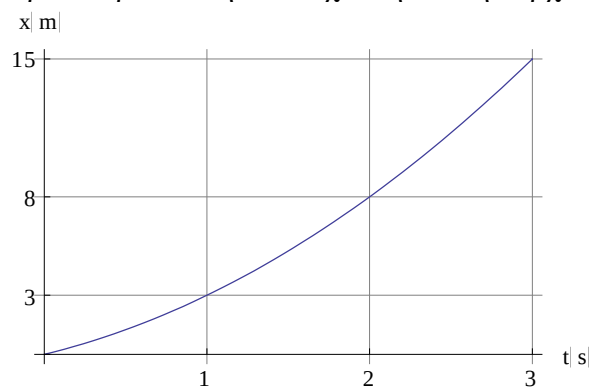


A4.2.5 Από τα παρακάτω διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου, να κατασκευάσετε τα αντίστοιχα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου και μετατόπισης – χρόνου για το κινητό. Να προσδιορίσετε επίσης για κάθε διάγραμμα τη συνολική μετατόπιση, το διάστημα που διανύει το κινητό και τη μέση ταχύτητά του.



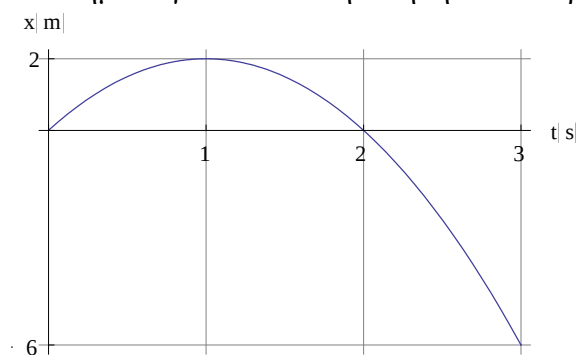
(Απ.: Για το πρώτο διάγραμμα: $\Delta x = 9\text{m}$, $S = 9\text{m}$, $v_\mu = 3\text{m/s}$. Για το δεύτερο διάγραμμα: $\Delta x = 10,5\text{m}$, $S = 10,5\text{m}$, $v_\mu = 3,5\text{m/s}$. Για το τρίτο διάγραμμα: $\Delta x = -2,5\text{m}$, $S = 6,5\text{m}$, $v_\mu = 1,3\text{m/s}$.)

A4.2.6 Το κινητό του παρακάτω διαγράμματος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Με βάση τα δεδομένα του διαγράμματος να προσδιορίσετε την επιτάχυνση και την αρχική του ταχύτητα.



(Απ.: $v_0 = 2\text{ m/s}$, $a = 2\text{ m/s}^2$.)

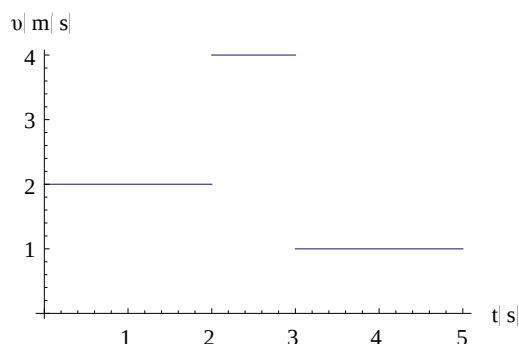
A4.2.7 Το κινητό του παρακάτω διαγράμματος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Με βάση τα στοιχεία του διαγράμματος να προσδιορίσετε την αρχική ταχύτητα και την επιτάχυνσή του, και τα χρονικά διαστήματα για τα οποία η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη είτε επιταχυνόμενη.



(Απ.: $v_0 = 4\text{ m/s}$, $a = -4\text{ m/s}^2$.)

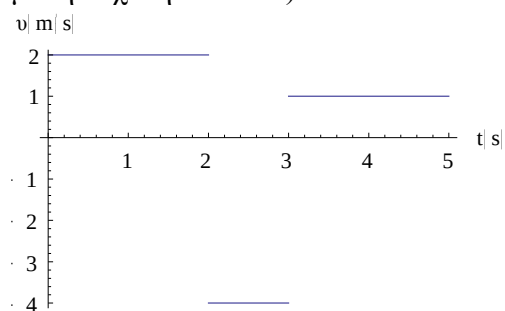
A4.3 Συνδυασμοί κινήσεων για ένα σώμα

A4.3.1 Ένα σώμα εκτελεί τις κινήσεις που φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. α) Να προσδιορίσετε την ταχύτητα για κάθε μία από τις κινήσεις αυτές. β) Να βρείτε τη συνολική μετατόπιση του σώματος και το συνολικό διάστημα που έχει διανύσει. γ) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του σώματος. δ) Πιστεύετε ότι ένα σώμα θα μπορούσε να εκτελεί την κίνηση που περιγράφεται σε αυτό το διάγραμμα; Για ποιο λόγο; Και αν αυτή η κίνηση είναι αδύνατο να υπάρξει, τότε γιατί τη χρησιμοποιούμε συχνά σε ασκήσεις; ε) Είναι η μέση ταχύτητα ο μέσος όρος των ταχυτήτων που εμφανίζονται στο σχήμα; στ) Να κάνετε το διάγραμμα μετατόπισης – χρόνου για το κινητό αυτό.



(Απ.: α) Πρόκειται για ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις στις οποίες η ταχύτητα φαίνεται από το σχήμα. β) $\Delta x = 10m$, $S = 10m$. γ) $v_{\mu} = 2m/s$. δ) Όχι, δε μπορεί ένα πραγματικό σώμα να κινείται με αυτό τον τρόπο, γιατί παρατηρούμε ότι σε κάποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητά του μεταβάλλεται απότομα. Για να μεταβάλλεται τόσο απότομα η ταχύτητά του, θα πρέπει η επιτάχυνσή του, άρα και η δύναμη που του ασκείται, να είναι πολύ μεγάλη, δηλαδή άπειρη. Το οποίο όμως δε μπορεί να συμβεί στον πραγματικό κόσμο. Αν όμως σχεδιάζαμε τις ταχύτητες να μεταβάλλονται όπως συμβαίνει στον πραγματικό κόσμο, τότε οι υπολογισμοί μας θα ήταν απίστευτα πολύπλοκοι. Οπότε, για χάρη της απλούστευσης των πραγμάτων χρησιμοποιούμε τέτοια παραδείγματα³. Ένας λόγος που επιτρέπει τη χρήση αυτών των σχημάτων είναι ότι σε μεγάλο βαθμό, όχι 100%, αλλά σε ικανοποιητικά μεγάλο βαθμό, αποδίδουν τη φυσική πραγματικότητα όπως αυτή είναι. ε) Παρατηρούμε ότι η μέση ταχύτητα δεν είναι ο μέσος όρος των ταχυτήτων του προβλήματος. Για να συνέπιπτε η μέση ταχύτητα με το μέσο όρο των ταχυτήτων θα έπρεπε κατ' αρχήν να είχαν όλες οι ταχύτητες το ίδιο πρόσημο, και επιπλέον η κάθε κίνηση να διαρκούσε το ίδιο χρονικό διάστημα.)

A4.3.2 Για το σώμα που εκτελεί τις κινήσεις του παρακάτω σχήματος να βρείτε: α) Τη συνολική του μετατόπιση. β) Το διάστημα που έχει διανύσει. γ) Τη μέση ταχύτητά του. δ) Να κάνετε το διάγραμμα μετατόπισης – χρόνου.

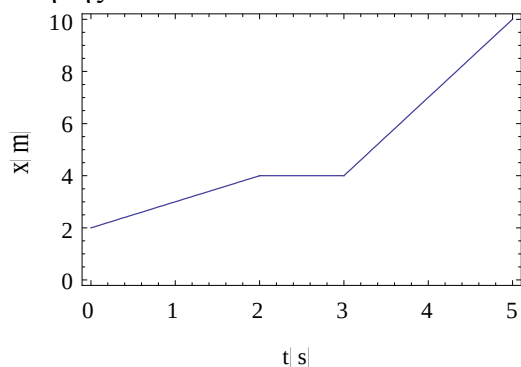


(Απ.: α) $\Delta x = 2m$. β) $S = 10m$. γ) $v_{\mu} = 2m/s$.)

A4.3.3 Για το σώμα η θέση του οποίου δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα: α) Να βρείτε την αρχική του θέση. β) Να κάνετε τα διαγράμματα μετατόπισης – χρόνου και ταχύτητας – χρόνου. γ) Να βρείτε τη συνολική μετατόπισή

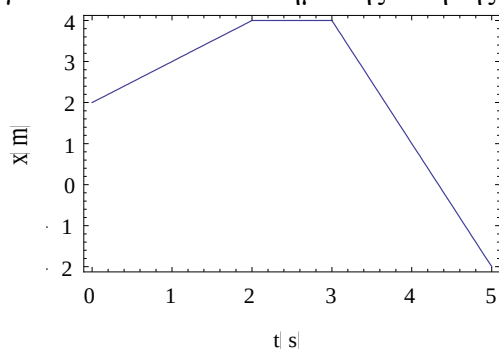
³ Όχι, δεν είναι ίδια η περίπτωση όπως με τον τέλειο κύκλο, που ξέρουμε ότι είναι πολύ δύσκολο να βρούμε στη φύση. Γιατί ο τέλειος κύκλος, ή η τέλεια ευθεία, ή το τέλειο τρίγωνο που αποτελείται από τέλεια ευθύγραμμα τμήματα ή το τέλειο τετράγωνο, μπορεί μεν να είναι ελάχιστα ή να μην υπάρχουν καθόλου στο φυσικό κόσμο, ωστόσο δεν υπάρχει κανένας νόμος που να απαγορεύει την ύπαρξή τους. Για τα διαγράμματα που έχουμε εδώ σχεδιάσει, υπάρχει «νόμος» που απαγορεύει την ύπαρξή τους, και ο νόμος είναι εκείνος που απαγορεύει στις δυνάμεις να απειρίζονται.

του, το διάστημα που διήνυσε και τη μέση ταχύτητά του για το χρονικό διάστημα της κίνησης.



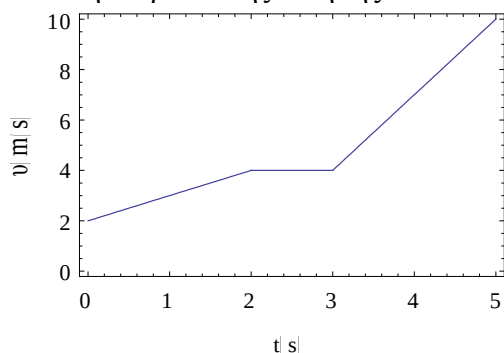
(Απ.: α) $x_0 = 2m$. γ) $\Delta x = 8m$, $S = 8m$, $v_\mu = 1,6m/s$.)

A4.3.4 Για το σώμα η θέση του οποίου δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα: α) Να κάνετε τα διαγράμματα μετατόπισης – χρόνου και ταχύτητας – χρόνου. β) Να βρείτε τη μετατόπισή του, το διάστημά του και τη μέση ταχύτητά του για το συνολικό διάστημα της κίνησης.



(Απ.: β) $\Delta x = -4m$, $S = 8m$, $v_\mu = 1,6m/s$.)

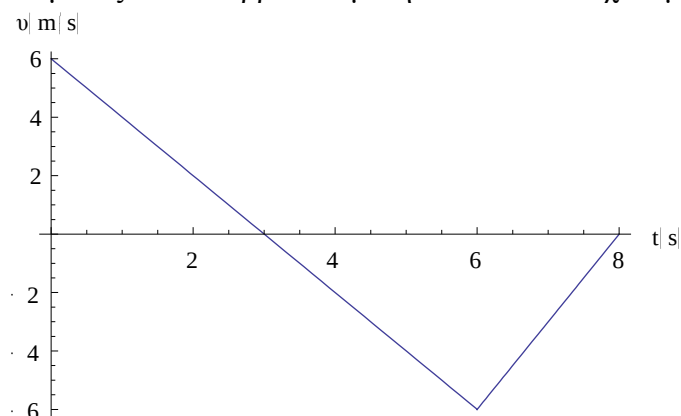
A4.3.5 Από το παρακάτω διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για ένα κινητό: α) Να κάνετε τα διαγράμματα μετατόπισης – χρόνου και επιτάχυνσης – χρόνου. β) Να βρείτε τη συνολική μετατόπιση, το διάστημα που διήνυσε το κινητό κατά τη διάρκεια της κίνησής του και τη μέση ταχύτητά του.



(Απ.: β) $\Delta x = 24m$, $S = 24m$, $v_\mu = 4,8m/s$.)

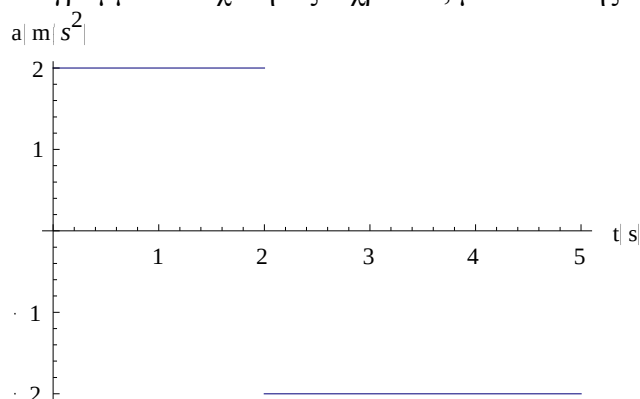
A4.3.6 Από το παρακάτω διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για ένα κινητό: α) Να κάνετε τα διαγράμματα μετατόπισης – χρόνου, επιτάχυνσης – χρόνου και διαστήματος – χρόνου. β) Να βρείτε τη συνολική μετατόπιση, το διάστημα που

διήνυσε το κινητό και τη μέση ταχύτητά του. γ) Να προσδιορίσετε πότε η κίνηση του σώματος είναι επιβραδυνόμενη και πότε επιταχυνόμενη.



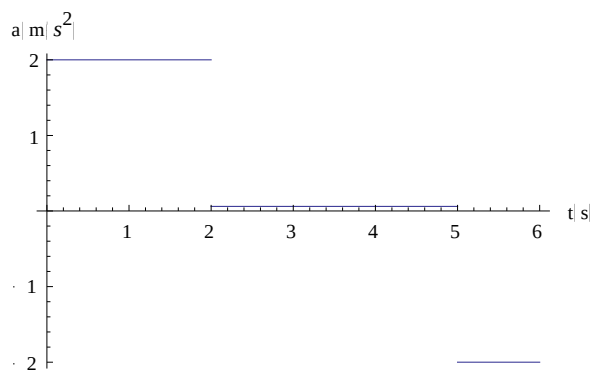
(Απ.: β) $\Delta x = -6m$, $S = 24m$, $v_{\mu} = 3m/s$. γ) Από 0 ως 3s επιβραδύνεται, από 3s ως 6s επιταχύνεται και από 6s ως 9s επιβραδύνεται και πάλι.)

A4.3.7 Η επιτάχυνση ενός σώματος δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα. Αν η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική, να κάνετε τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου, μετατόπισης – χρόνου και διαστήματος – χρόνου.



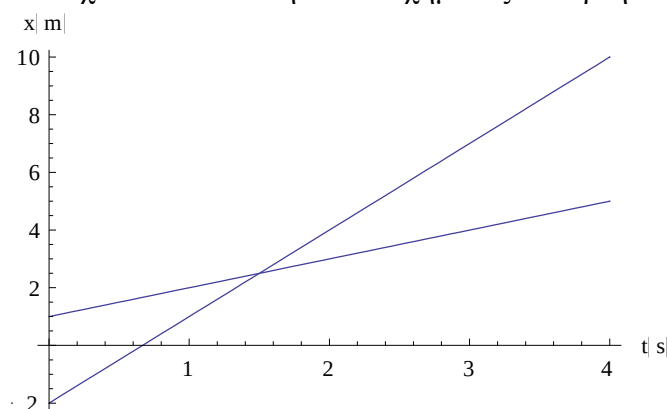
A4.3.8 Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου, μετατόπισης – χρόνου και διαστήματος – χρόνου, αν η επιτάχυνση του σώματος συναρτήσει του χρόνου δίνεται από το παραπάνω διάγραμμα και η αρχική του ταχύτητα είναι α) $v_0 = 2m/s$. β) $v_0 = 6m/s$.

A4.3.9 Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου, μετατόπισης – χρόνου και διαστήματος – χρόνου αν η επιτάχυνση του κινητού συναρτήσει του χρόνου δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα και η αρχική του ταχύτητα είναι μηδενική.



A4.4 Περισσότερα σώματα

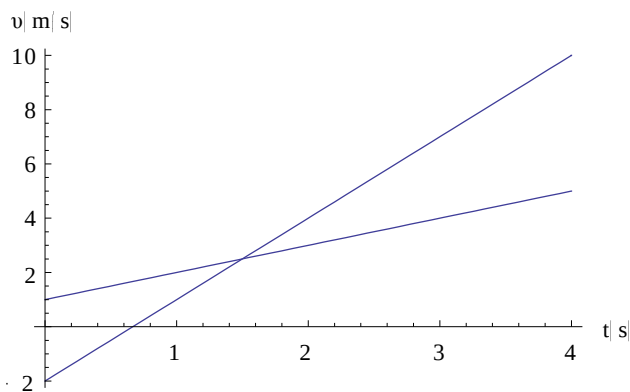
A4.4.1 Να κάνετε το διάγραμμα της διαφοράς θέσεων (ή απόστασης) που έχουν τα δύο κινητά του σχήματος συναρτήσει του χρόνου.⁴



(Υπόδειξη: Στο διάγραμμα βλέπετε τις θέσεις δύο κινητών συναρτήσει του χρόνου. Θα ονομάσετε όποιο από τα δύο κινητά θέλετε 1, το άλλο 2, και για τη μεταξύ τους διαφορά θέσεων θα θεωρήσετε το μέγεθος $x_1 - x_2$ ή $x_2 - x_1$. Δε μας ορίζει το πρόβλημα ποια από τις δύο διαφορές θέσεων θέλει να πάρουμε. Επίσης μπορείτε, αν θέλετε να κάνετε γραφική παράσταση της απόλυτης τιμής της διαφοράς θέσεων συναρτήσει του χρόνου.)

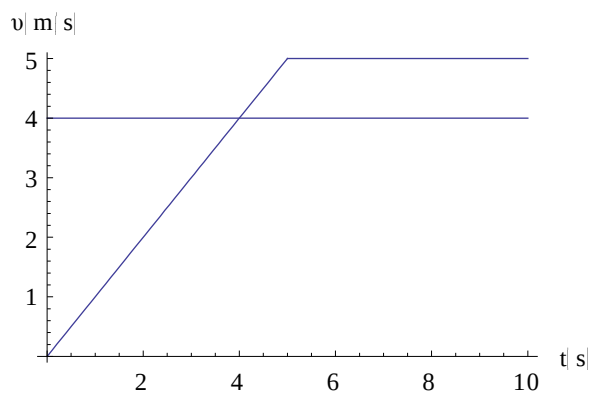
A4.4.2 Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε τις ταχύτητες δύο κινητών συναρτήσει του χρόνου. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της (απόλυτης τιμής της) απόστασης των δύο κινητών συναρτήσει του χρόνου.

⁴ Όπως θα δούμε στην υπόδειξη, το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από μερικές ασάφειες. Σκόπιμες είναι αυτές, διότι ανάλογες ασάφειες παρατηρούμε συχνά και σε προβλήματα και θα θέλαμε ο αναγνώστης μας να εξοικειωθεί με αυτές, αρκεί βέβαια να έχει ξεκαθαρίσει τί είναι σαφές και τί ασαφές. Επίσης, θα θέλαμε να πούμε, πως δεν είναι κακό να ρωτήσει κανείς για την απόσταση των δύο κινητών, χωρίς να ρωτήσει ποιο προπορεύεται και λοιπά, αφήνοντας στον αναγνώστη να αντιληφθεί ότι κάποια στιγμή προπορεύεται κάποιο, το οποίο όμως δε θα προπορεύεται τις επόμενες στιγμές. Ούτε είναι κακό να βρει ο αναγνώστης την απόσταση κατ' απόλυτη τιμή από τα δύο σώματα, ενδεχομένως επειδή θέλει να αποφύγει μια ανεπιθύμητη συνάντηση. Το κακό είναι να επιτρέπονται από τις αοριστίες της άσκησης τα περιθώρια αυτενέργειας, αλλά βαθμολογικώς να κατατομούνται τα αποτελέσματα αυτής της αυτενέργειας.



A4.4.3 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απόστασης δύο κινητών συναρτήσει του χρόνου όταν αυτά απέχουν αρχικά $10m$ και κινούνται με ίδιες ταχύτητες. Αν τα κινητά κινούταν με αντίθετες ταχύτητες, τί θα άλλαζε στη γραφική παράσταση;

A4.4.4 Τα κινητά στο παρακάτω σχήμα έχουν κοινή αφετηρία. α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες. β) Τη χρονική στιγμή που συναντώνται.



(Απ.: α) $t = 4s$. β) $t = 12,5s$.)

Κεφάλαιο Β

Δυναμική σε μία διάσταση

Β1 Δυνάμεις σε μία διάσταση

Β1.1 Συνισταμένη δύναμη – Ισορροπία

Β1.1.1 Να βρείτε τη συνισταμένη των δυνάμεων για τις παρακάτω περιπτώσεις σωμάτων, αφού ορίσετε εσείς όποια φορά θέλετε θετική.



(Απ.: Αν ορίσουμε την προς τα δεξιά φορά θετική, τότε $\Sigma F = F_1 + F_2$ για το πρώτο σχήμα, $\Sigma F = F_2 - F_1$ για το δεύτερο σχήμα και $\Sigma F = F_1 + F_2 - F_3$ για το τρίτο σχήμα.⁵)

Β1.1.2 Αν για τις δυνάμεις του παραπάνω σχήματος ισχύει: $F_1 = 7\text{ N}$, $F_2 = 10\text{ N}$, $F_3 = 8\text{ N}$, να βρείτε την τέταρτη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί ώστε να το σώμα να ισορροπεί.

(Απ.: Υπερβολικά απλή...)

Β1.1.3 Παρατηρούμε ότι σε ένα σώμα που ασκείται μια δύναμη 10 N προς τα δεξιά διανύει σε ίσους χρόνους ίσες αποστάσεις. Τί μπορούμε να πούμε για το αν υπάρχει άλλη δύναμη στο σώμα;

(Απ.: Υπάρχει μια ακόμη δύναμη, αντίρροπη της πρώτης και με ίσο μέτρο με αυτή, ή υπάρχουν πολλές περισσότερες δυνάμεις, η συνισταμένη των οποίων δίνει και πάλι 10 N σε κατεύθυνση αντίθετη της δύναμης που του ασκούμε.)

Β1.2 Ανάλυση δύναμης σε μία διάσταση

Β1.2.1 Μία δύναμη έχει μέτρο $F = 20\text{ N}$. Θέλουμε να αναλυθεί σε δύο ομόρροπες συνιστώσες, οι οποίες: α) Να έχουν ίσα μέτρα. β) Το μέτρο της μίας να είναι διπλάσιο από το μέτρο της άλλης. γ) Το μέτρο της μίας να είναι εικοσαπλάσιο από το μέτρο της άλλης. δ) Το πηλίκο του μέτρου της μίας δύναμης προς το μέτρο της άλλης δύναμης να είναι ίσο με $\frac{2}{3}$. ε) Το πηλίκο του μέτρου της

⁵ Υποτίθεται ότι αυτό που βλέπουμε στα σχήματα είναι τα μέτρα των δυνάμεων και όχι οι αλγεβρικές τους τιμές.

μίας δύναμης προς το μέτρο της άλλης δύναμης να είναι ίσο με $\frac{13}{47}$. στ) Το πηλίκο του μέτρου της μίας δύναμης προς το μέτρο της άλλης δύναμης να είναι ίσο με $\sqrt{2}$.

(Απ.: α) $F_1 = F_2 = 10N$. β) $F_1 = \frac{40}{3}N$, $F_2 = \frac{20}{3}N$. γ) $F_1 = \frac{400}{21}N$, $F_2 = \frac{20}{21}N$. δ) $F_1 = 12N$, $F_2 = 8N$. ε) $F_1 = \frac{47}{3}N$, $F_2 = \frac{13}{3}N$. στ) $F_1 = 20(2 - \sqrt{2})$, $F_2 = 20(\sqrt{2} - 1)$.)

B1.2.2 Μία δύναμη έχει μέτρο $F = 20N$. Θέλουμε να αναλυθεί σε δύο αντίρροπες συνιστώσες, με την F_1 ομόρροπη της F , ώστε οι δύο αυτές συνιστώσες: α) Να έχουν ίσα μέτρα. β) Το μέτρο της μίας να είναι διπλάσιο από το μέτρο της άλλης. γ) Το μέτρο της μίας να είναι εικοσαπλάσιο από το μέτρο της άλλης. δ) Το πηλίκο του μέτρου της μίας δύναμης προς το μέτρο της άλλης δύναμης να είναι ίσο με $\frac{2}{3}$. ε) Το πηλίκο του μέτρου της μίας δύναμης προς το μέτρο της άλλης δύναμης να είναι ίσο με $\frac{13}{47}$. στ) Το πηλίκο του μέτρου της μίας δύναμης προς το μέτρο της άλλης δύναμης να είναι ίσο με $\sqrt{2}$.

(Απ.: α) Αδύνατο. β) $F_1 = 40N$, $F_2 = 20N$. γ) $F_1 = \frac{400}{19}N$, $F_2 = \frac{20}{19}N$. δ) $F_1 = 60N$, $F_2 = 40N$. ε) $F_1 = \frac{470}{17}N$, $F_2 = \frac{130}{17}N$. στ) $F_1 = 20(2 + \sqrt{2})N$, $F_2 = 20(1 + \sqrt{2})N$.)

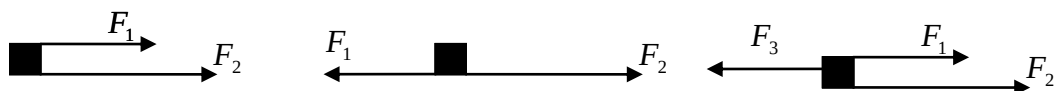
B1.3 Αριθμητικές εφαρμογές στο 2^ο νόμο του Νεύτωνα

Εφαρμογές στη σχέση $\Sigma F = ma$

B1.3.1 Να γίνει γραφική παράσταση της επιτάχυνσης που αποκτά ένα σώμα συναρτήσει της δύναμης που του ασκείται, αν η μάζα του σώματος παραμένει σταθερή. Τι πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από την κλίση του διαγράμματος; Αν κάναμε τη γραφική παράσταση της δύναμης συναρτήσει της επιτάχυνσης, τί πληροφορίες θα αντλούσαμε από την κλίση του διαγράμματος;

(Απ.: Από την κλίση του πρώτου διαγράμματος μπορούμε να βρούμε το $\frac{1}{m}$ και από την κλίση του δεύτερου διαγράμματος μπορούμε να βρούμε το m . Όταν λέμε ότι κάνουμε γραφική παράσταση της επιτάχυνσης συναρτήσει της δύναμης, εννοούμε ότι η δύναμη τοποθετείται στον οριζόντιο άξονα και η επιτάχυνση στον κατακόρυφο.)

B1.3.2 Ένα σώμα με μάζα $m = 2Kg$ βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις που βλέπουμε στο σχήμα, με μέτρα $F_1 = 10N$, $F_2 = 20N$, $F_3 = 15N$. Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της επιτάχυνσης του σώματος σε κάθε περίπτωση.



(Απ.: $a = 15\text{m/s}^2$ προς τα δεξιά για το πρώτο σχήμα, $a = 5\text{m/s}^2$ προς τα δεξιά για το δεύτερο σχήμα, $a = 7,5\text{m/s}^2$ προς τα δεξιά για το τρίτο σχήμα.)

B1.3.3 Σε ένα σώμα παρατηρούμε πως όταν του ασκούμε δύναμη F αποκτά επιτάχυνση μέτρου 10m/s^2 . Να βρεθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος όταν: α) Η δύναμη τριπλασιαστεί. β) Η δύναμη υποδιπλασιαστεί. γ) Προστεθεί και μια δεύτερη δύναμη ομόρροπη στην 1^η με ίσο μέτρο. δ) Προστεθεί και μια δεύτερη δύναμη αντίρροπη στην πρώτη με ίσο μέτρο. ε) Προστεθεί μια δεύτερη δύναμη ομόρροπη στην πρώτη με διπλάσιο μέτρο. στ) Προστεθεί μια δεύτερη δύναμη αντίρροπη στην πρώτη με διπλάσιο μέτρο. ζ) Η δύναμη αυξηθεί κατά 20%. η) Η δύναμη μειωθεί κατά 20%.

(Απ.: α) 30m/s^2 . β) 5m/s^2 . γ) 20m/s^2 . δ) 0. ε) 30m/s^2 . στ) 10m/s^2 . ζ) 12m/s^2 . η) 8m/s^2 .)

B1.3.4 Σε ένα σώμα που έχει μεταβλητή μάζα (όπως ένα τρένο που μεταφέρει εμπορεύματα, ή ένας πύραυλος, ο οποίος επίσης μπορεί να μεταφέρει εφόδια σε διαστημικό σταθμό) παρατηρούμε ότι για κάποια συγκεκριμένη τιμή της μάζας του, η επιτάχυνση που αποκτά είναι 10m/s^2 . Αν η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι σταθερή, αλλά μπορεί να αλλάξει η μάζα του, τότε να βρείτε την επιτάχυνσή του αν: α) Διπλασιάσουμε τη μάζα του. β) Υποδιπλασιάσουμε τη μάζα του. γ) Προσθέσουμε στο σώμα επιπλέον μάζα ίση με το μισό της μάζας που έχει. δ) Αυξήσουμε τη μάζα του σώματος κατά 20%. ε) Μειώσουμε τη μάζα του σώματος κατά 20%.

(Απ.: α) 5m/s^2 . β) 20m/s^2 . γ) $\frac{20}{3}\text{m/s}^2$. δ) $\frac{25}{3}\text{m/s}^2$. ε) $\frac{25}{2}\text{m/s}^2$.)

Συνδυαστικές ασκήσεις με τύπους της ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης

B1.3.5 Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ παρατηρούμε ότι αρχικά ακινητεί και ότι υπό την επίδραση σταθερή δύναμης διανύει σε χρονικό διάστημα 2s απόσταση 10m . Να βρείτε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Αν δεν ήταν σταθερή δύναμη θα μπορούσαμε να απαντήσουμε;

(Απ.: $\Sigma F = 10\text{N}$. Σε αυτή και σε όσες άλλες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τύπους της ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης, οι απαντήσεις είναι έγκυρες μόνο όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή, και άρα η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι σταθερή.)

B1.3.6 Ένα σώμα μάζας $m = 7\text{Kg}$ κινείται οριζόντια με κατεύθυνση προς τα δεξιά και με ταχύτητα 10m/s . Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια συνισταμένη δύναμη, με αποτέλεσμα η ταχύτητά του να γίνει 20m/s , α) ομόρροπη της αρχικής β) αντίρροπη της αρχικής, μετά από $t = 5\text{s}$. Να βρεθεί η συνισταμένη δύναμη που επενεργεί στο σώμα κατά τη διάρκεια της κίνησής του.

(Απ.: α) $\Sigma F = 14\text{N}$. β) $\Sigma F = -42\text{N}$.)

B1.3.7 Ένα σώμα μάζας $m = 5\text{Kg}$ ηρεμεί αρχικά σε οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα επενεργεί σταθερή συνισταμένη δύναμη και σε απόσταση 25m η ταχύτητά του γίνεται 10m/s . Να βρεθεί η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα.
(Απ.: $\Sigma F = 10\text{N}$.)

B1.3.8 Σε ένα σώμα μάζας $m = 5\text{Kg}$ που αρχικά κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα 5m/s προς τα δεξιά επενεργεί σταθερή οριζόντια συνισταμένη δύναμη, και όταν η μετατόπιση του σώματος είναι $\Delta x = \frac{75}{4}\text{m}$, τότε η ταχύτητά του είναι 10m/s . Να βρείτε τη συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στο σώμα.
(Απ.: $\Sigma F = 10\text{N}$.)

B1.3.9 Σε ένα σώμα μάζας $m = 5\text{Kg}$ που αρχικά κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα 5m/s προς τα δεξιά, επενεργεί σταθερή οριζόντια συνισταμένη δύναμη, και όταν η μετατόπιση του σώματος είναι $\Delta x = \frac{9}{4}\text{m}$, τότε η ταχύτητά του είναι α) 4m/s , β) -4m/s . Να βρείτε τη συνισταμένη δύναμη που επενεργεί στο σώμα.
(Απ.: $\Sigma F = -10\text{N}$ και στις δύο περιπτώσεις.)

B1.3.10 Ένα σώμα μάζας $m = 4\text{Kg}$ κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με αρχική ταχύτητα 10m/s . Ποια είναι η συνισταμένη δύναμη που πρέπει να επενεργήσει στο σώμα για να σταματήσει σε: α) 2s . β) 4s ; Ποια είναι η μέση ταχύτητα του σώματος κατά περίπτωση;
(Απ.: α) $\Sigma F = -20\text{N}$. β) $\Sigma F = -10\text{N}$. $v_{\mu} = 5\text{m/s}$ σε κάθε περίπτωση.)

B1.3.11 Ένα σώμα μάζας $m = 4\text{Kg}$ κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με αρχική ταχύτητα 10m/s . Ποια είναι η συνισταμένη δύναμη που πρέπει να επενεργήσει στο σώμα για να σταματήσει σε απόσταση: α) 10m . β) 20m . Ποια είναι η μέση ταχύτητα του σώματος κατά περίπτωση;
(Απ.: α) $\Sigma F = -20\text{N}$. β) $\Sigma F = -10\text{N}$. $v_{\mu} = 5\text{m/s}$ σε κάθε περίπτωση.)

B1.3.12 Ένα σώμα που κινείται με αρχική ταχύτητα v_0 υφίσταται την επίδραση οριζόντιας συνισταμένης δύναμης μέτρου $\Sigma F = 100\text{N}$ που το αναγκάζει να σταματήσει σε κάποια απόσταση. Αν η ταχύτητα του σώματος είναι διπλάσια και θέλουμε να σταματήσει στην ίδια απόσταση ποιο θα πρέπει να είναι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης για να σταματήσει στην ίδια απόσταση; Εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα για το πώς εξαρτάται η απόσταση στην οποία μπορεί να ακινητοποιηθεί ένα όχημα σε σχέση με την αρχική του ταχύτητα, αν υποθεθεί ότι η δύναμη που ακινητοποιεί το αυτοκίνητο είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, όπως πρακτικά συμβαίνει περίπου;
(Απ.: $\Sigma F = 400\text{N}$.)

Εύρεση άγνωστης δύναμης

B1.3.13 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ που βρίσκεται αρχικά ακίνητο, επενεργεί οριζόντια δύναμη $F = 10\text{N}$ με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Παρατηρούμε

ότι το σώμα μετά από $t = 5s$ έχει ταχύτητα: α) $10m/s$ προς τα δεξιά. β) $25m/s$ προς τα δεξιά. γ) $30m/s$ προς τα δεξιά. δ) $10m/s$ προς τα αριστερά. ε) $25m/s$ προς τα αριστερά. στ) $30m/s$ προς τα αριστερά. Να βρείτε κατά περίπτωση αν υπάρχει άλλη δύναμη στο σώμα (έστω ότι αυτή η άλλη δύναμη είναι μία και μοναδική) και να προσδιορίσετε το μέτρο και την κατεύθυνσή της.

(Απ.: α) $F' = -6N$. β) $F' = 0$. γ) $F' = 2N$. δ) $F' = -14N$. ε) $F' = -20N$. στ) $F' = -22N$.)

B1.4 Διαδοχικές δυνάμεις

B1.4.1 Σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $m = 2Kg$ που αρχικά ακινητεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη F για κάποιο χρονικό διάστημα $t = \sqrt{12}s$. Μετά, για το ίδιο χρονικό διάστημα ασκείται διπλάσια δύναμη, ίδιας κατεύθυνσας. Το σώμα διανύει συνολικά απόσταση $90m$. Να βρεθεί η τιμή της δυνάμεως.

(Απ.: $F = 6N$.)

B1.4.2 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2Kg$ που αρχικά είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο ενεργεί οριζόντια δύναμη F η οποία κάποια στιγμή αλλάζει κατεύθυνση. Το σώμα μετά από συνολικά $10s$ και έχοντας διανύσει απόσταση $50m$ ακινητοποιείται. Να βρεθεί το μέτρο της δυνάμεως.

(Απ.: $F = 4N$.)

B1.4.3 Σε ένα σώμα με μάζα $m = 2Kg$ που αρχικά είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο, επενεργεί οριζόντια δύναμη, η οποία κάποια στιγμή αλλάζει κατεύθυνση και διπλασιάζεται κατά μέτρο. Το σώμα μετά από συνολικά $9s$ και έχοντας διανύσει απόσταση $54m$ ακινητοποιείται. Να βρεθεί η τιμή της αρχικής δυνάμεως.

(Απ.: $F = 4N$.)

B1.5 Διαφορετικά σώματα

B1.5.1 Δύο σώματα αρχικά ακίνητα με ίσες μάζες $m = 2Kg$ βρίσκονται σε λείο οριζόντιο δάπεδο, στην ίδια αφετηρία. Στο πρώτο σώμα ενεργεί δύναμη $F = 10N$ προς τα δεξιά ενώ στο δεύτερο σώμα ενεργεί: α) Διπλάσια δύναμη προς τα δεξιά. β) Δύναμη ίδιου μέτρου προς αριστερά. γ) Διπλάσιου μέτρου δύναμη προς τα αριστερά. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t = 10s$.

(Απ.: α) $d = 250m$. β) $d = 500m$. γ) $d = 750m$.)

B2 Βάρος και ελεύθερη πτώση

B2.1 Διαφορά βάρους και μάζας

B2.1.1 Διαθέτουμε μια κιμωλία και ένα θρανίο. Αν τα αφήσουμε από το ίδιο ύψος ταυτόχρονα: α) Σε ποιο από τα δύο σώματα ασκείται μεγαλύτερη δύναμη; β) Ποιο από τα δύο σώματα θα φτάσει πρώτο στο έδαφος; γ) Ποιο από τα δύο σώματα θα φτάσει με μεγαλύτερη ταχύτητα στο έδαφος; δ) Ποιο από τα δύο σώματα έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση;

(Απ.: Για να ξεκαθαρίσουμε ποιο σώμα φτάνει πρώτο στο έδαφος, πάρτε μια κιμωλία και ένα βιβλίο, ή μια τσάντα με βιβλία, ή όποιο άλλο βαρύ αντικείμενο, αρκεί με την πτώση του να μην υπάρχει κίνδυνος τραυματισμού, και αφήστε τα ταυτόχρονα. Ελέγξτε αν πέφτουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Υποθέσεις του τύπου «αν αφήναμε ένα σώμα πεντακοσίων ή πέντε χιλιάδων κιλών τί θα συνέβαινε», δεν έχουμε λόγο να διερευνήσουμε εμείς. Τις έχουν διερευνήσει άλλοι και έχουν πιστοποιήσει ότι συμβαίνει το ίδιο με την κιμωλία: Υφίστανται την ίδια επιτάχυνση με τη βαρύτητα και άρα πέφτουν ταυτόχρονα.)

B2.1.2 Το βάρος που ασκεί η γη στα σώματα οφείλεται στο ότι η γη είναι ένας μαγνήτης. Συμφωνείτε με την πρόταση αυτή;

(Απ.: Για να το ξεκαθαρίσουμε: Οι μαγνητικές δυνάμεις επηρεάζουν ή σώματα που διαρρέονται από ρεύματα, ή το σίδηρο, το νικέλιο και το κοβάλτιο και μερικές ενώσεις, μείγματα και κράματα αυτών. Τα τελευταία καλούνται, όχι τυχαία, και σιδηρομαγνητικά υλικά. Ασθενώς επηρεάζουν δυο ακόμη μέταλλα, και κάποιες ενδεχομένως πολύ εξωτικές ενώσεις, όπως κάποια φουλερένια. Τα υπόλοιπα σώματα δεν επηρεάζονται από τους μαγνήτες. Ούτε το νερό μαγνητίζεται, ούτε εμείς, ούτε το ξύλο, ούτε τα τρόφιμα παθαίνουν τίποτε από τα μαγνητάκια που τοποθετούμε στο ψυγείο. Γι' αυτό και η επιτάχυνση σε ένα μαγνητικό πεδίο εξαρτάται από το είδος του σώματος, συνήθως είναι μηδενική, επειδή στα περισσότερα σώματα δεν ασκούνται σχεδόν καθόλου δυνάμεις από τους μαγνήτες. Αυτά σε αντίθεση με τη βαρύτητα, η οποία προξενεί σε όλα τα σώματα την ίδια επιτάχυνση. Και όπως καταλαβαίνουμε, βαρύτητα και μαγνητισμός δεν έχουν καμία σχέση.)

B2.1.3 Σε ένα διαστημόπλοιο λίγο πριν την εκτόξευσή του γίνονται διάφορα πειράματα (όπως για να διαπιστωθεί η αντοχή του σε εξωτερικές πιέσεις). Σε ένα τέτοιο πείραμα αφαιρείται όλος ο αέρας από το εσωτερικό του. Μέσα στο διαστημόπλοιο αφήνουμε να πέσει μια κιμωλία από κάποιο ύψος, και παράλληλα αφήνουμε μια κιμωλία έξω από το διαστημόπλοιο, στην ατμόσφαιρα, να πέσει από το ίδιο ύψος. α) Ποια από τις δύο κιμωλίες θα φτάσει πρώτη στη δάπεδο; β) Ποια κιμωλία έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση; γ) Σε ποια κιμωλία ασκείται μεγαλύτερη δύναμη; δ) Ποια κιμωλία θα φτάσει με μεγαλύτερη ταχύτητα στο δάπεδο; Αν σε κάποια από τις παραπάνω περιπτώσεις θεωρείτε ότι κάποιο σώμα δε θα κινηθεί, ή ότι δέχεται μηδενική δύναμη, ή ότι γενικώς κάποιο από τα εμφανιζόμενα φυσικά μεγέθη είναι μηδενικό, αναφέρετέ το.

B2.1.4 Τί θα συνέβαινε στο προηγούμενο πρόβλημα αν αφήναμε να πέσουν αντί για κιμωλίες δύο φύλλα χαρτιού, ένα μέσα στο διαστημόπλοιο στο οποίο υπάρχει κενό αέρα, και ένα φύλλο χαρτιού στην ατμόσφαιρα;

B2.1.5 Σε ένα διαστημόπλοιο που ταξιδεύει μακριά από τη γη υπάρχει ατμόσφαιρα στο εσωτερικό του. Το διαστημόπλοιο κινείται πολύ μακριά από το ηλιακό σύστημα με σταθερή ταχύτητα. α) Το βάρος των σωμάτων που βρίσκονται μέσα στο διαστημόπλοιο έχει αλλάξει; β) Η μάζα των σωμάτων έχει αλλάξει; γ) Είναι περισσότερο εύκολο να σπρώξουμε και να επιταχύνουμε ένα ελαφρύ σώμα μέσα στο διαστημόπλοιο από ό,τι ένα βαρύ ή είναι εξίσου εύκολο να επιταχύνουμε και τα δύο σώματα;

B2.2 Ελεύθερη πτώση – εφαρμογές

B2.2.1 Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από κάποιο ύψος. Δίδεται $g = 10 \text{ m/s}^2$. α) Να βρείτε την ταχύτητα που έχει αποκτήσει το σώμα στο τέλος του πρώτου, δεύτερου, και τρίτου δευτερολέπτου και να τη μετατρέψετε σε χιλιόμετρα ανά ώρα. β) Βασιζόμενοι στην απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα να συγκρίνετε την επιτάχυνση της βαρύτητας με την επιτάχυνση ενός γρήγορου αγωνιστικού αυτοκινήτου. γ) Να βρείτε τη μετατόπιση του σώματος στο τέλος του πρώτου, του δεύτερου και του τρίτου δευτερολέπτου της κίνησης.

(Απ.: α) $v_1 = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ Km/h}$, $v_2 = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ Km/h}$, $v_3 = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ Km/h}$. γ) $y_1 = 5 \text{ m}$, $y_2 = 20 \text{ m}$, $y_3 = 45 \text{ m}$.)

B2.2.2 Με βάση τον αριθμό των ορόφων μιας πολυκατοικίας, υπολογίστε κατά προσέγγιση το ύψος της, και κατόπιν βρείτε το χρόνο που χρειάζεται ένα σώμα για να φτάσει από την ταράτσα της πολυκατοικίας στο έδαφος και την ταχύτητα με την οποία πέφτει στο έδαφος. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας.

B2.2.3 Θεωρήστε το ύψος ενός πολύ ψηλού ελληνικού βουνού (2 με 3 χιλιόμετρα ύψος) και υποθέστε ότι έχει διανοιχτεί μια σήραγγα κατακόρυφη στο εσωτερικό του, μέχρι το ύψος της επιφάνειας της θάλασσας. Με γνωστή την επιτάχυνση της βαρύτητας, να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία μπορεί να φτάσει ένα σώμα στο επίπεδο της επιφάνειας της θάλασσας και το χρόνο που χρειάζεται.

B2.2.4 Για ένα σώμα που αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος 125 m πάνω από το έδαφος, να κάνετε τη γραφική της μετατόπισης συναρτήσει του χρόνου και του ύψους από το έδαφος συναρτήσει του χρόνου. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B2.2.5 Να βρείτε το διάστημα που διανύει ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση κατά το 1^ο, 2^ο, 3^ο, ν-οστό δευτερόλεπτο της κίνησής του. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(Απ.: Για το ν-οστό δευτερόλεπτο το διάστημα που διανύει το σώμα σε μέτρα είναι $10\nu - 5$.)

B2.2.6 Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από κάποιο ύψος πάνω από ένα διαμέρισμα. Από την μπαλκονόπορτα του διαμερίσματος οι ένοικοι παρατηρούν το αντικείμενο να πέφτει. Αν το ύψος της πόρτας είναι $2m$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$ και ο χρόνος που βλέπουν οι ένοικοι να διανύει τα $2m$ της πόρτας μέχρι να προσγειωθεί στο έδαφος είναι $0,2s$, να βρεθεί το ύψος πάνω από το ανώτερο σημείο της πόρτας από το οποίο αφέθηκε το σώμα.

(Απ.: $y = 4,05m$.)

B2.3 Βολές

B2.3.1 Ένα σώμα εκτελεί βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0 = 80m/s$. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10m/s^2$, να βρεθούν: α) Η ταχύτητα και η μετατόπισή του τη χρονική στιγμή $t = 1s$. β) Η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος και η τιμή του μέγιστου ύψους. γ) Οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σώμα βρίσκεται σε ύψος $140m$ από το έδαφος και η ταχύτητα που έχει τότε. δ) Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να επιστρέψει στην αφετηρία του και η ταχύτητα που έχει τότε. ε) Η μέση ταχύτητα του σώματος για το χρονικό διάστημα της ανόδου, για το χρονικό διάστημα της καθόδου, και για το συνολικό χρονικό διάστημα.

(Απ.: α) $v = 70m/s$, $y = 75m$. β) $t = 8s$, $y = 320m$. γ) $t_1 = 2s$ με $v_1 = 60m/s$ και $t_2 = 14s$ με $v_2 = -60m/s$. δ) $t = 16s$, $v = -80m/s$. ε) $v_{\mu} = 40m/s$ και στις τρεις περιπτώσεις.)

B2.3.2 Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε ένα σώμα από το έδαφος ώστε να φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος όσο το ύψος μιας σχετικά ψηλής πολυκατοικίας $y = 20m$. Δίνεται $g = 10m/s^2$.

(Απ.: $v_0 = 20m/s$.)

B2.3.3 Ένα σώμα εκτοξεύεται από κάποιο ύψος με αρχική ταχύτητα $v_0 = 30m/s$ προς τα κάτω. α) Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει το σώμα στο έδαφος αν αυτό απέχει από τα σημείο εκτόξευσης $80m$, όπως και ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος. β) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του σώματος από τη στιγμή που το εκτοξεύουμε μέχρι να προσεγγίσει το έδαφος.

(Απ.: α) $v = 50m/s$, $t = 2s$. β) $v_{\mu} = 40m/s$.)

B2.4 Δύο σώματα

B2.4.1 Αφήνουμε δύο σώματα να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση, όχι ταυτόχρονα, αλλά το δεύτερο σώμα δύο δευτερόλεπτα μετά το πρώτο. Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση συναρτήσει του χρόνου αν δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

(Απ.: $d = 20(t-1)$ για $t \geq 2s$ και $d = \frac{1}{2}gt^2$ για $t < 2s$.)

B2.4.2 Αφήνουμε ένα σώμα να εκτελέσει ελεύθερη πτώση από ένα ύψος $80m$ πάνω από το έδαφος και μετά από δύο δευτερόλεπτα εκτοξεύουμε ένα δεύτερο σώμα προς τα κάτω. Ποια πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα του 2^{ου} σώματος ώστε να συναντηθούν ταυτόχρονα στο έδαφος; Δίδεται $g = 10m/s^2$.

(Απ.: $v_0 = 30m/s$.)

B2.4.3 Αφήνουμε ένα σώμα να πέσει από ένα ύψος $y = 180m$. Την ίδια χρονική στιγμή εκτοξεύουμε ένα δεύτερο σώμα από το έδαφος με ταχύτητα v_0 προς τα πάνω. Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το δεύτερο σώμα ώστε να συναντηθούν στον αέρα.

(Απ.: $v_0 = 30m/s$.)

Κεφάλαιο Γ

Δυναμική στο επίπεδο

Γ1 Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα

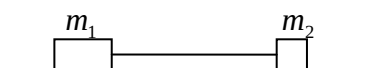
Γ1.1 Θεωρήστε ως μόνα σώματα τη γη και ένα αντικείμενο που πέφτει. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά, και να πείτε ποιες έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης.

Γ1.2 Να επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα για την περίπτωση που το αντικείμενο βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της γης ακινητοποιημένο.

Γ1.3 Θεωρήστε ως μόνα σώματα τη γη και δύο μαγνήτες που βρίσκονται στην επιφάνειά της και έλκονται, αλλά δε μπορούν να κινηθούν εκ αιτίας της παρουσίας τριβών. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται από το κάθε ένα σώμα στο άλλο και να πείτε ποιες έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης.

(Υπόδειξη: Στην τριβή που ασκείται από το δάπεδο σε κάθε έναν από τους μαγνήτες, θα υπάρχει και μια αντίδραση η οποία θα ασκείται από τους μαγνήτες στο δάπεδο.)

Γ1.4 Στο σχήμα παρατηρούμε δύο σώματα, ενδεχομένως με άνισες



μάζες. Το ένα από τα δύο σώματα σύρεται εξ αιτίας κάποιας εξωτερικής δύναμης. Μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει κάτι που τα συνδέει (σκοινί ή ράβδος). Το σκοινί ή η ράβδος ασκεί δυνάμεις και στα δύο σώματα. Είναι αυτές οι δυνάμεις δράση – αντίδραση; Είναι ίσες αυτές οι δυνάμεις; Υπό ποια προϋπόθεση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Απ.: ΔΕΝ είναι δράση – αντίδραση οι δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα του σχοινού, διότι η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε δύο σώματα που αλληλεπιδρούν. Εκτός του ότι αν τυλίξουμε το σκοινί γύρω από μια τροχαλία ή απλώς ένα καρφί, τότε δε θα έχουν καν αντίθετες κατευθύνσεις οι δύο δυνάμεις. Και δεν είναι πάντα ίσες οι δυνάμεις που ασκεί ένα σκοινί ή μία ράβδος στα δύο άκρα της. Είναι ίσες μόνο όταν το σκοινί είναι άμαζο, δηλαδή η μάζα του είναι σημαντικά μικρότερη από τη μάζα των υπόλοιπων σωμάτων του συστήματος ώστε να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, είτε όταν το σύστημα δεν επιταχύνεται. Απλώς για την περίπτωση που το σκοινί είναι άμαζο, χρησιμοποιούμε τον τρίτο του Νεύτωνα για να αποδείξουμε ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα είναι ίσες.)

Γ1.5 Ένας αλεξιπτωτιστής πέφτει προς τη γη με σταθερή ταχύτητα. Σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που υπάρχουν στο σύστημα (γη, αλεξιπτωτιστή, ή όποιο άλλο σώμα νομίζετε ότι υπάρχει στο σύστημα), πείτε ποιες έχουν σχέση δράση αντίδρασης και ποιες είναι μεταξύ τους ίσες και για ποιο λόγο.

(Υπόδειξη: Δεν ξεχνάμε τον αέρα. Είναι και αυτός ένα σώμα απαραίτητο στην περίπτωση μας. Αν δεν υπήρχε ο ατμοσφαιρικός αέρας, και αν δεν είχε ενεργό ρόλο στην κίνηση του αλεξιπτώτου, τότε ο αλεξιπτωτιστής θα έκανε ελεύθερη πτώση. Κάποιες δυνάμεις προκύπτουν ίσες επειδή έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης, κάποιες άλλες επειδή το σώμα όπως εδώ ισορροπεί. Θυμίζουμε ότι ισορροπεί σημαίνει είτε ότι μένει ακίνητο αν αρχικά ήταν ακίνητο, είτε ότι εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση αν αρχικά είχε κάποια ταχύτητα.)

Γ2 Σύνθεση και ανάλυση δυνάμεων. Ισορροπία

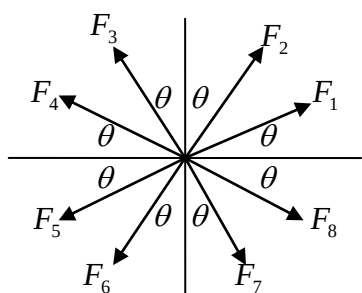
Γ2.1 Σύνθεση πολλών μη συγγραμμικών δυνάμεων

Γ2.1.1 Θεωρούμε ένα σώμα στο οποίο ασκούνται οι εξής δυνάμεις που όλες βρίσκονται πάνω τους άξονες: $F_1 = 47N$ με κατεύθυνση προς τα δεξιά, $F_2 = 44N$ προς τα αριστερά, $F_3 = 80N$ προς τα πάνω, $F_4 = 30N$, $F_5 = 46N$ προς τα κάτω. Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης.

(Απ.: $\Sigma F = 5N$, και $\phi\theta = \frac{4}{3}$, με θ τη γωνία που σχηματίζει η συνισταμένη με τον οριζόντιο άξονα.)

Γ2.2 Ανάλυση δυνάμεων. Σύνθεση δυνάμεων που δε βρίσκονται όλες σε άξονες

Γ2.2.1 Στο σχήμα έχουμε τέσσερις δυνάμεις με μέτρα $10N$, οι οποίες σχηματίζουν τις γωνίες που φαίνονται στο σχήμα. Οι γωνίες είναι όλες ίσες με $\theta = 30^\circ$. Ποιες είναι οι αλγεβρικές τιμές των συνιστωσών των δυνάμεων; (Αλγεβρική τιμή σημαίνει ότι βρίσκουμε το μέτρο του φυσικού μεγέθους μαζί με το πρόσημο που αντιστοιχεί σε αυτό. Κανονικά οι συνιστώσες ενός διανύσματος είναι ούτως ή άλλως αλγεβρικές τιμές, οπότε αυτό που γράψαμε αποτελεί πλεονασμό. Το γράψαμε όμως προς αποφυγή κάθε πιθανής παρεξήγησης.)



(Απ.: $F_{1x} = 5\sqrt{3}N$, $F_{1y} = 5N$, $F_{2x} = 5N$, $F_{2y} = 5\sqrt{3}N$, $F_{3x} = -5N$, $F_{3y} = 5\sqrt{3}N$, $F_{4x} = -5\sqrt{3}N$, $F_{4y} = 5N$ κ.ο.κ.)

Γ2.2.2 Να αναλυθεί μια δύναμη μέτρου $F = 10N$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες οι οποίες θα έχουν ίσα μέτρα.

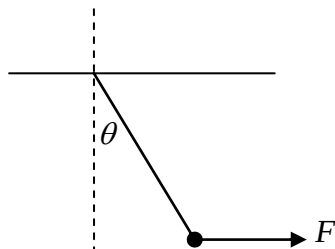
(Απ.: $F_1 = F_2 = 5\sqrt{2}N$.)

Γ2.2.3 Να αναλυθεί μια δύναμη μέτρου $F = 10N$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία θα είναι διπλάσια της άλλης.

(Απ.: $F_1 = 2F_2 = 4\sqrt{5}N$.)

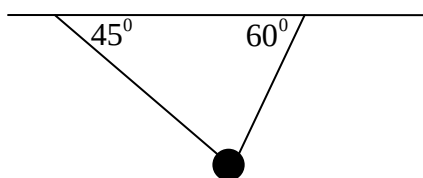
Γ2.3 Ισορροπία στο επίπεδο – Ισορροπία πολλών σωμάτων

Γ2.3.1 Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα σώμα βάρους $B = 100N$ το οποίο ισορροπεί. Αν το σκοινί σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 30° , να βρεθεί η οριζόντια δύναμη και η δύναμη που ασκείται στο σώμα από το σκοινί.



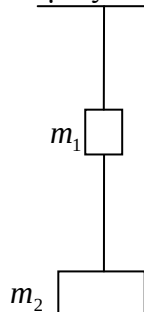
(Απ.: Η δύναμη από το σκοινί είναι: $F_s = \frac{200}{3}\sqrt{3}N$ και $F = \frac{100}{3}\sqrt{3}N$.)

Γ2.3.2 Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα σώμα βάρους $B = 100N$ το οποίο ισορροπεί κρεμασμένο από δύο σκοινιά. Να βρεθούν οι δυνάμεις στα δύο αυτά σκοινιά.



(Απ.: $F_1 = 50(\sqrt{6} - \sqrt{2})N$, η δύναμη που ασκείται από το αριστερό σκοινί και η δύναμη που ασκείται από το δεξιό σκοινί: $F_2 = \sqrt{2}F_1$.)

Γ2.3.3 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται: $m_1 = 3Kg$, $m_2 = 7Kg$, $g = 10m/s^2$ και ότι τα σώματα ισορροπούν. Τα σκοινιά είναι αβαρή. Να βρεθούν οι δυνάμεις που ασκούνται σε όλα τα σκοινιά.



(Απ.: Στο κάτω σκοινί ασκείται δύναμη $70N$ και στο πάνω $100N$.)

Γ3 Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα. Τριβή

Γ3.1 Βασικές αριθμητικές εφαρμογές

Γ3.1.1 Ένα σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F=10\text{N}$ η οποία: α) Είναι οριζόντια. β) Έχει κατεύθυνση λοξά προς τα πάνω και σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία θ για την οποία ισχύει $\sin\theta=0,8$. γ) Έχει κατεύθυνση λοξά προς τα κάτω και σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα για την οποία ισχύει: $\sin\theta=0,8$. Αν $g=10\text{m/s}^2$ να βρείτε την επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα και την τιμή της κάθετης αντίδρασης που ασκείται από το δάπεδο στο σώμα.

(Απ.: α) $a=5\text{m/s}^2$, $N=20\text{N}$. β) $a=4\text{m/s}^2$, $N=14\text{N}$. γ) $a=4\text{m/s}^2$, $N=26\text{N}$.)

Γ3.1.2 Ένα σώμα μάζας $m=50\text{Kg}$ βρίσκεται μέσα σε ανελκυστήρα, ο οποίος: α) Είναι ακίνητος. β) Κινείται με σταθερή ταχύτητα $v=5\text{m/s}$ προς τα πάνω. γ) Κινείται με σταθερή ταχύτητα $v=5\text{m/s}$ προς τα κάτω. δ) Κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a=2\text{m/s}^2$ προς τα πάνω. ε) Κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a=2\text{m/s}^2$ προς τα κάτω. στ) Κινείται με σταθερή επιτάχυνση 10m/s^2 προς τα κάτω. Να βρείτε κατά περίπτωση την τιμή της κάθετης δύναμης που ασκείται από το δάπεδο του ανελκυστήρα στο σώμα. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

(Απ.: α) $N=500\text{N}$. β) $N=500\text{N}$. γ) $N=500\text{N}$. δ) $N=600\text{N}$. ε) $N=400\text{N}$. στ) $N=0$)

Γ3.1.3 Ο ανελκυστήρας του προηγούμενου προβλήματος κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση $a=12\text{m/s}^2$. Τί ακριβώς δυνάμεις θα δεχθεί το σώμα που βρίσκεται μέσα σε αυτόν; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας.

(Απ.: Το σώμα δέχεται δύναμη από την οροφή, αφού ο ανελκυστήρας πέφτει, για οποιονδήποτε λόγο και αν αυτό συμβαίνει, ταχύτερα από τη βαρύτητα. Η δύναμη που δέχεται το σώμα από την οροφή είναι ίση με $N=100\text{N}$.)

Γ3.1.4 Ένα σώμα με μάζα $m=2\text{Kg}$ βρίσκεται μέσα σε έναν ανελκυστήρα. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Το σώμα βρίσκεται πάνω σε μια ζυγαριά, η οποία μετράει δύναμη. Να βρεθεί η δύναμη που δείχνει η ζυγαριά, όταν: α) Ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος. β) Ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα κάτω. γ) Ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω. δ) Ο ανελκυστήρας επιταχύνει προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση 3m/s^2 . ε) Ο ανελκυστήρας επιταχύνει προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση με σταθερή επιτάχυνση 3m/s^2 .

(Απ.: α) 20N . β) 20N . γ) 20N . δ) 14N . ε) 26N .)

Γ3.2 Τριβή

Μεθοδολογικά σχόλια: α) Η τριβή ολίσθησης υπάρχει όταν τα σημεία με τα οποία ακουμπά το σώμα στο δάπεδο ολισθαίνουν και η στατική τριβή όταν αυτά τα σημεία δεν ολισθαίνουν αλλά τείνουν να ολισθήσουν. Δεν ενδιαφέρει την τριβή προς τα πού κινείται το σώμα ολόκληρο, αλλά προς τα πού κινείται ή τείνει να κινηθεί το κατώτερο σημείο του σώματος, εκείνο δηλαδή που ακουμπά στο δάπεδο. Όταν λοιπόν ένας άνθρωπος ξεκινά να κινείται, η τριβή δεν είναι προς τα πίσω, αλλά προς τα μπρος, επειδή το πέλμα του τείνει να κινηθεί προς τα πίσω, άρα η τριβή αντιστέκεται σε αυτή την κίνηση που τείνει να κάνει το πέλμα. Και είναι στατική τριβή και όχι τριβή ολίσθησης, εφόσον το πέλμα δεν γλιστράει στο δάπεδο. β) Η τριβή ολίσθησης είναι πάντα μN . Η κάθετη αντίδραση δεν είναι πάντα ίση με το βάρος. Πιέστε ένα φύλλο χαρτιού με το χέρι σας πάνω στο θρανίο. Για να βρείτε πόσο είναι η κάθετη αντίδραση θα πρέπει να πάρετε την ισορροπία του σώματος στον κατακόρυφο άξονα. Είναι προφανές πάντως πως όταν πιέζουμε το φύλλο του χαρτιού πάνω στο θρανίο η κάθετη αντίδραση είναι πολύ μεγαλύτερη από το βάρος του χαρτιού. Η στατική τριβή δεν είναι πάντα μN , είναι μικρότερη ή ίση από αυτή τη μέγιστη τιμή της. γ) Η στατική τριβή είναι αντίθετη προς τη δύναμη που ασκείται στο σώμα όταν αυτό τείνει να κινηθεί ή απλώς αντίρροπη στην κατεύθυνση που τείνει να κινηθεί το σώμα ως προς το δάπεδο. Η τριβή ολίσθησης είναι αντίρροπη προς την ταχύτητα που έχει το σώμα ως προς το δάπεδο. Δε μας νοιάζει αν στο κινούμενο σώμα ασκούνται και άλλες δυνάμεις και σε ποια κατεύθυνση είναι αυτές, ομόρροπες ή αντίρροπες στην ταχύτητα.

Γ3.2.1 Ένα σώμα βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο και έχει μια αρχική ταχύτητα προς τα δεξιά. Μεταξύ του σώματος και του δαπέδου αναπτύσσεται τριβή. Στο σώμα: α) Δεν ασκείται καμιά οριζόντια δύναμη. β) Ασκείται οριζόντια δύναμη προς τα δεξιά. γ) Ασκείται οριζόντια δύναμη προς τα αριστερά. Να βρείτε κατά περίπτωση τη φορά της τριβής.

(Απ.: Σε κάθε περίπτωση είναι αντίρροπη της κατεύθυνσης στην οποία όντως κινείται το σώμα, άρα είναι προς τα αριστερά.)

Γ3.2.2 Ένα σώμα βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα: α) Δεν ασκείται καμιά οριζόντια δύναμη. β) Ασκείται οριζόντια δύναμη προς τα δεξιά. γ) Ασκείται οριζόντια δύναμη προς τα αριστερά. Να βρείτε την κατεύθυνση της τριβής. Να συγκρίνετε την απάντησή σας με αυτή στο προηγούμενο πρόβλημα και να σχολιάσετε τις διαφορές ανάμεσα στα δύο προβλήματα.

(Απ.: Στην πρώτη περίπτωση δεν υπάρχει τριβή, ενώ στις δύο άλλες περιπτώσεις είναι αντίρροπη της δύναμης. Το συμπέρασμα από τις δύο τελευταίες ασκήσεις είναι αυτό που αναφέραμε στα μεθοδολογικά σχόλια: Αν υπάρχει ταχύτητα, η τριβή είναι αντίρροπη της ταχύτητας, είτε ασκούνται είτε όχι δυνάμεις στο σώμα. Αν δεν έχει το σώμα ταχύτητα, τότε η τριβή γίνεται αντίρροπη της δύναμης.)

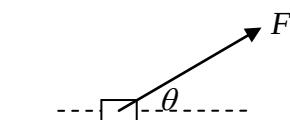
Γ3.2.3 Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο με συντελεστή τριβής $\mu = 0,4$. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη με μέτρο: α) $F = 0$. β) $F = 3\text{N}$. γ) $F = 4,56789\text{N}$. δ) $F = 8\text{N}$. ε) $F = 10\text{N}$. στ) $F = 30\text{N}$. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση την τιμή της επιτάχυνσης του σώματος και την τιμή της τριβής.

(Απ.: α) $a = 0$, $T = 0$. β) $a = 0$, $T = 3N$. γ) $a = 0$, $T = 4,56789N$. δ) $a = 0$, $T = 8N$. ε) $a = 1m/s^2$, $T = 8N$. στ) $a = 11m/s^2$, $T = 8N$.)

Γ3.2.4 Ένα σώμα με μάζα $m = 2Kg$ υφίσταται οριζόντια δύναμη $10N$ και βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο. Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος α) Αν το επίπεδο στο οποίο κινείται το σώμα είναι λείο. β) Αν το επίπεδο έχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$ και το σώμα είναι αρχικά ακίνητο. γ) Αν το επίπεδο έχει τριβή με $\mu = 0,2$ και το σώμα έχει κάποια αρχική ταχύτητα αντίρροπη της δύναμης. δ) Αν το επίπεδο έχει τριβή με $\mu = 0,2$ και το σώμα έχει κάποια αρχική ταχύτητα ομόρροπη της δύναμης. ε) Αν το επίπεδο έχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$ και στο αρχικά ακίνητο σώμα ασκείται δύναμη $1N$. Εξηγήστε τί συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση και ποια είναι τότε η τιμή της τριβής. Δίνεται $g = 10m/s^2$.

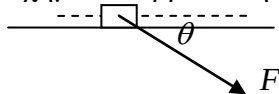
(Απ.: α) $5m/s^2$. β) $3m/s^2$. γ) $7m/s^2$. δ) $3m/s^2$. ε) 0 η επιτάχυνση και $T = 1N$.)

Γ3.2.5 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2Kg$ που αρχικά βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο με συντελεστή τριβής $\mu = 0,25$, ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 20N$ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία θ με $\sin\theta = 0,8$, όπως στο σχήμα. Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος.



(Απ.: $a = 7m/s^2$.)

Γ3.2.6 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2Kg$ που αρχικά βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο με συντελεστή τριβής $\mu = 0,25$, ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 20N$ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία θ με $\sin\theta = 0,8$, όπως στο σχήμα. Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος.



(Απ.: $a = 4m/s^2$.)

Γ3.2.7 Αν στο σώμα του προηγούμενου προβλήματος ασκείται η ίδια δύναμη, αλλά υπό άγνωστη γωνία, ποια είναι η τιμή της γωνίας που πρέπει να σχηματίζει η δύναμη με τον οριζόντιο άξονα, ώστε το σώμα μόλις να χάνει επαφή με το δάπεδο;

(Απ.: $\theta = 90^\circ$, με τη δύναμη προς τα πάνω.)

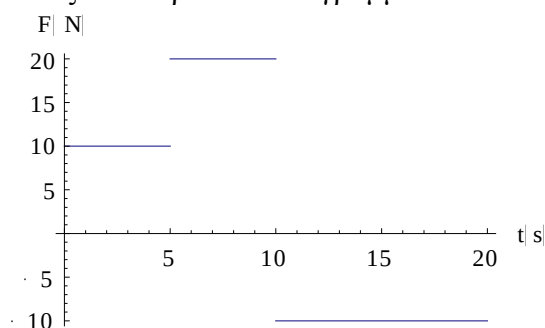
Γ3.2.8 Σώμα μάζας $m = 2Kg$ βρίσκεται σε ανελκυστήρα. Το σώμα κινείται οριζόντια στο δάπεδο του ανελκυστήρα με κάποια ταχύτητα. Αν $g = 10m/s^2$ και ο συντελεστής τριβής μεταξύ του δαπέδου του ανελκυστήρα και του σώματος είναι $\mu = 0,2$, να βρεθεί η τριβή για τις περιπτώσεις που: α) ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή ταχύτητα. β) Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει και επιταχύνεται με $a = 2m/s^2$. γ) Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει και επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου $a = 2m/s^2$.

δ) Ο ανελκυστήρας κατεβαίνει και επιταχύνεται με επιτάχυνση μέτρου $a = 2\text{m/s}^2$. ε) Ο ανελκυστήρας κατεβαίνει και επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου $a = 2\text{m/s}^2$.
(Απ.: α) $T = 4\text{N}$. β) $T = 4,8\text{N}$. γ) $T = 3,2\text{N}$. δ) $T = 3,2\text{N}$. ε) $T = 4,8\text{N}$.)

Γ3.2.9 Σώμα μάζας $m = 5\text{Kg}$ βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο και δεν έχει αρχική ταχύτητα. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 20\text{N}$. Να βρείτε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο $t = 2\text{s}$ αν α) το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και β) αν το οριζόντιο επίπεδο έχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$.
(Απ.: α) $\Delta x = 8\text{m}$. β) $\Delta x = 4\text{m}$.)

Γ3.2.10 Σώμα μάζας $m = 5\text{Kg}$ βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο και δεν έχει οριζόντια ταχύτητα. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F = 20\text{N}$, η οποία μετά από $t = 2\text{s}$ καταργείται. Να βρείτε τότε τη συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει το σώμα και το συνολικό χρόνο μέχρι να σταματήσει, αν στο δάπεδο υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$. Να κάνετε επίσης τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου και μετατόπισης χρόνου από τη στιγμή που το κινητό ξεκινά να κινείται, μέχρι να σταματήσει.
(Απ.: $\Delta x = 8\text{m}$, $t = 4\text{s}$.)

Γ3.2.11 Μία οριζόντια δύναμη μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου όπως στο παρακάτω διάγραμμα:



Να κάνετε για όσο ασκείται η δύναμη τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου και ταχύτητας – χρόνου για το σώμα αν αυτό ξεκινά από την ηρεμία. Το σώμα βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο και η μάζα του είναι $m = 5\text{Kg}$.

Γ3.2.12 Σε ένα σώμα μάζας $m = 5\text{Kg}$ που βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο ασκείται η δύναμη του προηγούμενου προβλήματος. Μεταξύ του σώματος και του δαπέδου υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,1$. Να κάνετε τα διαγράμματα επιτάχυνσης και ταχύτητας ως συνάρτηση με το χρόνο κινείται το σώμα. Δίδεται $g = 10\text{m/s}^2$.

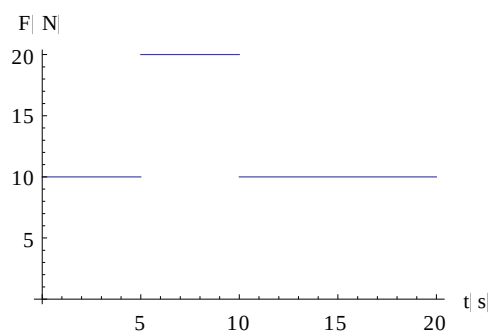
Γ3.2.13 Το σώμα της προηγούμενης άσκησης βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$. Να επαναλάβετε τα αντίστοιχα διαγράμματα.

Γ3.2.14 Να επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση αν το επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,3$.

(Υπόδειξη: Προσέξτε σε αυτή και τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις ότι δεν αντικαθιστάται απλά αριθμούς διαφορετικούς μεταξύ τους σε κάθε άσκηση. Στην

τελευταία άσκηση για παράδειγμα το σώμα δεν κινείται για τα πρώτα πέντε δευτερόλεπτα, επειδή η μέγιστη στατική τριβή είναι μεγαλύτερη από την εφαρμοζόμενη δύναμη. Το σώμα ξεκινά να κινείται από το πέμπτο δευτερόλεπτο και έπειτα, και κάποια στιγμή βέβαια σταματά. Στην επόμενη άσκηση, θα παρατηρήσετε ότι το σώμα, με τα δεδομένα που έχουμε δώσει, ξεκινά μεν να κινείται από το πέμπτο δευτερόλεπτο και μετά, όμως από κάποιο σημείο και έπειτα εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση.)

Γ3.2.15 Ένα σώμα μάζας $m=5\text{Kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο με συντελεστή τριβής $\mu=0,2$. Στο σώμα ασκείται η οριζόντια δύναμη που εικονίζεται στο σχήμα. Να κάνετε τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου και μετατόπισης – χρόνου για το σώμα για όσο χρόνο ασκείται η δύναμη. Δίδεται $g=10\text{m/s}^2$.



Γ3.2.16 Να επαναλάβετε τα διαγράμματα της προηγούμενης άσκησης για όσο χρόνο ασκείται στο σώμα η δύναμη, αν το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο.

Γ3.2.17 Να επαναλάβετε τα διαγράμματα της προηγούμενης άσκησης μέχρι το σώμα να σταματήσει να κινείται αν το οριζόντιο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu=0,3$.

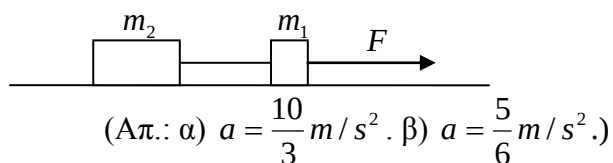
Γ3.2.16 Θεωρήστε έναν άνθρωπο. Ποια είναι η κατεύθυνση της τριβής που ασκείται ανάμεσα στη γη και στα παπούτσια του όταν: α) Ο άνθρωπος κινείται με σταθερή ταχύτητα και δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις. β) Ο άνθρωπος ξεκινά από την ηρεμία και επιταχύνει ενώ δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις. γ) Ο άνθρωπος κινείται με σταθερή ταχύτητα, αλλά υπάρχει ισχυρός άνεμος με κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας του ανθρώπου. Θετική θεωρήστε την κατεύθυνση της κίνησης του ανθρώπου.

Γ3.3 Περισσότερα του ενός σώματα

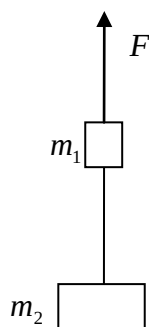
Μεθοδολογικά σχόλια: α) Σε όλα αυτά τα προβλήματα υπάρχει μια κοινή μεθοδολογία: Σημειώνουμε σε κάθε σώμα ξεχωριστά τις δυνάμεις, κατόπιν γράφουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ξεχωριστά για κάθε σώμα. Προκύπτουν συνήθως μερικές εξισώσεις με μερικούς αγνώστους, μεταξύ των οποίων και η επιτάχυνση των σωμάτων. Καλό είναι, αντί να προσπαθήσουμε να λύσουμε ένα σύστημα δύο επί δύο ή τρία ή επί τρία, ή και ακόμη περισσότερων εξισώσεων με άλλο τρόπο, να προσθέσουμε κατά μέλη τις επιμέρους εξισώσεις, ώστε να απαλειφθούν οι λοιποί άγνωστοι, και να μείνει ως μόνο άγνωστο η επιτάχυνση. Φυσικά και κάποια προβλήματα από αυτά λύνονται πιο

εύκολα, ωστόσο καλό είναι να συνηθίζουμε σε μια ενιαία μεθοδολογική προσέγγιση. Φυσικά και υπάρχουν μερικά προβλήματα στα οποία οι εξισώσεις στις οποίες καταλήγουμε δε λύνονται έτσι εύκολα με μια πρόσθεση κατά μέλη, ωστόσο αυτά αντιμετωπίζονται, συνήθως, δύο χρόνια περίπου αργότερα από την πρώτη τάξη του λυκείου. Αν πάντως τύχει μια τέτοια άσκηση, στην οποία το σύστημα των εξισώσεων δεν απλοποιείται αν προσθέσουμε όλες τις εξισώσεις κατά μέλη, τότε θα το αντιμετωπίσουμε όπως αντιμετωπίζουμε όλα τα συνήθη συστήματα εξισώσεων. Υπάρχει μεθοδολογική προσέγγιση και για αυτές τις περιπτώσεις, αλλά δε θα επεκταθούμε ιδιαίτερα. β) Όταν λέμε ότι τα σκοινιά είναι άμαζα, εννοούμε ότι μεταφέρουν δυνάμεις. Το ότι οι δυνάμεις στα δύο άκρα ενός σχοινιού είναι ίσες, ΔΕΝ είναι ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα. Αποδεικνύεται με τη βοήθεια του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, και την παραδοχή επίσης ότι το σκοινί έχει – σχεδόν – μηδενική μάζα, αλλά ΔΕΝ είναι ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα αυτό το πράγμα. Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα λέει ότι η δύναμη που ασκεί το σκοινί στο ένα σώμα και η δύναμη που ασκεί αυτό το ίδιο σώμα στο σκοινί είναι δράση – αντίδραση και άρα τα μέτρα τους είναι ίσα και οι κατευθύνσεις τους αντίθετες. Πολλάκις θα δούμε σχοινιά, όπως στα παρακάτω προβλήματα, στα οποία οι δυνάμεις που ασκούν στα άκρα τους ουδόλως έχουν αντίθετες διευθύνσεις. Αυτά προς αποκατάσταση της Φυσικής (και της) τάξης. γ) Όταν λέμε ότι τα σκοινιά είναι μη εκτατά, (εκτατός = ρηματικό επίθετο σε –τος, που σημαίνει αυτόν που μπορεί να εκταθεί, δηλαδή να τεντωθεί, «χέρια σε έκταση» = «χέρια τεντωμένα») εννοούμε ότι δεν τεντώνουν. Η σημασία αυτού του πράγματος έγκειται στο ότι, αν δεν τεντώνουν, τότε οι επιταχύνσεις και των δύο άκρων του σχοινιού έχουν ίσα μέτρα. Οι επιταχύνσεις δηλαδή των σωμάτων που δένονται στα άκρα ενός σχοινιού είναι ίσες.

Γ3.3.1 Στο σχήμα εικονίζουμε δύο σώματα τα οποία συνδέονται με άμαζο μη εκτατό σχοινί, και βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο. Δίνονται: $m_1 = 2\text{Kg}$, $m_2 = 4\text{Kg}$, $g = 10\text{m/s}^2$ και η οριζόντια δύναμη $F = 20\text{N}$. Να βρείτε την επιτάχυνση των σωμάτων αν: α) Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. β) Το οριζόντιο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,25$.

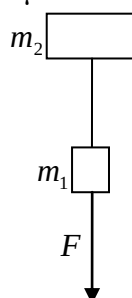


Γ3.3.2 Στο σχήμα δίνονται: $m_1 = 2\text{Kg}$, $m_2 = 5\text{Kg}$, $g = 10\text{m/s}^2$. Να βρεθεί η εξωτερική δύναμη που πρέπει να ασκούμε στο σύστημα των σωμάτων καθώς και η δύναμη που ασκείται στο αβαρές, μη εκτατό σκοινί, αν: α) Τα δύο σώματα ισορροπούν. β) Τα δύο σώματα κινούνται με σταθερή προς τα πάνω επιτάχυνση 2m/s^2 . γ) Τα δύο σώματα κινούνται με σταθερή προς τα κάτω επιτάχυνση 2m/s^2 .



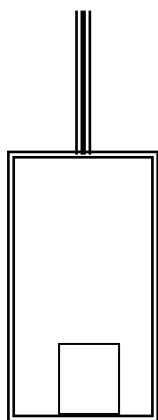
(Απ.: α) $F = 70N$, $F_\sigma = 50N$. β) $F = 84N$, $F_\sigma = 60N$. γ) $F = 56N$, $F_\sigma = 40N$.)

Γ3.3.3 Στο σχήμα δίνονται: $m_1 = 2Kg$, $m_2 = 5Kg$, $g = 10m/s^2$. Να βρεθεί η εξωτερική δύναμη που πρέπει να ασκούμε στο σύστημα των σωμάτων ώστε:
α) Το σκοινί να μένει οριακά τεντωμένο, δηλαδή ίσα – ίσα να μη χαλαρώνει. β) Τα σώματα να κινούνται προς τα κάτω με επιτάχυνση $a = 12m/s^2$.



(Απ.: α) $F = 0$. β) $F = 14N$.)

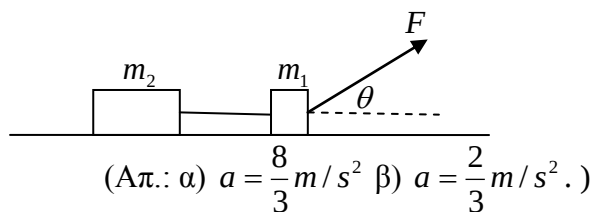
Γ3.3.4 Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε έναν ανελκυστήρα που δένεται με συρματόσχοινο. Δίνεται η μάζα του ανελκυστήρα, $m = 800Kg$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$. Μέσα στον ανελκυστήρα υπάρχει τοποθετημένο σώμα μάζας $m' = 200Kg$.



Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται από το συρματόσχοινο στον ανελκυστήρα αν αυτός: α) Κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω. β) Κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα κάτω. γ) Κινείται επιταχύνοντας προς τα κάτω με επιτάχυνση $2m/s^2$. δ) Κινείται επιταχύνοντας προς τα πάνω με επιτάχυνση $2m/s^2$.

(Απ.: α) $10.000N$. β) $10.000N$. γ) $8.000N$. δ) $12.000N$.)

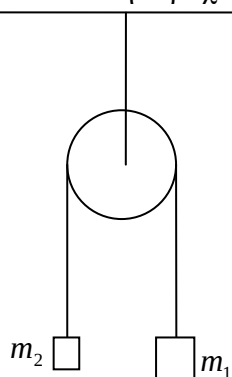
Γ3.3.5 Στο σχήμα εικονίζουμε δύο σώματα τα οποία συνδέονται με άμαζο μη εκτατό σχοινί, και βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο. Δίνονται: $m_1 = 2\text{Kg}$, $m_2 = 4\text{Kg}$, $g = 10\text{m/s}^2$ το μέτρο της δύναμews $F = 20\text{N}$ και η γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα, για την οποία ισχύει: $\sin\theta = 0,8$, $\cos\theta = 0,6$. Να βρείτε την επιτάχυνση των σωμάτων αν: α) Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. β) Το οριζόντιο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,25$.



Γ3.3.6 Να λύσετε το προηγούμενο πρόβλημα αν η δύναμη εφαρμόζεται στο σώμα m_2 .

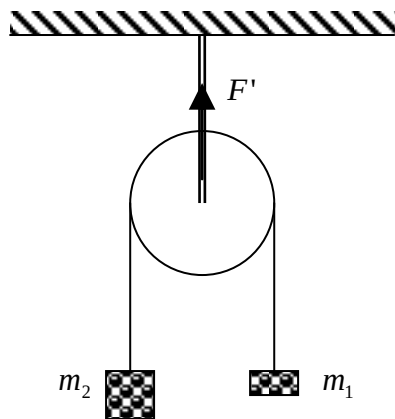
(Απ.: α) $a = \frac{8}{3}\text{m/s}^2$ β) $a = \frac{2}{3}\text{m/s}^2$.)

Γ3.3.7 Στο σχήμα εικονίζουμε δύο σώματα με μάζες $m_1 = 3\text{Kg}$, $m_2 = 2\text{Kg}$, ενώ η τροχαλία θεωρείται άμαζη. Να βρεθούν: α) Η επιτάχυνση των σωμάτων αν το σχοινί μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές γύρω από την τροχαλία. β) Η δύναμη που πρέπει να ασκείται στην τροχαλία προκειμένου αυτή να ισορροπεί. γ) Αν για κάποιο λόγο το σχοινί ακινητοποιηθεί (λόγω τριβών) στην τροχαλία, με αποτέλεσμα να μην κινείται κανένα σώμα, ποια είναι τότε η δύναμη που πρέπει να ασκείται στην τροχαλία προκειμένου αυτή να ισορροπεί; Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.



(Απ.: α) $a = 2\text{m/s}^2$ β) $F = 48\text{N}$ γ) $F = 50\text{N}$.)

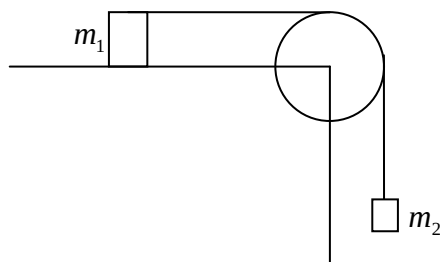
Γ3.3.8 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται: $m_1 = 1\text{Kg}$, $m_2 = 3\text{Kg}$, $g = 10\text{m/s}^2$ και ότι τα σχοινιά (και η τροχαλία) είναι χωρίς μάζα.



Βρείτε α) Την επιτάχυνση του συστήματος. β) Τη δύναμη που ασκείται από καθένα από τα σχοινιά στα σώματα. γ) Τη δύναμη F' που ασκεί το χοντρό σχοινί που κρατάει την τροχαλία.

(Απάντηση: α) $5m/s^2$. β) $15N$. γ) $30N$.)

Γ3.3.9 Στο σχήμα εικονίζουμε δύο σώματα με μάζες $m_1 = 3Kg$, $m_2 = 2Kg$, ενώ η τροχαλία θεωρείται άμαζη και το οριζόντιο επίπεδο λείο. Να βρεθούν: α) Η επιτάχυνση των σωμάτων αν το σχοινί μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές γύρω από την τροχαλία. β) Η δύναμη που πρέπει να ασκείται στην τροχαλία προκειμένου αυτή να ισορροπεί αν τα σχοινιά είναι μεταξύ τους κάθετα. γ) Αν για κάποιο λόγο το σχοινί ακινητοποιηθεί (λόγω τριβών που θα εμφανιστούν στο σώμα μάζας m_1 με το οριζόντιο δάπεδο), με αποτέλεσμα να μην κινείται κανένα σώμα, ποια είναι τότε η δύναμη που πρέπει να ασκείται στην τροχαλία προκειμένου αυτή να ισορροπεί; Δίνεται $g = 10m/s^2$.

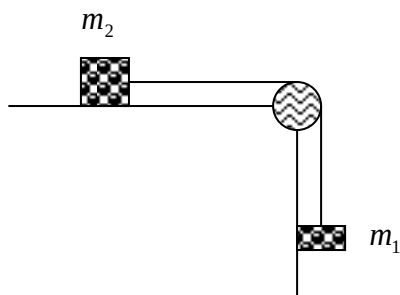


(Απ.: α) $a = 4m/s^2$. β) $F = 12\sqrt{2}N$. γ) $F = 20\sqrt{2}N$.)

Γ3.3.10 α) Να λύσετε το πρώτο ερώτημα του προηγούμενου προβλήματος αν στο σώμα που βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$. β) Ποιος είναι ο ελάχιστος απαιτούμενος συντελεστής τριβής ώστε το σύστημα των δύο σωμάτων να ισορροπήσει;

(Απ.: α) $a = 1m/s^2$. β) $\mu = \frac{2}{3}$.)

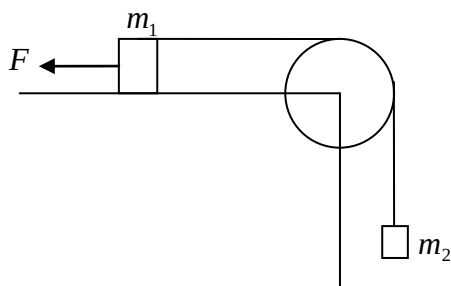
Γ3.3.11 Στο σχήμα βλέπουμε δύο σώματα με μάζες $m_1 = 1Kg$ που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, $m_2 = 3Kg$. Δίνεται $g = 10m/s^2$.



Τα σχοινιά είναι αβαρή, όπως και η τροχαλία. Να βρεθούν: α) Η επιτάχυνση του συστήματος αν δεν υπάρχουν τριβές. β) Η δύναμη που ασκείται στο σχοινί αν δεν υπάρχουν τριβές. γ) Η επιτάχυνση του συστήματος αν στο σώμα m_2 ασκείται τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 1/6$. δ) Η δύναμη στο σχοινί αν υπάρχει η παραπάνω τριβή.

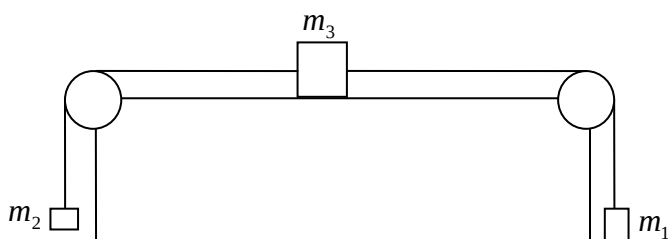
(Απ.: α) $2,5m/s^2$. β) $7,5N$. γ) $1,25m/s^2$. δ) $8,75N$.)

Γ3.3.12 Για το παρακάτω σύστημα σωμάτων δίνονται: $m_1 = 3Kg$, $m_2 = 2Kg$, τροχαλία άμαξη και το οριζόντιο επίπεδο λείο, $g = 10m/s^2$. Να βρεθεί η τιμή της οριζόντιας δυνάμεως F που πρέπει να ασκείται στο m_1 ώστε το m_2 να ανεβαίνει με επιτάχυνση που έχει μέτρο ίσο με την επιτάχυνση της βαρύτητας.



(Απ.: $F = 70N$.)

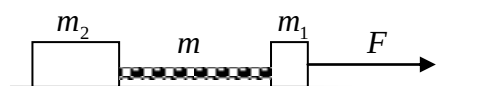
Γ3.3.13 Για το παρακάτω σύστημα σωμάτων δίνονται: $m_1 = 3Kg$, $m_2 = 2Kg$, $m_3 = 5Kg$, $g = 10m/s^2$, και ότι το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Να βρεθεί η τιμή της επιτάχυνσης των σωμάτων.



(Απ.: $a = 1m/s^2$.)

Γ3.3.14 Και τώρα θα δείξουμε ότι μόνο αν ένα σχοινί έχει μηδενική μάζα, δηλαδή μάζα τόσο μικρή ώστε να μπορεί να θεωρηθεί μηδενική, τότε και μόνο τότε μεταφέρει δυνάμεις, τότε δηλαδή και μόνο τότε οι δυνάμεις στα άκρα του σχοινιού είναι ίσες, εφόσον αυτό κινείται. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο σώματα με μάζες m_1 , m_2 τα οποία βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα δύο

σώματα συνδέονται με σχοινί μάζας m . Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο άκρα του σχοινιού, αν στο σύστημα ασκείται μια εξωτερική δύναμη F όπως στο σχήμα. Υποθέστε ότι το σχοινί ακουμπά στο δάπεδο (φανταστείτε το σαν μια βαριά αλυσίδα που συνδέει τα δύο σώματα), ώστε να διατηρείται οριζόντιο.



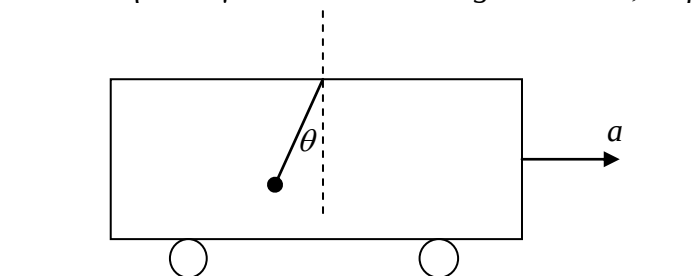
(Απ.: $F_1 = \frac{m + m_2}{m + m_1 + m_2} F$, για τη δύναμη που ασκείται στο άκρο του σχοινιού

που συνδέεται με το σώμα m_1 , και $F_2 = \frac{m_2}{m + m_1 + m_2} F$, για τη δύναμη που ασκείται

στο άκρο του σχοινιού που συνδέεται με το άλλο σώμα. Παρατηρούμε ότι μόνο αν η μάζα του σχοινιού είναι μηδενική, τότε οι δύο δυνάμεις γίνονται ίσες.)

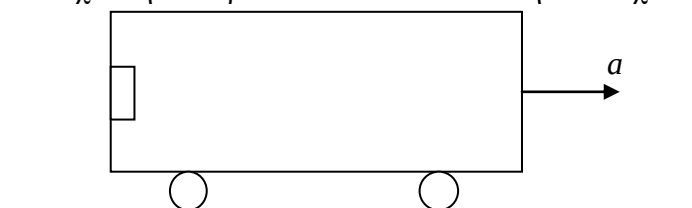
Γ3.4 Κεκλιμένα επίπεδα και άλλες απαιτητικές ασκήσεις

Γ3.4.1 Μέσα σε ένα τρένο που επιταχύνεται υπάρχει ένα φωτιστικό, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε σημειακό σώμα. Λόγω της επιτάχυνσης του τρένου, κάποιος παρατηρεί ότι το φωτιστικό εκτρέπεται από την κατακόρυφη διεύθυνση κατά γωνία $\theta = 30^\circ$. Αν $g = 10 \text{ m/s}^2$, να βρεθεί η επιτάχυνση του τρένου.



(Απ.: $a = 10 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}^2$.)

Γ3.4.2 Στο πίσω μέρος του τρένου βρίσκεται ένα σώμα. Εξ αιτίας της επιτάχυνσης που αναπτύσσει το τρένο και του συντελεστή τριβής που υπάρχει ανάμεσα στην επιφάνεια του τοιχώματος του τρένου και στο σώμα, το σώμα δεν πέφτει. Να βρείτε τον ελάχιστο απαιτούμενο συντελεστή τριβής, με γνωστή την επιτάχυνση του τρένου $a = 5 \text{ m/s}^2$ και την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

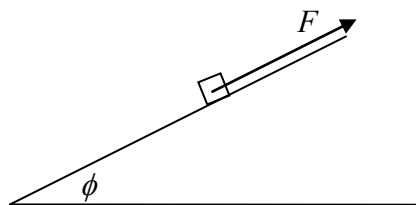


(Απ.: $\mu = 2$. Σημειώτεον ότι ο αστικός μύθος πως ο συντελεστής τριβής πρέπει να είναι μικρότερος της μονάδας είναι ό,τι τον χαρακτηρίσαμε: Αστικός μύθος και τίποτε περισσότερο. Συνήθως ο συντελεστής τριβής είναι μικρότερος της μονάδας. Αν υπάρχει αλευρόκολλα στο δάπεδο, ή όποιο άλλο κολλώδες υλικό, ο συντελεστής τριβής μπορεί να γίνει όσο μεγάλος θέλει.)

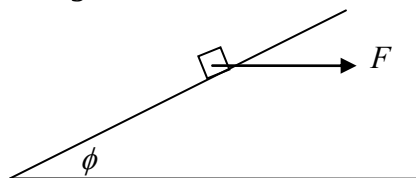
Γ3.4.3 Ένα σώμα βρίσκεται ακίνητο σε κεκλιμένο επίπεδο με κλίση θ . Αν δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g , να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος αν: α) Δεν υπάρχει τριβή. β) Υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής μ . γ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής ώστε το σώμα μόλις να ολισθαίνει;

(Απ.: α) $a = g\eta\mu\theta$. β) $a = g(\eta\mu\theta - \mu\sigma\upsilon\nu\theta)$. γ) $\mu = \eta\phi\theta$.)

Γ3.4.4 Σώμα μάζας $m = 5\text{Kg}$ βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης ϕ για την οποία ισχύει: $\eta\mu\phi = 3/5$, $\sigma\upsilon\nu\phi = 4/5$. Να βρεθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος: α) Αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο. β) Αν το κεκλιμένο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$ και το σώμα αφήνεται από την ηρεμία. γ) Αν το κεκλιμένο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$ και στο σώμα έχει δοθεί κάποια ταχύτητα προς τα πάνω. δ) Αν το κεκλιμένο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$ και στο σώμα έχει δοθεί κάποια ταχύτητα προς τα κάτω. ε) Αν το κεκλιμένο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής με $\mu = 0,8$ και το σώμα είναι αρχικά ακίνητο. στ) Αν το κεκλιμένο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,8$ και στο σώμα έχει δοθεί κάποια αρχική ταχύτητα προς τα πάνω. ζ) Αν στο σώμα ασκείται δύναμη μέτρου $F = 80\text{N}$ με τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και φορά προς τα πάνω χωρίς να υπάρχει τριβή, όπως στο σχήμα.



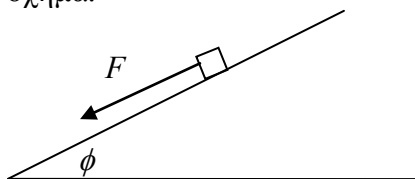
η) Αν το κεκλιμένο επίπεδο έχει τριβή με $\mu = 0,5$, στο σώμα ασκείται δύναμη $F = 80\text{N}$ παράλληλα προς το κεκλιμένο με φορά προς τα πάνω και το σώμα αρχικά είναι ακίνητο. θ) Αν ισχύουν τα δεδομένα του (η) αλλά το σώμα έχει μια αρχική ταχύτητα προς τα κάτω. ι) Αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο και στο σώμα που αρχικά ηρεμεί ασκείται δύναμη όπως στο σχήμα, οριζόντια, μέτρου $F = 125\text{N}$, όπως στο αμέσως παρακάτω σχήμα. ια) Αν το σώμα ξεκινά από την ηρεμία, του ασκείται δύναμη $F = 125\text{N}$ όπως στο σχήμα, και υπάρχει και τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = \frac{1}{5}$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.



(Απ.: α) 6m/s^2 . β) 2m/s^2 . γ) 10m/s^2 . δ) 2m/s^2 . ε) 0. στ) $12,4\text{m/s}^2$. ζ) 10m/s^2 . η) 6m/s^2 . θ) 14m/s^2 . ι) 14m/s^2 . ια) $9,4\text{m/s}^2$.)

Γ3.4.5 Για ένα σώμα που βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο δίνονται: $m = 5\text{Kg}$, $\eta\mu\theta = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,8$, $g = 10\text{m/s}^2$. Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος αν: α) Το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο. β) Το κεκλιμένο επίπεδο

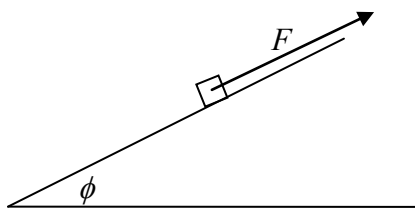
παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = \frac{1}{4}$. Στα υπόλοιπα ερωτήματα θεωρήστε ότι υπάρχει τριβή με τον παραπάνω συντελεστή τριβής. γ) Ασκείται δύναμη μέτρου $F = 10N$ στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου με φορά προς τα κάτω, όπως στο σχήμα.



δ) Η δύναμη έχει μέτρο $F = 15N$. ε) Η δύναμη έχει μέτρο $F = 20N$.

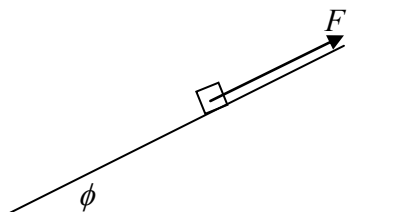
(Απ.: α) $a = 6m/s^2$. β) $a = 4m/s^2$. γ) $a = 6m/s^2$. δ) $a = 7m/s^2$. ε) $a = 8m/s^2$.)

Γ3.4.6 Για το σώμα που βρίσκεται στο κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος δίνονται: $m = 5Kg$, $\eta\mu\theta = 0,6$, $\sigma\nu\theta = 0,8$, $g = 10m/s^2$. Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος καθώς και το μέτρο και η κατεύθυνση της τριβής αν η ασκούμενη δύναμη έχει τη διεύθυνση του κεκλιμένου, φορά προς τα πάνω, και μέτρο: α) $F = 10N$. β) $F = 15N$. γ) $F = 20N$. δ) $F = 25N$. ε) $F = 30N$. στ) $F = 35N$ ζ) $F = 40N$. η) $F = 45N$. θ) $F = 50N$.)



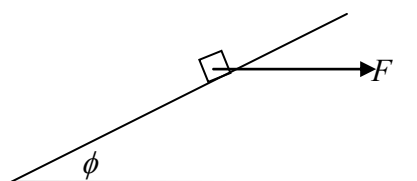
(Απ.: α) $a = 2m/s^2$ προς τα κάτω, $T = 10N$ προς τα πάνω. β) $a = 1m/s^2$ προς τα κάτω, $T = 10N$ προς τα πάνω. γ) $a = 0$, $T = 10N$ προς τα πάνω. δ) $a = 0$, $T = 5N$ προς τα πάνω. ε) $a = 0$, $T = 0$. στ) $a = 0$, $T = 5N$ προς τα κάτω. ζ) $a = 0$, $T = 10N$. η) $a = 1m/s^2$ προς τα πάνω, $T = 10N$ προς τα κάτω. θ) $a = 2m/s^2$ προς τα πάνω, $T = 10N$ προς τα κάτω.)

Γ3.4.7 Σώμα μάζας $m = 5Kg$ βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία θ για την οποία ισχύει $\eta\mu\theta = 0,6$ και $\sigma\nu\theta = 0,8$. Αν υπάρχει συντελεστής τριβής ίσος με $\mu = \frac{1}{4}$, να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της δυνάμεως F που μπορεί να ασκείται στο σώμα ώστε αυτό να μην ολισθαίνει, αν η δύναμη είναι προς τα πάνω όπως στο σχήμα, στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου. Τί θα συμβεί στο σώμα αν ασκηθεί κάποια δύναμη με τιμή ενδιάμεση της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής για να μην ολισθαίνει; Τί έχετε να σχολιάσετε για την τιμή της τριβής για όλες τις ενδιάμεσες τιμές της δύναμης F ; Για ποια τιμή της δυνάμεως η τριβή μηδενίζεται;



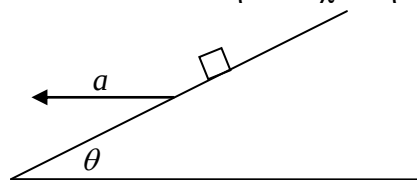
(Απ.: $F_{\min} = 20N$, $F_{\max} = 40N$. Για όλες τις ενδιάμεσες τιμές το σώμα δεν ολισθαίνει επίσης. Η τριβή αποκτά τη μέγιστη τιμή της για την περίπτωση που η δύναμη γίνεται μέγιστη είτε ελάχιστη. Για όλες τις άλλες περιπτώσεις, η τριβή είναι μικρότερη της μέγιστης. Η τριβή μηδενίζεται όταν $F = 30N$.)

Γ3.4.8 Να λύσετε το προηγούμενο πρόβλημα, με τα δεδομένα που σε αυτό δίνονται για την περίπτωση που η δύναμη έχει οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα:



(Απ.: $F_{\min} = \frac{550}{23}N = 23,9N$. $F_{\max} = \frac{950}{17}N = 55,9N$. Η τριβή μηδενίζεται όταν $F = 37,5N$.)

Γ3.4.9 Σώμα βρίσκεται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο. Το κεκλιμένο επίπεδο επιταχύνεται όμως, όπως στο σχήμα. Αν δίνεται ότι $\eta\mu\theta = 0,6$, $\sigma\nu\theta = 0,8$, να βρείτε την τιμή της επιτάχυνσης ώστε το σώμα να μην ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

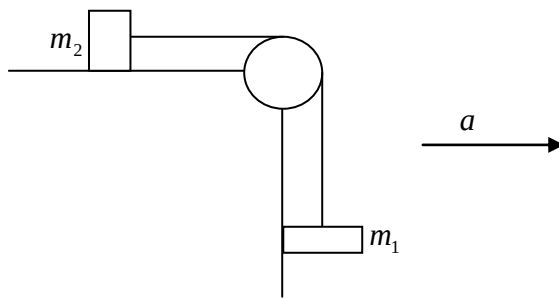


(Απ.: $a = 7,5m/s^2$.)

Γ3.4.10 Σώμα βρίσκεται στο κεκλιμένο επίπεδο του προηγούμενου προβλήματος, το οποίο όμως τώρα έχει τριβή. Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της επιτάχυνσης του κεκλιμένου επιπέδου, ώστε το σώμα να ισορροπεί. Γνωστά είναι η γωνία κλίσης του κεκλιμένου θ , η επιτάχυνση της βαρύτητας, και ο συντελεστής τριβής.

(Απ.: $a_{\min} = g \frac{\eta\mu\theta - \mu\sigma\nu\theta}{\sigma\nu\theta + \mu\eta\mu\theta}$, $a_{\max} = g \frac{\eta\mu\theta + \mu\sigma\nu\theta}{\sigma\nu\theta - \mu\eta\mu\theta}$.)

Γ3.4.11 Στο σχήμα δίνονται: $m_1 = 5Kg$, $m_2 = 2Kg$, ότι το οριζόντιο και το κατακόρυφο επίπεδο είναι λείο και $g = 10m/s^2$. Το σύστημα όλο επιταχύνεται όπως φαίνεται στο σχήμα (φανταστείτε ότι είναι ένα τραπέζι με ροδάκια, ή ένα τραπέζι μέσα σε ένα επιταχυνόμενο τρένο). Ποια πρέπει να είναι η οριζόντια επιτάχυνση του συστήματος ώστε να μην ολισθαίνει το σώμα μάζας m_2 ως προς το οριζόντιο επίπεδο;



(Απ.: $a = 25\text{m/s}^2$.)

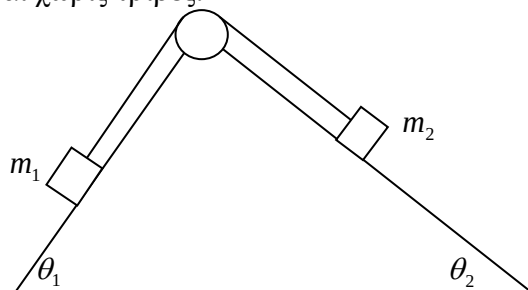
Γ3.4.12 Θεωρήστε τώρα ότι στο πρόβλημα του προηγούμενου σχήματος με $m_1 = 5\text{Kg}$, $m_2 = 2\text{Kg}$, $g = 10\text{m/s}^2$, το οριζόντιο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$, ενώ το κατακόρυφο επίπεδο είναι λείο. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη επιτάχυνση του συστήματος των σωμάτων ώστε να μην ολισθαίνουν τα σώματα ως προς τις επιφάνειες του τραπέζιου.

(Απ.: $a_{\min} = 20\text{m/s}^2$, $a_{\max} = 30\text{m/s}^2$.)

Γ3.4.13 Θεωρήστε ότι στο προηγούμενο πρόβλημα $m_1 = 5\text{Kg}$, $m_2 = 2\text{Kg}$, $g = 10\text{m/s}^2$, αλλά το οριζόντιο επίπεδο είναι τώρα λείο ενώ το κατακόρυφο έχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη επιτάχυνση του συστήματος ώστε κανένα σώμα να μην ολισθαίνει ως προς τα επίπεδα που δίνονται.

(Απ.: $a_{\min} = \frac{100}{9}\text{m/s}^2$. Μέγιστη επιτάχυνση δεν υπάρχει, μπορούμε να επιταχύνουμε όσο θέλουμε το σύστημα, χωρίς να χάνουν επαφή τα σώματα.)

Γ3.4.14 Να βρείτε την επιτάχυνση των σωμάτων του σχήματος. Δίνονται: $m_1 = 5\text{Kg}$, $\eta\mu\theta_1 = 0,8$, $\sigma\upsilon\nu\theta_1 = 0,6$, $m_2 = 4\text{Kg}$, $\sigma\upsilon\nu\theta_2 = 0,8$, $\eta\mu\theta_2 = 0,6$. Τα κεκλιμένα επίπεδα είναι λεία, τα σκοινιά μη εκτατά και άμαζα, η τροχαλία άμαζη και χωρίς τριβές.

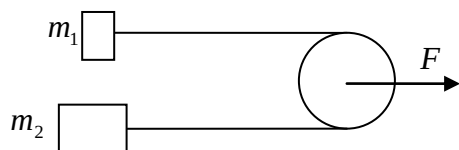


(Απ.: $a = \frac{16}{9}\text{m/s}^2$.)

Γ3.4.15 Να λύσετε το προηγούμενο πρόβλημα αν μεταξύ των σωμάτων και των κεκλιμένων επιπέδων αναπτύσσεται τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = \frac{4}{31}$.

(Απ.: $a = \frac{8}{9}\text{m/s}^2$.)

Γ4.3.16 Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα βοηθητικό κυλινδρικό σώμα μάζας $M = 5\text{Kg}$, και δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2\text{Kg}$ και $m_2 = 3\text{Kg}$, όπως στο σχήμα. Θεωρήστε ότι το σκοινί λόγω τριβών δε μπορεί να κινηθεί γύρω από την τροχαλία. (Μπορείτε και να θεωρήσετε το σκοινί κολλημένο στην τροχαλία.) Να βρείτε την επιτάχυνση του κάθε σώματος, αν $F = 60\text{N}$. Βρείτε επίσης την επιτάχυνση αν θεωρήσουμε τη μάζα του κυλινδρικού σώματος μηδενική.

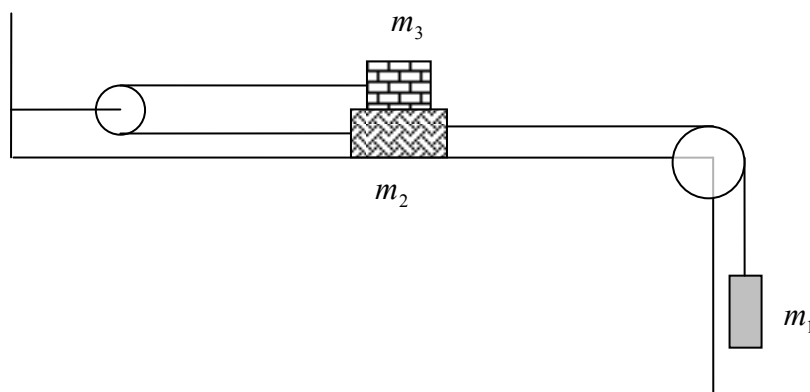


(Απ.: $a = 6\text{m/s}^2$ για όλα τα σώματα. Αν η μάζα του κυλινδρικού σώματος θεωρηθεί μηδενική, τότε $a = 12\text{m/s}^2$ για όλα τα σώματα.)

Γ3.4.17 Θεωρήστε το σχήμα του προηγούμενου προβλήματος. Υποθέστε ότι το κυλινδρικό σώμα έχει πολύ μικρή μάζα, που άρα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, και ότι το σκοινί μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, χωρίς τριβές γύρω από το κυλινδρικό σώμα. Να βρείτε την επιτάχυνση κάθε σώματος.

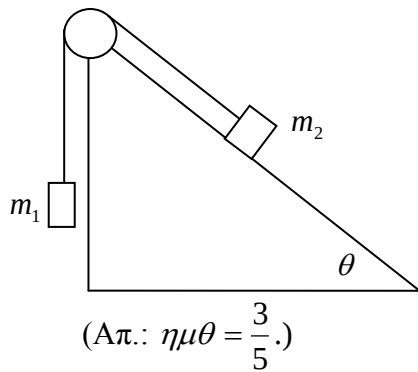
(Απ.: $a_1 = 15\text{m/s}^2$, $a_2 = 10\text{m/s}^2$.)

Γ3.4.18 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται: Οι μάζες των σωμάτων m_1 , m_2 , m_3 , η επιτάχυνση της βαρύτητας g , ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος 2 και του δαπέδου μ_1 και ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σωμάτων 2 και 3 μ_2 . Οι τροχαλίες είναι χωρίς μάζα και τα σχοινιά άμαζα και μη εκτατά. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κάθε σώματος.

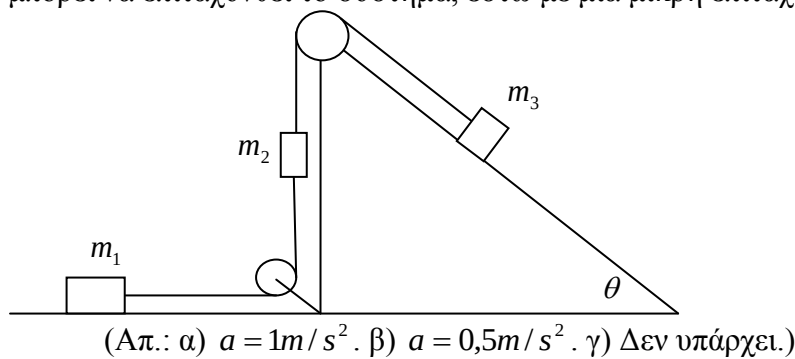


(Απ.: $a = \frac{m_1 g - \mu_1 (m_2 + m_3) g - 2\mu_2 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$.)

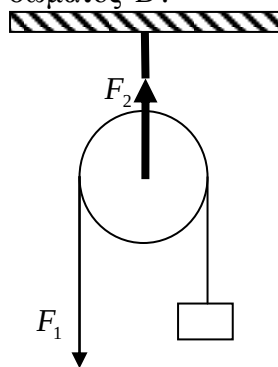
Γ3.4.19 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται: $m_1 = 3\text{Kg}$, $m_2 = 5\text{Kg}$ και ότι το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο. Να βρεθεί η γωνία εκείνη για την οποία τα σώματα ισορροπούν.



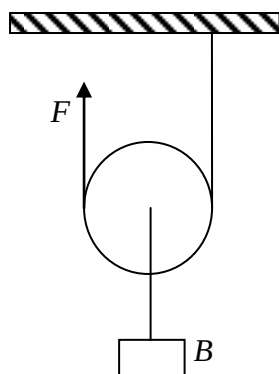
Γ3.4.20 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται: $m_2 = 1\text{Kg}$, $m_3 = 4\text{Kg}$, $\theta = 30^\circ$, $g = 10\text{m/s}^2$, ενώ τα επίπεδα είναι όλα λεία. Να βρεθεί η επιτάχυνση του συστήματος αν: α) $m_1 = 5\text{Kg}$. β) $m_1 = 15\text{Kg}$. γ) Υπάρχει περίπτωση η μάζα m_1 να είναι τόσο μεγάλη, ώστε, με δεδομένο ότι το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο, να μη μπορεί να επιταχυνθεί το σύστημα, έστω με μια μικρή επιτάχυνση;



Γ3.4.21 Στο παρακάτω σχήμα, η αβαρής τροχαλία ισορροπεί. Να βρεθούν: α) Η δύναμη που ασκείται από το σκοινί. β) Η δύναμη που ασκεί στην τροχαλία το χοντρό σκοινί που τη συγκρατεί από την οροφή. Δίνεται το βάρος του σώματος Β.

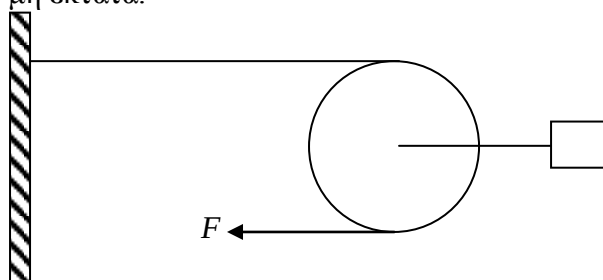


Γ3.4.22 Στο παρακάτω σχήμα, με γνωστό το βάρος του σώματος Β, να βρείτε τη δύναμη που πρέπει να ασκούμε, ώστε το σύστημα να ισορροπεί, αν η τροχαλία α) έχει μηδενικό βάρος, β) βάρος Β'.



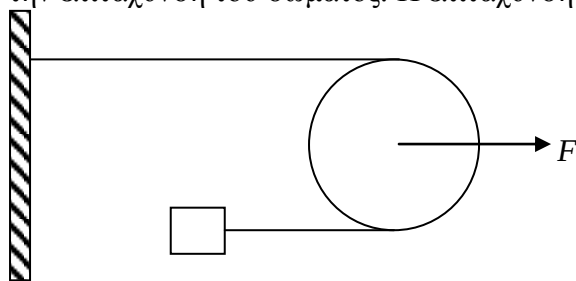
(Απ.: α) $F = \frac{B}{2}$. β) $F = \frac{B + B'}{2}$.)

Γ3.4.23 Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την κάτοψη μιας τροχαλίας που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν γνωρίζουμε τη δύναμη $F = 20N$ που ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού και τη μάζα του σώματος $m = 4Kg$, να βρείτε την επιτάχυνσή του. Όπως σε όλες τις ασκήσεις που έχουμε κάνει, εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά, η τροχαλία θεωρείται άμαζη και τα σχοινιά άμαζα και μη εκτατά.



(Απ.: $a = 10m/s^2$.)

Γ3.4.24 Στο παρακάτω σχήμα έχουμε πάλι την κάτοψη μιας αβαρούς τροχαλίας που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα όμως και η δύναμη βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις. Αν $F = 20N$ και $m = 4Kg$ να βρείτε και πάλι την επιτάχυνση του σώματος. Η επιτάχυνση της τροχαλίας πόση είναι;

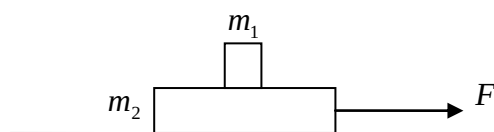


(Απ.: $a = 2,5m/s^2$. Για την επιτάχυνση της τροχαλίας λάβετε υπόψη σας ότι τα σχοινιά είναι μη εκτατά, οπότε είναι διπλάσια από την επιτάχυνση του σώματος.)

Γ3.4.25 Στο σχήμα έχουμε δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2Kg$ και $m_2 = 5Kg$. Τα σώματα έχουν σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Στο κάτω σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F , ενώ μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει συντελεστής τριβής με $\mu = 0,2$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της δύναμews ώστε το πάνω σώμα να μην ολισθαίνει ως προς το κάτω, αν το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο κινείται το m_1 α)

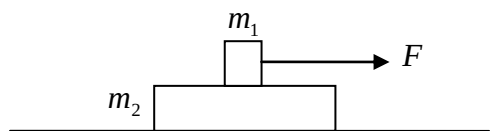
είναι λείο, β) παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu' = \frac{1}{7}$. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Ποια είναι κατά περίπτωση αυτή η μέγιστη επιτάχυνση που επιτυγχάνουν τα δύο σώματα;



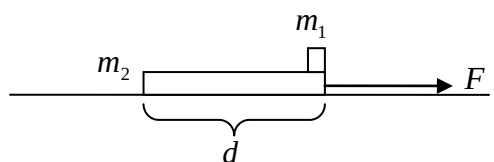
(Απ.: α) $F = 14 \text{ N}$. β) $F = 24 \text{ N}$. $a = 2 \text{ m/s}^2$ και στις δύο περιπτώσεις.)

Γ3.4.26 Να επαναλάβετε το προηγούμενο πρόβλημα για την περίπτωση που η οριζόντια δύναμη ασκείται στο πάνω σώμα, όπως στο σχήμα:



(Απ.: α) $a = 0,8 \text{ m/s}^2$, $F = 5,6 \text{ N}$. β) Δεν μπορεί να μην ολισθαίνει το ένα σώμα ως προς το άλλο, εξ αιτίας του συνδυασμού τιμών που έχουμε δώσει: Σχετικά μεγάλη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής με το οριζόντιο δάπεδο, η οποία δε μπορεί να υπερνικηθεί από την τριβή που ασκείται μεταξύ των δύο σωμάτων, και άρα το κάτω σώμα δε μπορεί να επιταχυνθεί.)

Γ3.4.27 Ασκούμε δύναμη $F = 19 \text{ N}$ στο σώμα, αδιαφορώντας για το αν το πάνω σώμα ολισθήσει ως προς το κάτω. Αν $m_1 = 2 \text{ Kg}$, $m_2 = 5 \text{ Kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων $\mu = 0,2$, και το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο, να βρείτε: α) Την επιτάχυνση κάθε σώματος. β) Αν το μήκος του κάτω σώματος είναι $d = 2 \text{ m}$ ενώ το πάνω σώμα θεωρείται σημειακό και ότι αρχικά βρίσκεται στη δεξιά άκρη του κάτω σώματος, όπως στο σχήμα, να βρείτε την χρονική στιγμή στην οποία θα εγκαταλείψει το κάτω σώμα (επειδή θα βρεθεί στο πίσω άκρο του) και τη μετατόπιση του κάτω σώματος. Υποθέτουμε ότι και τα δύο σώματα ξεκινούν αρχικά από την ηρεμία.

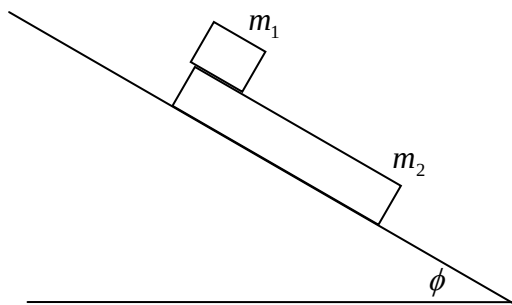


(Απ.: α) $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 3 \text{ m/s}^2$. β) $t = 2 \text{ s}$, $\Delta x = 6 \text{ m}$.)

Γ3.4.28 Στην προηγούμενη άσκηση η δύναμη ήταν υπερβολικά μεγάλη με αποτέλεσμα το πάνω σώμα να ολισθαίνει προς τα πίσω ως προς το κάτω σώμα. Τώρα θα ασκήσουμε μια δύναμη αρκετά μικρή, ώστε η τριβή να είναι μικρότερη από τη μέγιστη στατική τριβή. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε: $m_1 = 2 \text{ Kg}$, $m_2 = 5 \text{ Kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι $\mu = 0,2$, το οριζόντιο επίπεδο λείο και $F = 7 \text{ N}$. Να βρείτε την επιτάχυνση των σωμάτων και την τιμή της τριβής.

(Απ.: $a = 1 \text{ m/s}^2$, $T = 2 \text{ N}$.)

Γ3.4.29 Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα κεκλιμένο επίπεδο και πάνω σε αυτό δύο σώματα που έχουν σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η γωνία κλίσης του κεκλιμένου είναι $\phi = 30^\circ$. α) Αν δεν υπάρχει πουθενά τριβή, να βρείτε την επιτάχυνση καθενός από τα σώματα. β) Πιστεύετε ότι υπάρχει περίπτωση το σώμα m_1 να πέσει κάποια στιγμή από το m_2 ; Για ποιο λόγο; γ) Θεωρήστε τώρα ότι υπάρχει γνωστός συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων και όχι μεταξύ του σώματος m_2 και του κεκλιμένου επιπέδου. Μπορείτε να βρείτε την τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων; δ) Θεωρήστε ότι υπάρχει συντελεστής τριβής ίσος με $\mu = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ανάμεσα στο m_2 και στο κεκλιμένο επίπεδο, ενώ δεν υπάρχει τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων. Αν $m_2 = 5 \text{ Kg}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της μάζας m_1 , ώστε το m_2 να παραμένει ακίνητο. Ποια θα είναι τότε η επιτάχυνση του σώματος με μάζα m_1 ;



(Απ.: α) $a = 5 \text{ m/s}^2$. β) Και τα δύο σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση, άρα πέφτουν ταυτόχρονα, άρα δεν υπάρχει περίπτωση το ένα να βρεθεί πιο μπροστά από το άλλο. γ) Η τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μηδενική, παρ' ότι υπάρχει συντελεστής τριβής. Και τούτο διότι και τα δύο σώματα υφίστανται σαν εξωτερική δύναμη μόνο το βάρος, πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση $a = 5 \text{ m/s}^2$, άρα ούτε τείνει να γλιστρήσει ως προς το άλλο, ούτε πραγματικά γλιστράει το ένα ως προς το άλλο, άρα δεν υπάρχει λόγος να εμφανιστεί τριβή. δ) $m_1 = \frac{5}{3} \text{ Kg}$.)

Κεφάλαιο Δ

Έργο - Ενέργεια

Δ1 Έργο

Δ1.1 Σταθερή δύναμη

Δ1.1.1 Το σημείο εφαρμογής μιας δύναμης $F = 10N$ μετατοπίζεται κατά $\Delta x = 20m$. Η δύναμη: α) Έχει την ίδια φορά με τη μετατόπιση. β) Έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση. γ) Σχηματίζει με τη μετατόπιση γωνία $\theta = 30^\circ$. δ) Σχηματίζει με τη μετατόπιση γωνία $\theta = 90^\circ$. ε) Σχηματίζει με τη μετατόπιση γωνία $\theta = 150^\circ$. Να βρείτε κατά περίπτωση το έργο της δυνάμεως. στ) Πώς είναι δυνατό η δύναμη να είναι κάθετη στη μετατόπιση και παρ' όλα αυτά το σώμα να μετακινείται, ή να είναι αντίρροπη στη μετατόπιση και, επίσης παρ' όλα αυτά, να μετακινείται το σώμα κ.ο.κ.;

(Απ.: α) $200J$. β) $-200J$. γ) $100\sqrt{3}J$. δ) 0 . ε) $-100\sqrt{3}J$. στ) Είναι δυνατό διότι θα υπάρχουν και άλλες δυνάμεις υπό την επίδραση των οποίων θα κινείται το σώμα, και ενδεχομένως έχει και κάποια αρχική ταχύτητα – μαζί με το ότι υπάρχουν και άλλες δυνάμεις οι οποίες κινούν το σώμα.)

Δ1.1.2 Ένα σώμα μάζας $m = 2Kg$ ξεκινά από την ηρεμία και επιταχύνεται μέχρι η ταχύτητά του να γίνει $10m/s$. Να βρείτε το έργο χρησιμοποιώντας τον ορισμό του και όχι κάποια άλλη μέθοδο.

(Απ.: $100J$.)

Δ1.1.3 Να αποδείξετε ότι το έργο της συνισταμένης δύναμης σε ένα σώμα ισούται με το άθροισμα των έργων των επιμέρους δυνάμεων.

Δ1.1.4 Ένα σώμα βάρους $10N$ διανύει σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης $\phi = 30^\circ$ απόσταση $20m$. Να βρείτε το έργο του βάρους αν το σώμα: α) κατέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο, β) ανέρχεται σε αυτό.

(Απ.: α) $100J$. β) $-100J$.)

Δ1.1.5 Θεωρήστε δύο σώματα τα οποία: α) Είναι συνδεδεμένα σε τεντωμένο σχοινί. β) Είναι συνδεδεμένα σε ένα ελαστικό σώμα, όπως λάστιχο ή ελατήριο, του οποίου το μήκος μπορεί να μεταβάλλεται. γ) Είναι η γη και ένα αντικείμενο που πέφτει προς αυτή. δ) Πρόκειται για δύο μεγάλους πλανήτες, κάπου πέρα από το ηλιακό μας σύστημα, με ίσες μάζες, που ξεκίνησαν από την ηρεμία και λόγω της βαρύτητας κινούνται ο ένας προς τον άλλο. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους τα έργα;

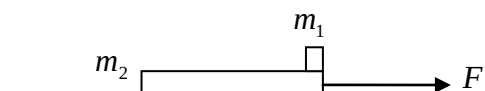
(Απ.: α) Τα έργα είναι αντίθετα. β) Τα έργα δεν έχουν καμιά σχέση μεταξύ τους. γ) Τα έργα είναι θετικά και τα δύο, αλλά το έργο που παράγει η δύναμη που

ασκείται στη γη είναι αμελητέο γιατί η γη λόγω της μεγάλης της μάζας μένει σχεδόν ακίνητη. δ) Τα έργα είναι ίσα. Παρατηρούμε ότι αν και σε όλες τις περιπτώσεις ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ισχύει, ωστόσο μόνο σε μία τα έργα είναι αντίθετα. Και μάλιστα την περίπτωση εκείνη στην οποία μεταξύ των δύο σωμάτων, υπάρχει και ένα τρίτο, το σκοινί. Συνήθως τα έργα έχουν οποιαδήποτε σχέση θέλουν μεταξύ τους.)

Δ1.1.6 Για ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και κινείται με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10\text{m/s}$, υπάρχει τριβή. Ποιο είναι το έργο της δύναμης της τριβής μέχρι το σώμα να σταματήσει; Υπολογίστε το με βάση μεθόδους αυτού του υποκεφαλαίου.

(Απ.: $W = -100\text{J}$.)

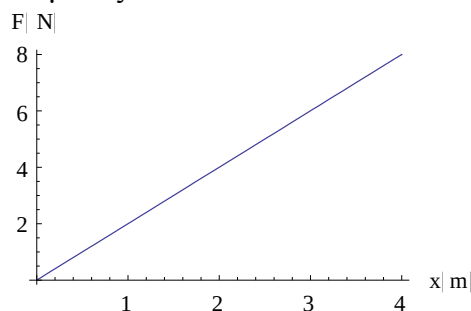
Δ1.1.7 Το έργο της τριβής είναι πάντα αρνητικό; Η στατική τριβή δεν παράγει ποτέ έργο; Ας εξετάσουμε μια περίπτωση που έχουμε δει και σε προηγούμενο κεφάλαιο. Στο σχήμα έχουμε δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2\text{Kg}$, $m_2 = 4\text{Kg}$, συντελεστή τριβής μεταξύ τους $\mu = 0,5$, ενώ το πάτωμα είναι λείο. Αν στο κάτω σώμα ασκείται δύναμη $F = 21\text{N}$ για απόσταση $\Delta x = 10\text{m}$, να βρείτε το έργο της τριβής που ασκείται στο πάνω σώμα. Σχολιάστε την απάντησή σας.



(Απ.: $W = 70\text{J}$. Παρατηρούμε ότι αν και στατική, η συγκεκριμένη τριβή παράγει έργο. Επίσης ότι το έργο της είναι θετικό. Φυσικά και το έργο της τριβής που ασκείται στο κάτω σώμα είναι αρνητικό, αντίθετο από το προηγούμενο έργο. Όπως όμως είπαμε και στο προηγούμενο πρόβλημα, τούτο δεν είναι ένας γενικός κανόνας, ότι τα έργα της δράσης και της αντίδρασης είναι αντίθετα. Μάλλον μια εξαίρεση είναι. Αν η δύναμη την οποία ασκούσαμε στο κάτω σώμα ήταν υπερβολικά μεγάλη, ώστε το πάνω σώμα να ολισθαίνει ως προς το κάτω, τότε το έργο της τριβής ολίσθησης θα ήταν θετικό για το πάνω σώμα, το έργο της αντίδρασης σε αυτή θα ήταν αρνητικό για το κάτω σώμα, αλλά δε θα ήταν αντίθετα.)

Δ1.2 Έργο μεταβλητής δύναμης

Δ1.2.1 Στο παρακάτω διάγραμμα ένα σώμα που κινείται: α) Από το 0 ως τα 4 μέτρα. β) Από τα τέσσερα μέτρα ως το 0. γ) Από το 1m ως τα 2m. Να βρεθεί κατά περίπτωση το έργο της δυνάμεως. Η δύναμη είναι στη διεύθυνση κίνησης του σώματος.

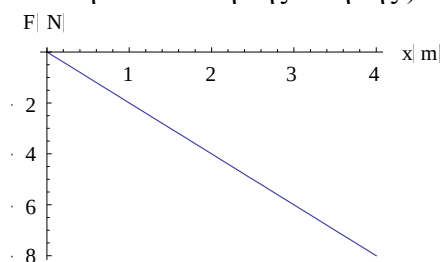


(Απ.: α) 16J . β) -16J . γ) 3J .)

Δ1.2.2 Να επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για την περίπτωση που η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση του σώματος.
(Απ.: Το έργο είναι μηδενικό σε κάθε περίπτωση.)

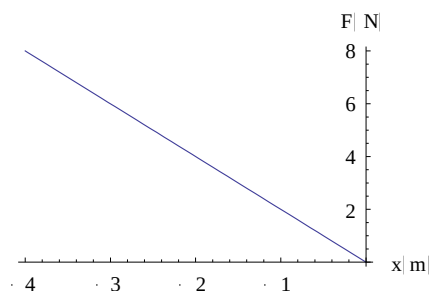
Δ1.2.3 Να επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για την περίπτωση που η δύναμη σχηματίζει με τη μετατόπιση γωνία 60° .
(Απ.: α) $8J$. β) $-8J$. γ) $1,5J$.)

Δ1.2.4 Να βρείτε το έργο της οριζόντιας δύναμews η τιμή της οποίας μεταβάλλεται με βάση την παρακάτω γραφική παράσταση όταν το σώμα μετακινείται: α) Από την αρχή μέχρι τα $4m$. β) Από τα $4m$ μέχρι την αρχή των αξόνων. (Οριζόντια σε αυτά τα προβλήματα νοούμε τη δύναμη που ο φορέας της είναι η διεύθυνση της κίνησης.)



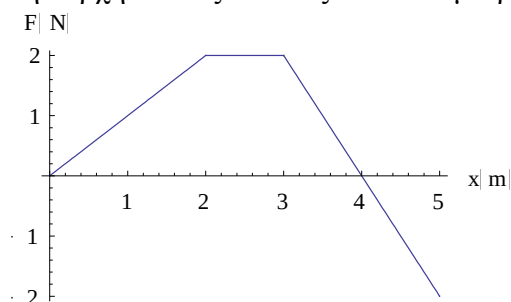
(Απ.: α) $-16J$. β) $16J$.)

Δ1.2.5 Να βρείτε το έργο της οριζόντιας δύναμews η τιμή της οποίας μεταβάλλεται με βάση την παρακάτω γραφική παράσταση, αν το σώμα μετακινείται από τα $-4m$ στο 0 .



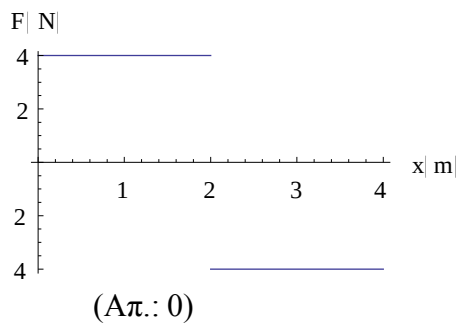
(Απ.: $16J$.)

Δ1.2.6 Να βρείτε το έργο της δύναμews αν το σώμα μετατοπίζεται από την αρχή των αξόνων ως τα πέντε μέτρα.



(Απ.: $4J$.)

Δ1.2.7 Να βρείτε το έργο της δύναμews όταν το σώμα μετατοπίζεται από την αρχή μέχρι τα $4m$.



Δ2 Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Διατήρηση μηχανικής ενέργειας. Ισχύς

Μερικά μεθοδολογικά σχόλια: α) Το μηδέν της δυναμικής ενέργειας το ορίζουμε όπου εμείς θέλουμε. Προϋπόθεση βέβαια να είμαστε σχετικά κοντά στην επιφάνεια της γης, ούτε πολύ βαθιά κάτω από την επιφάνειά της, ούτε ιδιαίτερα μακριά, ώστε να μην αλλάζει η επιτάχυνση της βαρύτητας, γιατί τότε ο τύπος για τη δυναμική ενέργεια δεν ισχύει, αφού δεν ξέρουμε τί τιμή να θέσουμε για αυτή την επιτάχυνση. β) Το ότι η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από το επίπεδο στο οποίο τη θεωρούμε μηδενική, το ότι δηλαδή η δυναμική ενέργεια είναι «σχετική»⁶, δε μας ενοχλεί καθόλου. Τουναντίον, από τον τύπο του έργου για τη δύναμη του βάρους, και κάποιες άλλες δυνάμεις που θα μάθουμε αργότερα: $W = U_{\text{αρχ.}} - U_{\text{τελ.}}$, προκύπτει ότι όντως δεν έχει σημασία πού θα τοποθετήσουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας. Και τούτο διότι το έργο του βάρους, λόγω της διαφοράς, θα προκύπτει ανεξάρτητο από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας. γ) Εκείνο το οποίο πρέπει να προσέχουμε στη δυναμική ενέργεια είναι η κατεύθυνση στην οποία θα θεωρούμε θετικά τα ύψη: Πάντα αντίρροπη από την κατεύθυνση της βαρύτητας, και όχι όπου εμείς θέλουμε. Διαφορετικά δε θα ισχύει κανένας τύπος. Δηλαδή αν πάρουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στο δάπεδο του δεύτερου ορόφου για παράδειγμα, τότε θα πρέπει υποχρεωτικά όλα τα σώματα που βρίσκονται σε παραπάνω ορόφους να έχουν θετική δυναμική ενέργεια και τα σώματα που βρίσκονται σε χαμηλότερους ορόφους να έχουν αρνητική δυναμική ενέργεια. δ) Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει πάντα. Είναι συνέπεια της διατήρησης της ενέργειας, όπως αυτή εκφράζεται σε περιπτώσεις που έχουμε δυνάμεις που παράγουν έργο. ε) Πώς ακριβώς φαίνεται η διατήρηση της ενέργειας μέσα στο θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας; Αν το γράψουμε με μια λίγο διαφορετική μορφή: $K_{\text{αρχ.}} + W_{\text{ολ.}} = K_{\text{τελ.}}$, τότε είναι προφανής η παρουσία της διατήρησης της ενέργειας: Έχουμε κάποια ενέργεια αρχικά, παίρνουμε και κάποια ενέργεια από τις δυνάμεις, μέσω του έργου, πόση θα είναι η τελική μας ενέργεια; Μα φυσικά το άθροισμα των δύο ενεργειών, αυτής που είχαμε και αυτής που πήραμε. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια δεν εξαφανίζεται ούτε δημιουργείται εκ του μηδενός. στ) Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει για την περίπτωση που μόνο οι συντηρητικές δυνάμεις παράγουν έργο στο σύστημα. Συντηρητικές δυνάμεις που μαθαίνουμε στο σχολείο είναι στην 1^η λυκείου το βάρος, στη δεύτερη τάξη οι ηλεκτρικές και στην τρίτη οι δυνάμεις μεταξύ των ελατηρίων, με βάση το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα. Οι υπόλοιπες δυνάμεις δε μας πειράζει να υπάρχουν, αρκεί να μην παράγουν έργο.

⁶ Τα εισαγωγικά χρειάζονται. Δεν είναι σχετική με την έννοια ότι εξαρτάται από τον παρατηρητή, αλλά με την έννοια ότι εμείς ορίζουμε το επίπεδο αναφοράς της. Άλλο πράγμα ο αδρανειακός παρατηρητής και άλλο πράγμα το μηδέν του δυναμικού και της δυναμικής ενέργειας, και οι συμμετρίες των φυσικών νόμων οι οποίες υποκρύπτονται κάτω από αυτή την ελευθερία μας να ορίζουμε μηδενική δυναμική ενέργεια όπου εμείς θέλουμε. Η υποσημείωση απευθύνεται σε φυσικούς.

Δ2.1 Κινητική ενέργεια

Δ2.1.1 Να γίνουν ποιοτικές γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας για ένα σώμα συναρτήσει της ταχύτητάς του αν η μάζα του είναι σταθερή και της κινητικής ενέργειας ενός σώματος συναρτήσει της μάζας του, αν η ταχύτητά του είναι σταθερή.

Δ2.1.2 Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2\text{Kg}$ και $m_2 = 4\text{Kg}$ κινούνται με ταχύτητες $v_1 = 10\text{m/s}$ και $v_2 = 5\text{m/s}$, οι οποίες είναι: α) Ομόρροπες. β) Αντίρροπες. γ) Σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Να βρείτε κατά περίπτωση την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων.

(Απ.: $K = 150\text{J}$ σε όλες τις περιπτώσεις.)

Δ2.2 Η δυναμική ενέργεια

Δ2.2.1 Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ βρίσκεται στο πάτωμα του σπιτιού μας. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, αν ως επίπεδο δυναμικής ενέργειας θεωρήσουμε το επίπεδο: α) Του δαπέδου του σπιτιού μας. β) Ενός ορόφου κάτω από το σπίτι μας που απέχει κατακόρυφη απόσταση 6m . γ) Ενός ορόφου πάνω από το σπίτι μας που απέχει κατακόρυφη απόσταση 6m . δ) Της επιφάνειας της θάλασσας, εάν το πάτωμα του σπιτιού μας βρίσκεται 100m πάνω από αυτή.

(Απ.: α) 0. β) 120J . γ) -120J . δ) 2000J .)

Δ2.2.2 Αναφερόμενοι στο προηγούμενο πρόβλημα, να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση το έργο του βάρους, όταν το σώμα μετατοπίζεται 1m πάνω από το δάπεδο του σπιτιού μας. Να χρησιμοποιήσετε τη γνωστή σχέση $W = U_{\text{αρχ.}} - U_{\text{τελ.}}$ για τον υπολογισμό του έργου του βάρους. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

(Απ.: $W = -20\text{J}$, σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα από το σημείο στο οποίο θα θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική. Αυτό αποδεικνύει ότι δεν έχει σημασία το πού θα ορίσουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας.)

Δ2.3 Θ.μ.κ.ε. – α.δ.μ.ε. Βασικές εφαρμογές

Δ2.3.1 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ και κινείται με ταχύτητα $v = 10\text{m/s}$ που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο ασκείται σταθερή δύναμη $F = 10\text{N}$. Η δύναμη είναι ομόρροπη της ταχύτητας. Να βρείτε: α) Την απόσταση στην οποία η ταχύτητα του σώματος διπλασιάζεται. β) Την απόσταση στην οποία διπλασιάζεται η κινητική ενέργεια του σώματος. γ) Την απόσταση στην οποία το έργο της δύναμης εξισώνεται με την αρχική κινητική ενέργεια του σώματος. δ) Την απόσταση στην οποία το έργο της δύναμης εξισώνεται με την τελική κινητική ενέργεια του σώματος.

(Απ.: α) $\Delta x = 30\text{m}$. β) $\Delta x = 10\text{m}$. γ) $\Delta x = 10\text{m}$. δ) Δεν υπάρχει τέτοια απόσταση στο συγκεκριμένο πρόβλημα.)

Δ2.3.2 Σε ένα σώμα μάζας $m=2Kg$ και κινείται με ταχύτητα $v=10m/s$ που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο ασκείται σταθερή δύναμη $F=10N$. Η δύναμη είναι αντίρροπη της ταχύτητας. Να βρείτε: α) Την απόσταση στην οποία η ταχύτητα του σώματος υποδιπλασιάζεται. β) Την απόσταση στην οποία υποδιπλασιάζεται η κινητική ενέργεια του σώματος. γ) Την απόσταση στην οποία το έργο της δύναμης εξισώνεται κατ' απόλυτη τιμή με την αρχική κινητική ενέργεια του σώματος. δ) Την απόσταση στην οποία το σώμα σταματά.

(Απ.: α) $\Delta x = 7,5m$. β) $\Delta x = 5m$. γ) $\Delta x = 10m$. δ) $\Delta x = 10m$.)

Δ2.3.3 Σε ένα σώμα μάζας $m=2Kg$ και κινείται με ταχύτητα $v=10m/s$ που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο ασκείται σταθερή δύναμη $F=10N$. Η δύναμη είναι αντίρροπη της ταχύτητας. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν $\Delta x = 8m$.

(Απ.: $v = \pm 2\sqrt{5}m/s$.)

Δ2.3.4 Σε ένα σώμα με μάζα $2Kg$ που κινείται αρχικά με ταχύτητα $12m/s$ προς τα δεξιά, ασκείται σταθερή δύναμη η οποία τελικά το αναγκάζει να κινηθεί με ταχύτητα $13m/s$ α) προς τα αριστερά, β) προς τα δεξιά. Ποιο είναι το έργο της δύναμης;

(Απ.: $25J$ και στις δύο περιπτώσεις.)

Δ2.3.5 Ένα σώμα πέφτει από ύψος $1,8m$ και κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας ($g = 10m/s^2$). Να βρεθεί η ταχύτητά του όταν: α) Ξεκινά από την ηρεμία. β) Έχει μια αρχική ταχύτητα προς τα κάτω ίση με $8m/s$. γ) Έχει μια αρχική ταχύτητα προς τα πάνω ίση με $8m/s$. δ) Έχει μια αρχική ταχύτητα που σχηματίζει τυχαία γωνία με την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $8m/s$.

(Απ.: Όλες οι ταχύτητες είναι ίσες με φυσικούς αριθμούς. Στα ερωτήματα β, γ και δ ο αριθμός είναι ίδιος.)

Δ2.3.6 Ένα σώμα αφήνεται από ένα ύψος h και πέφτει εξ αιτίας της βαρύτητας. α) Σε ποιο ύψος η κινητική του ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική; β) Σε ποιο ύψος η δυναμική του ενέργεια γίνεται ίση με τα $3/4$ της κινητικής του ενέργειας;

(Απ.: α) $h' = \frac{h}{2}$. β) $h' = \frac{3h}{7}$.)

Δ2.3.7 Ένα σώμα μάζας $2Kg$ αφήνεται από ύψος $h=20$. Αν το σώμα και αφού προσκρούσει στο δάπεδο: α) Δεν αναπηδά. β) Αναπηδά και φτάνει στο ίδιο ύψος με αυτό από το οποίο το αφήσαμε. γ) Αναπηδά και φτάνει στο μισό του ύψους από το οποίο το αφήσαμε. Να βρείτε κατά περίπτωση το ποσό της αρχικής μηχανικής ενέργειας που έγινε θερμότητα κατά την πρόσκρουση στο δάπεδο και το ποσοστό επί της αρχικής μηχανικής ενέργειας που έγινε θερμική ενέργεια. Δίνεται $g = 10m/s^2$.

(Απ.: α) $400J$, 100% . β) 0 , 0% . γ) $200J$, 50% .)

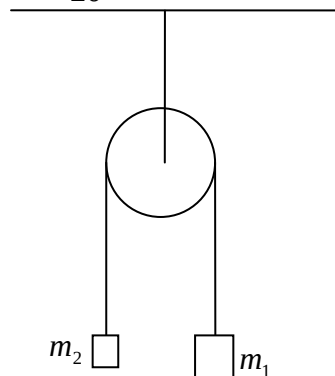
Δ2.3.8 Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα v_0 . Στο σώμα ενεργεί σταθερή δύναμη αντίρροπη της ταχύτητας, με αποτέλεσμα το σώμα κάποια στιγμή να

σταματήσει και μετά να επιταχυνθεί στην κατεύθυνση της δύναμης. Να αποδείξετε ότι το έργο της δύναμης μέχρι τη στιγμή που το σώμα επιστρέφει ξανά στο σημείο εκκίνησης είναι μηδενικό. Αποδείξαμε με αυτό τον τρόπο ότι μια σταθερή δύναμη είναι συντηρητική; Για την τριβή τί ισχύει;

(Απ.: Το γεγονός ότι αποδείξαμε ότι σε μια κλειστή διαδρομή το έργο είναι μηδέν, δεν αποδεικνύει αυτόματα ότι σε όλες τις κλειστές διαδρομές το έργο είναι μηδέν⁷. Άρα δεν αποδείξαμε εμείς ότι η σταθερή δύναμη είναι συντηρητική. Βέβαια, στην πραγματικότητα αποδεικνύεται ότι κάθε σταθερή δύναμη είναι συντηρητική, απλώς εμείς δεν μπορούμε με τις γνώσεις του δεδομένου επιπέδου να αποδείξουμε κάτι τέτοιο. Ούτε επίσης θα πρέπει στις ασκήσεις να χρησιμοποιούμε ως δεδομένο το ότι μια σταθερή δύναμη είναι συντηρητική, αφού δεν είναι τμήμα της θεωρίας μας. τριβή πάντως δεν είναι σταθερή δύναμη, αφού η κατεύθυνσή της αλλάζει ανάλογα με την κατεύθυνση κίνησης του σώματος.)

Δ2.4 Θ.μ.κ.ε. – α.δ.μ.ε. Πολλά σώματα

Δ2.4.1 Στο παρακάτω σχήμα έχουμε μια τροχαλία, χωρίς μάζα όπως και τα σχοινιά. Τα δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2\text{Kg}$ και $m_2 = 4\text{Kg}$ δε βρίσκονται απαραίτητα αρχικά στο ίδιο ύψος, είναι όμως αρχικά ακίνητα. Δίνεται επίσης ότι $g = 10\text{m/s}^2$. Να βρεθεί η ταχύτητα των σωμάτων όταν έχουν μετατοπιστεί κατά $y = \frac{3}{20}m$. Τριβές δεν υπάρχουν.



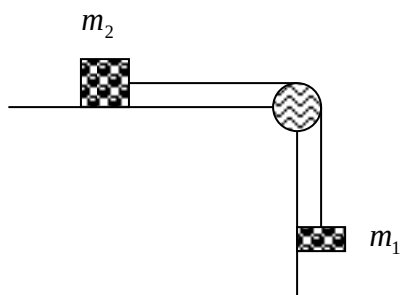
⁷ Με άλλα δηλαδή λόγια, οι ορισμοί οι οποίοι φιλοξενούνται σε βιβλία επιπέδου πρώτης λυκείου για τις συντηρητικές δυνάμεις, είναι πολλαπλά άχρηστοι, έως επιζήμιοι: Δε φτάνει που ξεκινούν με κάποια ακαταλαβίστικα περί του ότι πρέπει σε κάθε κλειστή διαδρομή το έργο να είναι μηδέν, ή ότι πρέπει το έργο να μην εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί ένα σώμα προκειμένου να μεταβεί από μια αρχική σε μια τελική θέση, είναι επίσης άχρηστοι ως ορισμοί, καθόσον δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ασκήσεις.

Εξηγούμαστε για το δεύτερο: Πώς μπορεί να αποδείξει κανείς ότι το έργο μιας δύναμης σε οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν χωρίς τη χρήση επικαμπύλιων (όχι σκέτων) ολοκληρωμάτων, τα οποία πόρρω απέχουν από το δεδομένο επίπεδο γνώσης; Το «επιζήμιον» συνίσταται στο ότι δημιουργείται μια στρεβλή εικόνα για το τί σημαίνει απόδειξη: Αποδεικνύουμε ότι το έργο είναι μηδέν σε μια κλειστή διαδρομή και νομίζαμε ότι αποδείξαμε πως η δύναμη είναι συντηρητική, δηλαδή ότι το έργο είναι μηδέν σε μια τυχαία διαδρομή.

Ας έρθουμε τώρα και στο πρώτο, και χειρότερο: Κι αν μια δύναμη έχει σε κάθε διαδρομή μηδενικό έργο, εμάς γιατί να μας νοιάζει; Και τον οποιονδήποτε μαθητή επίσης. Ενώ αν χρησιμοποιούσαμε έναν ορισμό προσαρμοσμένο στα μαθητικά πλαίσια, ότι δηλαδή συντηρητικές είναι όσες μετατρέπουν τη δυναμική σε κινητική και τούμπαλιν, και μη συντηρητικές όσες ή κλέβουν μηχανική και την κάνουν θερμότητα ή κάτι άλλο, ή υφαρπάζουν θερμότητα ή χημική ενέργεια και την κάνουν μηχανική, τότε τα πράγματα θα ήταν ξεκάθαρα.

(Απ.: $v = 1\text{m/s}$.)

Δ2.4.2 Για τα σώματα του σχήματος δίνονται: $m_1 = 1\text{Kg}$, $m_2 = 3\text{Kg}$, $g = 10\text{m/s}^2$ και ότι τα σχοινιά και η τροχαλία είναι αβαρή.



Να βρεθεί η ταχύτητα των σωμάτων όταν αυτά έχουν διανύσει απόσταση $1,8\text{m}$ και όταν: α) Δεν υπάρχει τριβή. β) Υπάρχει τριβή ανάμεσα στο m_2 και στο οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής: $\mu = 0,25$. Τα σώματα είναι αρχικά ακίνητα σε όλες τις περιπτώσεις.

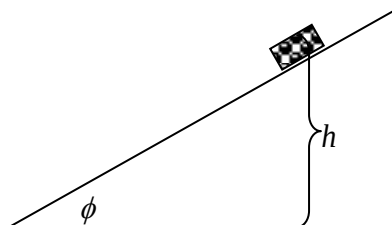
(Απ.: α) 3m/s . β) $1,5\text{m/s}$.)

Δ2.5 Θ.μ.κ.ε. – α.δ.μ.ε. Κεκλιμένα επίπεδα

Δ2.5.1 Σώμα βρίσκεται αρχικά ακίνητο στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, με γωνία κλίσης $\theta = 30^\circ$. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όταν η απόσταση που διανύει πάνω σε αυτό είναι $\Delta x = 10\text{m}$ και το κεκλιμένο επίπεδο: α) Δεν έχει τριβή. β) Παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = \frac{3\sqrt{3}}{25}$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

(Απ.: α) $v = 10\text{m/s}$. β) $v = 8\text{m/s}$.)

Δ2.5.2 Ένα σώμα που ξεκινά από την ηρεμία πέφτει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο από ύψος $h = 1,8\text{m}$ από κεκλιμένο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.



α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, αν δεν υπάρχει τριβή. β) Αν υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = \frac{9}{16}$, και αν για τη γωνία (μόνο σε αυτό το υποερώτημα) ισχύει: $\sin\phi = 4/5$, $\eta\mu\phi = 3/5$.

(Απάντηση: α) 6m/s . β) 3m/s .)

Δ2.5.3 Σώμα κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης $\theta = 30^\circ$. Το σώμα είναι αρχικά ακίνητο. Μετά το κεκλιμένο ακολουθεί οριζόντιο επίπεδο με

τον ίδιο συντελεστή τριβής με το κεκλιμένο. Να βρεθεί η τιμή του συντελεστή τριβής ώστε η απόσταση που διανύει το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο να είναι ίδια με την απόσταση στο οριζόντιο.

$$(Απ.: \mu = \frac{\eta\mu 30^0}{1 + \sigma\nu 30^0}.)$$

Δ2.5.4 Να λύσετε το προηγούμενο πρόβλημα αν η απόσταση που διανύει το σώμα στο οριζόντιο επίπεδο είναι διπλάσια αυτής που είχε διανύσει κατά την κάθοδό του στο κεκλιμένο.

$$(Απ.: \mu = \frac{\eta\mu 30^0}{2 + \sigma\nu 30^0}.)$$

Δ2.5.5 Ένα σώμα κινείται πρώτα σε κεκλιμένο επίπεδο και μετά σε οριζόντιο, όπως στο σχήμα. Δίνεται ότι η γωνία κλίσης του επιπέδου έχει: $\eta\mu\phi = 3/5$ και $\sigma\nu\phi = 4/5$. Αν ο συντελεστής τριβής είναι ίδιος και στο κεκλιμένο και στο οριζόντιο επίπεδο, και αν το σώμα διανύει ίση απόσταση και στο κεκλιμένο και στο οριζόντιο, να βρεθεί η τιμή του συντελεστή τριβής.

$$(Απάντηση: \mu = 1/3.)$$

Δ2.5.6 Σώμα βάλλεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\theta = 30^0$ με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10\text{ m/s}$. Το σώμα παρουσιάζει τριβή με το κεκλιμένο, με συντελεστή τριβής $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που θα διανύσει το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο. Θα επιστρέψει ποτέ το σώμα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Δίδεται $g = 10\text{ m/s}^2$.

(Απ.: $\Delta x = 4\text{ m}$. Δε θα επιστρέψει επειδή η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι μεγαλύτερη από τη συνιστώσα του βάρους που τείνει να επιταχύνει το σώμα προς τα κάτω.)

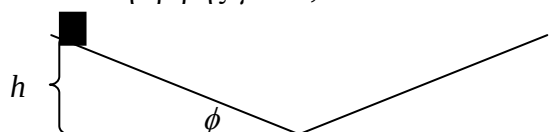
Δ2.5.7 Να λύσετε το προηγούμενο πρόβλημα αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Το σώμα θα επιστρέψει ποτέ στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου; Αν επιστρέψει, ποια θα είναι τότε η ταχύτητά του;

$$(Απ.: \Delta x = \frac{40}{7}\text{ m}. \nu = \frac{10\sqrt{7}}{7}\text{ m/s}.)$$

Δ2.5.8 Σε ό,τι αφορά το προηγούμενο πρόβλημα, ποιος είναι ο συντελεστής τριβής εκείνος για τον οποίο το σώμα διανύει τη μέγιστη δυνατή απόσταση στο κεκλιμένο επίπεδο, χωρίς όμως να επιστρέφει στην αφετηρία του; (Ισοδύναμη διατύπωση: Επιστρέφει στην αφετηρία του με πολύ μικρή, σχεδόν μηδενική, ταχύτητα.) Ποια είναι αυτή η μέγιστη απόσταση;

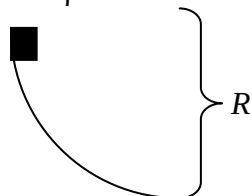
$$(Απ.: \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}, \Delta x = 5\text{ m}.)$$

Δ2.5.9 Ένα παγοδρόμος κινείται μεταξύ δύο πλαγιών, όπως στο σχήμα. Το ύψος από το οποίο ξεκινάει είναι $h=10m$, ενώ η γωνία των κεκλιμένων επιπέδων είναι πολύ μικρή. Για αυτήν ισχύει: $\sin\phi = 0,9$. Να βρείτε πόση συνολική απόσταση θα καλύψει ο παγοδρόμος, ξεκινώντας από την ηρεμία, πηγαίνοντας και επιστρέφοντας μεταξύ των δύο πλαγιών, μέχρι να σταματήσει, αν υπάρχει μια πολύ μικρή τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,01$.



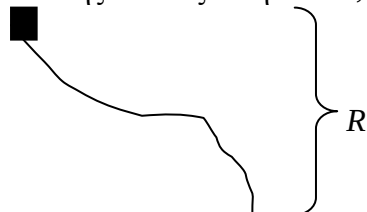
(Απ.: $S = \frac{10000}{9} m$.)

Δ2.5.10 Ένα σώμα ξεκινά από την κορυφή τεταρτοκυκλίου όπως στο σχήμα, ακτίνας $R=5m$ και καταλήγει στη βάση του. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$ και η μάζα $m=2Kg$ του σώματος. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος στη βάση του τεταρτοκυκλίου αν: α) Αυτό ξεκινά από την ηρεμία και δεν υπάρχει καθόλου τριβή. β) Αυτό ξεκινά από την ηρεμία, αλλά υπάρχει τριβή, και το συνολικό της έργο μέχρι να φτάσει στη βάση του τεταρτοκυκλίου είναι $W_T = -36J$. γ) Αν το σώμα ξεκινά με μια αρχική ταχύτητα $v_0 = \sqrt{21}m/s$ και το τεταρτοκύκλιο είναι λείο.



(Απ.: α) $v=10m/s$. β) $v=8m/s$. γ) $v=11m/s$.)

Δ2.5.11 α) Γιατί στο προηγούμενο πρόβλημα δε μπορούμε, με τις δεδομένες γνώσεις της δεδομένης τάξεως, να βρούμε το έργο της τριβής αν γνωρίζουμε το συντελεστή τριβής μεταξύ του σώματος και της επιφάνειας του τεταρτοκυκλίου; β) Αν αντικαταστήσουμε το τεταρτοκύκλιο με ένα τυχαίο σχήμα, όπως αυτό που παρατίθεται, θα άλλαζε κάτι στους υπολογισμούς του προηγούμενου προβλήματος, με την προϋπόθεση ότι η υψομετρική διαφορά μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσεως θα ήταν R ;



γ) Σε ποιες περιπτώσεις θα είναι γενικά μικρότερο το έργο της τριβής, αν υποθέσουμε ότι ο συντελεστής τριβής είναι ίδιος σε όλες τις επιφάνειες; Τί χαρακτηριστικό θα πρέπει να έχουν αυτές οι επιφάνειες για να ελαχιστοποιείται το έργο της τριβής;

(Απ.: β) Δεν αλλάζει τίποτε από την απάντηση στο προηγούμενο πρόβλημα με την προϋπόθεση βέβαια ότι η τριβή είναι επαρκώς μικρή στις πιο «επίπεδες» περιοχές του σχήματος, δηλαδή τις περιοχές με τη μικρότερη κλίση, ώστε να μην ακινητοποιήσει το σώμα. Σε μια τέτοια περίπτωση δε θα είναι λάθος η απάντηση

στην ερώτηση, αλλά θα είναι λάθος η εκφώνησή της. γ) Το έργο της τριβής, όπως και η ίδια η τριβή, είναι μικρότερα όταν οι επιφάνειες έχουν μεγαλύτερη κλίση.)

Δ2.6 Μεταβλητές δυνάμεις

Δ2.6.1 Μία οριζόντια δύναμη $F = 2x$ μετατοπίζει ένα αρχικά σχεδόν ακίνητο⁸ σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ από την αρχή των αξόνων και μέχρι το σημείο $x = 17,5\text{m}$. Να βρεθεί η τελική ταχύτητα του σώματος, αν το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο κινείται το σώμα είναι λείο.

(Απ.: $v = 17,5\text{m/s}$.)

Δ2.6.2 Μια οριζόντια δύναμη $F = 2x$ επενεργεί σε ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ που βρίσκεται αρχικά στην αρχή των αξόνων και κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 5\text{m/s}$ προς τα δεξιά. Να βρεθεί η τελική ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 12\text{m}$.

(Απ.: $v = 13\text{m/s}$.)

Δ2.6.3 Μια οριζόντια δύναμη $F = 1 + 2x$ επενεργεί σε ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ που βρίσκεται αρχικά ακίνητο στην αρχή των αξόνων. Αν $g = 10\text{m/s}^2$, ενώ το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το σώμα έχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,1$, να βρεθεί η απόσταση στην οποία η ταχύτητα του σώματος θα γίνει $0,2\text{m/s}$.

(Απ.: Το σώμα δε θα κινηθεί, διότι δε θα υπερνικηθεί η τριβή.)

Δ2.6.4 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο και ακινητεί στην αρχή των αξόνων, ασκείται δύναμη $F = 10 + 4x$, η οποία επενεργεί σε αυτό για απόσταση 5m . Να βρεθεί η τελική ταχύτητα του σώματος.

(Απ.: $v = 10\text{m/s}$.)

Δ2.6.5 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ που βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο και ακινητεί στην αρχή των αξόνων, ασκείται δύναμη $F = 10 + 4x$, η οποία επενεργεί σε αυτό για απόσταση πέντε μέτρων. Στο οριζόντιο δάπεδο παρουσιάζεται τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,19$. Αφού εξετάσετε αν το σώμα μπορεί να κινηθεί, να βρείτε την τελική του ταχύτητα, αν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο.

(Απ.: $v = 9\text{m/s}$.)

Δ2.6.6 Σε ένα σώμα μάζας $m = 1,5\text{Kg}$ που βρίσκεται αρχικά στην αρχή των αξόνων επενεργεί οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 10 + 3x$ η οποία το μετατοπίζει σε λείο οριζόντιο δάπεδο κατά $x = 3\text{m}$. Να βρεθεί η τελική ταχύτητα του σώματος.

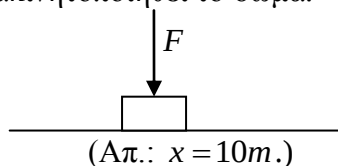
⁸ Το «σχεδόν ακίνητο» εδώ πέρα σημαίνει το εξής: Ότι αν το σώμα έχει αρχικά μηδενική ταχύτητα, καθώςον βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, δε θα του ασκηθεί δύναμη, άρα θα παραμείνει για πάντα σε αυτή την κατάσταση ακινησίας. Θα πρέπει να έχει μια ελάχιστη μικρή ταχύτητα, ώστε να μετακινηθεί ελάχιστα από την αρχική του θέση, οπότε θα αρχίσει να επενεργεί σε αυτό η δύναμη. Από τη σχέση που δίνει τη δύναμη, βλέπουμε ότι αυτή στην αρχή είναι μηδενική και μετά, για οποιοδήποτε άλλο σημείο αποκτά μη μηδενικές τιμές.

(Απ.: $v = \sqrt{58} \text{ m/s}$.)

Δ2.6.7 Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και έχει αρχική ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$, εισέρχεται σε περιοχή με μεταβλητό συντελεστή τριβής που δίνεται από τη σχέση $\mu = \frac{x}{40}$. Αν $g = 10 \text{ m/s}^2$, να βρεθεί η απόσταση στην οποία το σώμα θα σταματήσει.

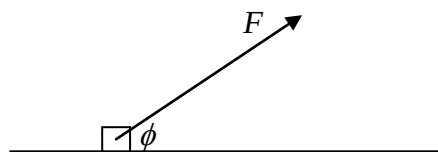
(Απ.: $x = 20 \text{ m}$.)

Δ2.6.8 Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα σώμα με μάζα $m = 2 \text{ Kg}$, το οποίο έχει αρχική ταχύτητα $v_0 = \sqrt{75} \text{ m/s}$. Δίνονται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $\mu = \frac{1}{4}$. Στο σώμα ασκείται κατακόρυφη δύναμη προς τα κάτω μεταβλητού μέτρου, η οποία δίνεται από τη σχέση $F = 2x$. Να βρείτε την απόσταση στην οποία θα ακινητοποιηθεί το σώμα.



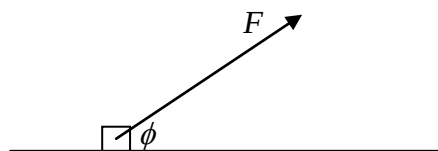
(Απ.: $x = 10 \text{ m}$.)

Δ2.6.9 Σε σώμα μάζας $m = 3 \text{ Kg}$ που βρίσκεται αρχικά ακίνητο στην αρχή των αξόνων, επενεργεί δύναμη μέτρου $F = 5 + 5x$ η οποία το μετακινεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η δύναμη έχει κατεύθυνση λοξά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα, και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία ϕ για την οποία $\eta\mu\phi = 3/5$. Να βρεθεί: α) Το σημείο στο οποίο το σώμα χάνει επαφή με το δάπεδο. β) Η ταχύτητα που έχει τότε το σώμα.



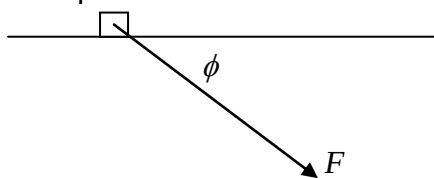
(Απ.: α) $x = 9 \text{ m}$. β) $v = \sqrt{132} \text{ m/s}$.)

Δ2.6.10 Σε σώμα μάζας $m = 3 \text{ Kg}$ που βρίσκεται αρχικά ακίνητο στην αρχή των αξόνων, επενεργεί δύναμη μέτρου $F = 5 + 5x$ η οποία το μετακινεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο το σώμα εμφανίζει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = \frac{11}{81}$. Η δύναμη έχει κατεύθυνση λοξά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα, και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία ϕ για την οποία $\eta\mu\phi = 3/5$. Να βρεθεί: α) Το σημείο στο οποίο το σώμα χάνει επαφή με το δάπεδο. β) Η ταχύτητα που έχει τότε το σώμα. Είναι αρχικά επαρκής η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης ώστε το σώμα να αρχίσει να κινείται;



(Απ.: α) $x = 9m$. β) $v = 11m/s$. γ) Ναι.)

Δ2.6.11 Το σώμα του παρακάτω σχήματος είναι αρχικά ακίνητο, έχει μάζα $m = 1,2Kg$ και μπορεί να κινείται σε οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση της δύναμης που φαίνεται στο σχήμα, μέτρου $F = 10 + 5x$. Δίνεται $\sin\theta = 0,8$ και $\mu = \frac{1}{4}$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος μετά από μετατόπιση $x = 2m$.



(Απ.: $v = \sqrt{\frac{50}{3}} m/s$.)

Δ2.6.12 Σε σώμα μάζας $m = 2Kg$, αρχικά ακίνητο, που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται δύναμη $F = 20 - 2x$. Αν $g = 10m/s^2$ και υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$, να βρείτε: α) Πότε μεγιστοποιείται η ταχύτητα του σώματος και ποια είναι η μέγιστη τιμή της; β) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του σώματος, όταν μηδενιστεί η δύναμη; Δίδεται $g = 10m/s^2$.

(Απ.: α) $x = 5m$, $v_{\max} = 5m/s$. β) 0.)

Δ2.6.13 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2Kg$ που αρχικά ηρεμεί ασκείται κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω και τιμή που δίνεται από τη σχέση: $F = 40 - 2x$. α) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο μεγιστοποιείται η ταχύτητα του σώματος και η μέγιστη τιμή της ταχύτητας. β) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν η δύναμη μηδενίζεται. Δίδεται $g = 10m/s^2$.

(Απ.: α) $x = 10m$, $v_{\max} = 10m/s$. β) 0.)

Δ2.6.14 Σε ένα σώμα μάζας $m = 1Kg$ που αρχικά ηρεμεί ασκείται κατακόρυφη δύναμη προς τα πάνω με τιμή που δίνεται από τη σχέση: $F = 30 - x$. Αν $g = 10m/s^2$, να βρείτε: α) Την απόσταση στην οποία μεγιστοποιείται η ταχύτητα του σώματος και την τιμή της μέγιστης ταχύτητας. β) Αν η δύναμη μηδενιστεί τη στιγμή που εξισώνεται κατά μέτρο με το βάρος, να βρείτε το μέγιστο ύψος πάνω από το έδαφος στο οποίο φτάνει το σώμα. Υποθέστε ότι μόνο για αυτό το ερώτημα η δύναμη καταργείται όταν εξισώνεται κατά μέτρο με το βάρος. γ) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν η δύναμη μηδενιστεί. δ) Να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα αν η δύναμη καταργείται στο σημείο μηδενισμού της. ε) Αν η δύναμη δεν καταργείται σε κανένα σημείο, να βρεθεί το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο θα φτάσει το σώμα.

(Απ.: α) $x = 20m$, $v_{\max} = 20m/s$. β) $y = 40m$. γ) $v = 10\sqrt{3}m/s$. δ) $y = 45m$. ε) $y = 40m$.)

Δ2.6.15 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2Kg$ που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο ασκούνται δύο δυνάμεις, η $F_1 = 20 - x$ με κατεύθυνση προς τα δεξιά και η

$F_2 = x$ με κατεύθυνση προς τα αριστερά. α) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο μεγιστοποιείται η ταχύτητα του σώματος και η μέγιστη τιμή αυτής. β) Αν τη χρονική στιγμή που οι δύο δυνάμεις εξισώνονται κατά το μέτρο καταργηθεί η F_2 , να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν μηδενιστεί η F_1 . γ) Αν δεν καταργείται καμιά δύναμη να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν μηδενιστεί η F_1 .

(Απ.: α) $x = 10m$, $v_{\max} = 10m/s$. β) $v = \sqrt{150}m/s$. γ) $v = 0$.)

Δ2.6.16 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2Kg$ που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο ασκούνται δύο δυνάμεις, η $F_1 = 30 - 2x$ προς τα δεξιά και η $F_2 = x$ προς τα αριστερά. α) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του σώματος και η απόσταση στην οποία αυτή επιτυγχάνεται. β) Αν η F_2 καταργείται τη στιγμή που εξισώνεται με την F_1 , να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν η F_1 μηδενίζεται. γ) Αν η F_2 δεν καταργείται, να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν μηδενίζεται η F_1 .

(Απ.: α) $x = 10m$, $v_{\max} = \sqrt{150}m/s$. β) $v = \sqrt{175}m/s$. γ) $v = \sqrt{\frac{225}{2}}m/s$

Δ2.7 Ισχύς

Δ2.7.1 Να αποδείξετε ξεκινώντας από τον ορισμό της ισχύος, ότι ισχύει: $P = Fv\sin\theta$, όπου θ η γωνία ανάμεσα στην ταχύτητα και στη δύναμη.

Δ2.7.2 Ένας αλεξιπτωτιστής που μαζί με το αλεξίπτωτο έχει μάζα $120Kg$ κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα $5m/s$. Να βρείτε: α) Την ισχύ που παράγει το βάρος κατά την πτώση. β) Υπάρχει ισχύς από κάποια άλλη δύναμη; Πόση είναι; Δίνεται $g = 10m/s^2$.

(Απάντηση: α) $6.000Watt$. β) Υπάρχει.)

Δ2.7.3 Ένα αυτοκίνητο με μάζα $2.000Kg$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $36Km/h$ σε ανηφορικό δρόμο με γωνία κλίσης ϕ , για την οποία ισχύει $\eta\mu\phi = 1/5$. Δίνεται $g = 10m/s^2$. α) Αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, ποια πρέπει να είναι η ισχύς του αυτοκινήτου; β) Υπάρχει άλλη δύναμη που να παράγει ισχύ στο όχημα και ποια είναι αυτή; Πόση είναι η τιμή της ισχύος που παράγει;

(Απάντηση: α) $40.000Watt$. β) Υπάρχει, το βάρος, και παράγει ισχύ με αντίθετο πρόσημο από την ισχύ του κινητήρα.)

Δ2.7.4 Ένα βλήμα μάζας $0,01Kg$ σφηνώνεται σε ξύλινο στόχο πολύ μεγάλης μάζας, και ακινητοποιείται μέσα σε αυτόν. Το βλήμα προσπίπτει στο στόχο με ταχύτητα $200m/s$ διανύοντας μέσα σε αυτόν μια απόσταση μισού μέτρου. Αν υποθεθεί ότι το βλήμα εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση μέσα στο στόχο, να βρείτε: α) Την επιβράδυνσή του και το χρόνο μέχρι να σταματήσει. β) Τη (μέση) δύναμη που ασκείται από το ξύλο στο βλήμα. γ) Το έργο που παράγεται από τη δύναμη αυτή. Τί έχει γίνει η κινητική ενέργεια που είχε το βλήμα πριν πέσει στο στόχο; δ) Τη (μέση) ισχύ της δύναμης.

(Απάντηση: α) $40.000m/s^2$, $0,005s$. β) $400N$. γ) $200J$. δ) $40000Watt$.)

Δ2.7.5 Ένα σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης F , έχοντας ξεκινήσει από την ηρεμία. Να βρείτε την ισχύ της δύναμews κατά το 1^ο, 2^ο, 3^ο, ν -οστό δευτερόλεπτο της κινήσεως του σώματος.

$$(\text{Απ.: } \frac{F^2}{m} \left(\nu - \frac{1}{2} \right).)$$