

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί γωνίας

- ① Έστω $M(-\sqrt{3}, -3)$ να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί Αριθμοί της γωνίας $\hat{\omega} = \angle OM$
- ② Ομοίως αν $M(1, -\sqrt{3})$
- ③ Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί Αριθμοί των γωνιών (i) 0° (ii) 90° (iii) 180° (iv) 270° (v) 360°
- ④ Να μετατρέψετε τις μοίρες σε Ακτίνια
(α) 120° (β) 150° (γ) 135° (δ) 180° (ε) 270°
(στ) 10° (ζ) 12°
- ⑤ Να μετατρέψετε τα Ακτίνια σε Μοίρες
(α) $\frac{\pi}{6}$ (β) $\frac{\pi}{4}$ (γ) $\frac{3\pi}{2}$ (δ) $\frac{2\pi}{3}$ (ε) $\frac{5\pi}{6}$ (στ) $\frac{3\pi}{4}$
(ζ) 2π
- ⑥ Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί Αριθμοί των γωνιών (α) 765° (β) 1125° (γ) 2220°
(δ) 2550° (ε) $\frac{41\pi}{4}$ (στ) $\frac{601\pi}{6}$ (ζ) $\frac{49\pi}{4}$ (η) $\frac{61\pi}{6}$
(θ) $\frac{901\pi}{3}$ (η) $\frac{301\pi}{3}$
- ⑦ Να υπολογιστούν οι Παραστάσεις
$$A = 6\eta\mu\left(2\eta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\delta\omega\left(4\eta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3}\epsilon\phi\left(6\eta + \frac{\pi}{3}\right) + 6\phi\left(8\eta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B = \frac{2\eta\mu \frac{13\eta}{6} + \sqrt{2} 6\omega \frac{17\eta}{4}}{\epsilon\phi \frac{17\eta}{4} + \sqrt{3} 6\phi \frac{25\eta}{3}}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

⑧ Αν $\eta\mu\omega = -\frac{5}{3}$ ή $0 < \omega < \frac{3\pi}{2}$ να βρεθούν

$\sigma\upsilon\nu\omega, \epsilon\phi\omega, \phi\omega$

⑨ Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ να βρεθούν $\eta\mu\omega$
 $\epsilon\phi\omega, \phi\omega$

⑩ Αν $\phi\omega = -\frac{5}{12}$ $270^\circ < \omega < 360^\circ$ να βρεθούν $\eta\mu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu\omega, \epsilon\phi\omega$

⑪ Αν $\epsilon\phi\omega = -\frac{4}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ να βρεθούν $\eta\mu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu\omega, \phi\omega$

⑫ Να δείξετε ότι

$$(i) \frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} \quad (ii) \frac{1 - \epsilon\phi\chi}{1 + \epsilon\phi\chi} = \frac{\phi\chi - 1}{\phi\chi + 1}$$

$$(iii) \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha \leq \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

$$(iv) \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1 + \epsilon\phi\chi} - \frac{\eta\mu\chi}{1 + \phi\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi$$

$$(v) \frac{1 + 6\phi^5 x}{1 + 6\phi^5 x} = \left(\frac{1 + 6\phi x}{1 + 6\phi x} \right)^5$$

$$(vi) \sqrt{\frac{1 - 6\omega x}{1 + 6\omega x}} - \sqrt{\frac{1 + 6\omega x}{1 - 6\omega x}} = -26\phi x$$

$$(vii) \frac{\eta \mu x}{1 + 6\omega x} + \frac{1 + 6\omega x}{\eta \mu x} = \frac{2}{\eta \mu x}$$

$$(viii) \frac{1}{1 - 6\phi^2 x} + \frac{1}{1 - 6\phi^2 x} = 1$$

$$(ix) 6\omega^4 a + 6\omega^2 a \cdot \left(\eta \mu^2 a + \frac{1}{6\phi^2 a} \right) = 1$$

$$(x) (6\phi x + 6\phi x)^2 - (6\phi x - 6\phi x)^2 = 4$$

$$(xi) \frac{\eta \mu^3 x - 6\omega^3 x}{1 + \eta \mu x \cdot 6\omega x} = \eta \mu x - 6\omega x$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

- (13) Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί
 (i) $\eta\mu 135$ (ii) $\sigma\upsilon\nu 150$ (iii) $\epsilon\phi 225^\circ$ (iv) $\sigma\phi 330^\circ$
 (v) $\eta\mu 330^\circ$ (vi) $\epsilon\phi 660^\circ$ (vii) $\sigma\upsilon\nu 405^\circ$ (viii) $\sigma\phi 660^\circ$
 (ix) $\epsilon\phi(-30)$ (x) $\sigma\upsilon\nu(-45^\circ)$
- (14) Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των
 γωνιών (i) $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (ii) $\omega = \frac{3\pi}{4}$ (iii) $\omega = \frac{5\pi}{6}$
 (iv) $\hat{\omega} = \frac{19\pi}{6}$ (v) $\hat{\omega} = \frac{22\pi}{3}$ (vi) $\hat{\omega} = \frac{23\pi}{4}$ (vii) $\hat{\omega} = \frac{89\pi}{6}$
 (viii) $\hat{\omega} = \frac{23\pi}{6}$ (ix) $\hat{\omega} = \frac{29\pi}{3}$
- (15) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

$$A = \frac{\eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} \cdot \epsilon\phi \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4}}{\eta\mu \frac{2\pi}{3} \cdot \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} \cdot \sigma\phi \frac{5\pi}{6} \cdot \eta\mu(-\frac{\pi}{6})}$$

$$B = \frac{\eta\mu(9\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(19\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi(29\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(93\pi - \theta)}{\eta\mu(7\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(17\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(27\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(37\pi + \theta)}$$

$$\Gamma = \frac{\eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\phi 240^\circ}{\sigma\upsilon\nu(-45^\circ) + \eta\mu 225^\circ + \eta\mu 120^\circ + \epsilon\phi 150^\circ}$$

$$\Delta = \frac{\eta\mu(\pi - \alpha)}{\epsilon\phi(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\sigma\phi(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\epsilon\phi(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \cdot \frac{\sigma\omega(2\pi - \alpha)}{\eta\mu(4\pi - \alpha)}$$

$$E = \frac{n\mu(24n-\theta) \cdot 6\omega(37n-\theta) \cdot \epsilon\phi(15n+\theta) \cdot 6\phi(\frac{21n}{2}+\theta)}{n\mu(\frac{17n}{2}+\theta) \cdot 6\omega(\frac{23n}{2}-\theta) \cdot 6\phi(\frac{27n}{2}+\theta) \cdot \epsilon\phi(\theta-\frac{n}{2})}$$

$$Z = \frac{n\mu(-\theta) \cdot \epsilon\phi(n-\theta) \cdot 6\omega(n+\theta)}{n\mu(\frac{n}{2}-\theta) \cdot 6\phi(\frac{n}{2}-\theta) \cdot n\mu(n-\theta)}$$

$$H = \frac{n\mu(\frac{9n}{2}+\theta) \cdot 6\omega(\frac{19n}{2}-\theta) \cdot \epsilon\phi(\frac{29n}{2}+\theta) \cdot 6\phi(\frac{39n}{2}-\theta)}{n\mu(\frac{7n}{2}-\theta) \cdot 6\omega(\frac{17n}{2}+\theta) \cdot \epsilon\phi(\frac{27n}{2}-\theta) \cdot 6\phi(\frac{37n}{2}+\theta)}$$

$$\textcircled{16} \text{ A } \epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ k' } \frac{n}{2} < x < n \text{ va Bpewth}$$

$$A = \frac{n\mu(n+x) \cdot n\mu(\frac{n}{2}-x) + \epsilon\phi(x)}{6\omega(\frac{3n}{2}+x) + 6\omega(\frac{n}{2}-x)}$$

$$\textcircled{17} \text{ Na υπολογιστεί η παραπάνω}$$

$$A = n\mu^2(13n+\omega) + n\mu^2(\frac{11n}{2}+\omega)$$

$$\textcircled{18} \text{ Na δείξετε ότι: } n\mu^2(\frac{n}{8}+x) + n\mu^2(x-\frac{3n}{8}) = 1$$

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

(19) Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι Αρτίες ή Περιττές

(α) $f(x) = x - \eta\mu x$ (β) $f(x) = x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

(γ) $f(x) = 2\eta\mu x^2 - 3 \epsilon\phi|x| + 1$ (δ) $f(x) = \frac{|x| + x^4}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$

(ε) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$

(20) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu \frac{x}{3} + 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ έχει περίοδο $T=12\pi$

(21) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

(α) $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = 2 + \eta\mu x$, $h(x) = -2 + \eta\mu x$

(β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = -2 + \sigma\upsilon\nu x$, $h(x) = \sigma\upsilon\nu x + 1$

(γ) $f(x) = \epsilon\phi x$ (δ) $f(x) = \epsilon\phi x + 2$

(ε) $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $h(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

(ζ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $h(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

(η) $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = -1 + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(θ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

(22) Να βρεθεί η Περίοδος T των συναρτήσεων

(α) $f(x) = \eta\mu \frac{3x}{2}$ (β) $f(x) = 6\omega \frac{5x}{2}$

(γ) $f(x) = \epsilon\phi \frac{x}{4}$ (δ) $f(x) = \eta\mu \pi x$ (ε) $f(x) = \epsilon\phi \frac{x}{2}$

(23) Να βρεθεί η Περίοδος ή η Μέγιστη-Ελάχιστη Τιμή των συναρτήσεων

(α) $f(x) = 3\eta\mu \frac{x}{9}$ (β) $f(x) = -36\omega \sqrt{2}x$

(γ) $f(x) = -5\eta\mu(\pi x)$ (δ) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot 6\omega \left(\frac{\pi x}{2}\right)$

(24) Αν $f(x) = (a-2) \cdot \eta\mu \beta x$ $a < 2$, $\beta > 0$
έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{3}$ ή μέγιστο 2

να βρεθούν a, β

(25) ομοίως αν $T = \frac{\pi}{6}$ ή ελάχιστο -3

(26) Στο ίδιο σύστημα να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

(α) $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu 2x$ $x \in [0, 2\pi]$

(β) $f(x) = 6\omega x$, $g(x) = 6\omega \frac{x}{2}$ $x \in [0, 2\pi]$

(27) Να βρεθεί μέγιστη-ελάχιστη τιμή καθώς
και η περίοδος των συναρτήσεων

(α) $f(x) = 2 - 3 \ln(2x)$ (β) $f(x) = 26w \frac{x}{2} - 3$

(γ) $f(x) = 5 + 3 \ln \frac{x}{3}$ (δ) $f(x) = -2 + 56w2x$

(28) Οι μηνιαίες πωλήσεις ενός προϊόντος (σε
10.000-δες κομμάτια) δίνονται κατά προσέγγιση
 $S(t) = 30 + 10. \ln \frac{t}{3}$, t χρόνος σε μήνες
κ' για $t=1$ να αντιστοιχεί στο μήνα Ιανουάριο

(α) Να βρείτε τις περιόδους πωλήσεων

(β) Ποιες πωλήσεις έχει τον μήνα Μάρτιο

(γ) Ποιο μήνα έχει τις ελάχιστες πωλήσεις

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

29) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ (ii) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (iii) $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$

(iv) $\sigma\phi x = \sqrt{3}$

30) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ (ii) $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ (iii) $\epsilon\phi x = -1$

(iv) $\sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (v) $\eta\mu x = 0$ (vi) $\sigma\upsilon\nu x = 0$

(vii) $\eta\mu x = 1$ (viii) $\sigma\upsilon\nu x = 1$ (ix) $\eta\mu x = -1$ (x) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

(xi) $\epsilon\phi x = 0$ (xii) $\sigma\phi x = 0$

31) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $(\epsilon\phi x - 1) \cdot \sigma\phi x = 0$ (ii) $(\sqrt{2}\eta\mu x - 1) \cdot (\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

(iii) $(\sigma\phi x - 1) \cdot (2\eta\mu x + 1) = 0$

32) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $\sigma\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$ (ii) $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

(iii) $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$ (iv) $\epsilon\phi 4x - \epsilon\phi x = 0$

(v) $\epsilon\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \epsilon\phi x = 0$ (vi) $2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

(vii) $2\sigma\upsilon\nu 3x + \sqrt{3} = 0$

(33) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $\eta\mu x = 6\sigma\nu x$ (ii) $\eta\mu(x - \frac{\pi}{4}) = 6\sigma\nu(x + \frac{\pi}{3})$

(iii) $\eta\mu 2x = 6\sigma\nu(x - \frac{\pi}{3})$ (iv) $6\omega \frac{x}{3} + \eta\mu(\pi - x) = 0$

(v) $\eta\mu(x - \pi) = -6\sigma\nu(x - 3\pi)$

(vi) $6\phi(\frac{\pi}{3} - x) = \epsilon\phi x$ (vii) $\eta\mu x - \sqrt{3} 6\sigma\nu x = 0$

(34) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$ (ii) $26\omega^2 x + 6\omega x + 2 = 0$

(iii) $166\omega^4 x + 256\omega^2 x + 3 = 0$ (iv) $26\omega^2 x + 1 = 5\eta\mu x$

(v) $56\sigma\nu^2 x - \eta\mu x = 5$ (vi) $2\eta\mu^2 x + \sqrt{5}\eta\mu x = 0$

(vii) $6\phi^2 x = 6\phi x$ (viii) $\epsilon\phi^2 x + \epsilon\phi 2x = 0$

(ix) $36\sigma\nu^2 2x + 56\sigma\nu 2x = 0$

(35) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $\sqrt{2}\eta\mu x = 1$ στο $[-\pi, \pi]$ (ii) $4\eta\mu^2 x - 3 = 0$

στο $[0, 2\pi]$ (iii) $26\omega x + 1 = 0$ στο $[-\pi, \pi]$

(iv) $\sqrt{3}\epsilon\phi x + 1 = 0$ στο $[0, 2\pi]$

(v) $36\phi x - \sqrt{3} = 0$ στο $[0, \pi]$

(36) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $\frac{1 + \eta\mu x}{6\omega x} + \frac{6\omega x}{1 + \eta\mu x} = 4$ (ii) $\epsilon\phi x - 1 + 2 \frac{\eta\mu^2 x}{6\omega x} = 2\eta\mu x$

(iii) $\frac{6\sigma\nu x}{1 - \eta\mu x} - \epsilon\phi x = 2$