

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β Λυκείου
Ασκήσεις Επανάληψης
Κεφ: 3.1 – Κύκλος

1. Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.
 - α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .
 - β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.
 - γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .

2. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1,2)$ και η ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y + 1 = 0$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.
 - β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.
 - γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1)
 - α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
 - β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (C) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

4. α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.
β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.
 - i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A .
 - ii) Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο.

5. Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon) : 4x - 3y + 5 = 0$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.
 - β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .
 - γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .

6. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων
 - α) τον κύκλο C .
 - β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.
 - γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

7. Δίνεται η εξίσωση $(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$.
- β) Η αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K, R) .
- γ) Η ευθεία $(\varepsilon): x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K, R) .

8. Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

- α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .
- β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.
- δ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$.

9. Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ (1) και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ (2).

- α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1, 0)$, $\Lambda(3, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα.
- β) i) Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$.
ii) Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

10. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2}, 0)$, $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα.
- β) i) Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 .
ii) Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.