

ΑΣΚΗΣΗ 2-14666

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$.
(Μονάδες 9)
- β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)
- γ) Αν τα $\vec{\beta}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 2-14586

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$, $\overline{AG}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία Α είναι ορθή. (Μονάδες 9)
- β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overline{AM}$ και $\overline{BG}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να γραφεί το $\overline{BG}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overline{AG}$ και $\overline{AM}$. (Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 2-14953

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-2,5), Β(7,8), Γ(1,-4)

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{AG}$. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overline{AB} \cdot \overline{AG}$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία ΒΑΓ. (Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 2-15010

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου Α, Β, Γ και τα διανύσματα $\overline{BD}$ και $\overline{GE}$ τέτοια ώστε $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{BF}$ και $\overline{GE} = \overline{GA} + \overline{GB}$.

- α) i. Να δείξετε ότι $\overline{AD} = \overline{BF}$ και $\overline{AE} = \overline{GB}$. (Μονάδες 8)
- ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overline{AD}$ και $\overline{AE}$ είναι αντίθετα. (Μονάδες 8)
- β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία Α, Δ και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ 2-15038

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$. (Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ 2-15073

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$. (Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ 2-15186

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$. (Μονάδες 8)
- β) $\overline{MN} = (1,-2)$ και $\overline{\Delta\Gamma} = (8,4)$. (Μονάδες 8)
- γ) $\overline{MN} \perp \overline{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ 2-15379

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$. Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 13)
- β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (Μονάδες 12)

ΑΣΚΗΣΗ 2-15463

Δίνονται τα διανύσματα $\overline{AB} = (2,1)$ και $\overline{AG} = (3,-1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\overline{BG} = (1,-2)$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι $\overline{AB} \perp \overline{BG}$. (Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε ότι $|\overline{AB}| = |\overline{BG}|$. (Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 2-15825

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε την $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$. (Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 2-16141

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

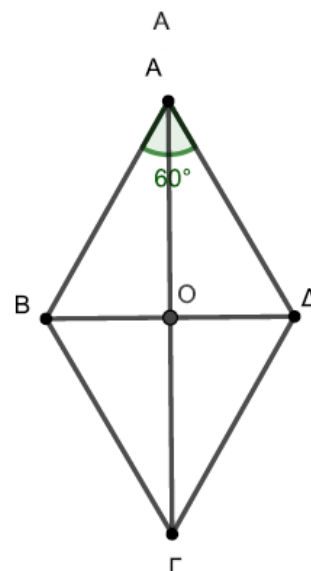
- i) $(\overline{AB}, \overline{AG})$ ii) $(\overline{AM}, \overline{B\Gamma})$ iii) $(\overline{AM}, \overline{GA})$
- iv) $(\overline{BM}, \overline{GM})$ v) $(\overline{GM}, \overline{GB})$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i) $\overline{AM} \cdot \overline{B\Gamma}$ ii) $\overline{AM} \cdot \overline{GA}$ iii) $\overline{GM} \cdot \overline{GB}$

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ 2-16144

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $A = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

- α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$ γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$
 δ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$ ε) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GD}$

(Μονάδες 25)

ΑΣΚΗΣΗ 2-16147

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{\delta}$.
 (Μονάδες 9)
 β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Οχ.
 (Μονάδες 10)
 γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\gamma}$.
 (Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ 2-16151

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 3)$ και $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.
 (Μονάδες 16)
 β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{b})$.
 (Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ 2-16426

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -1)$ και $\vec{b} = (-3, 2)$.

- α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{a}(2\vec{a} - \vec{b})$.
 (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{a}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.
 (Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 2-16427

Δίνονται τα σημεία Α(-2,3), Β(0,8), Γ(5,3) και Δ(10,5). Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GD}$.
 (Μονάδες 12)
 β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ 2-16428

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με: $|\vec{a}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{b}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{a} + 2\vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{8}$.
 (Μονάδες 15)
 β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.
 (Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ 2-16579

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

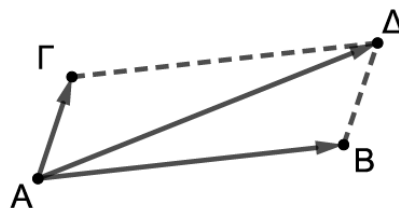
- α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 7)
 β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 9)
 γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα. (Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ 2-16580

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

- α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)
 β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 8)
 γ) του σημείου Δ . (Μονάδες 5)

**ΑΣΚΗΣΗ 2-16581**

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)
 γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 2-17070

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

- α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A , B , Γ και Δ . (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 9)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 2-18243

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και

$$\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

- α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|$, $|\vec{\delta}|$. (Μονάδες 8)
 δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$. (Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ 2-19038

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x' .

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 2-20685

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{AG}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AG}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 2-20888

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και

$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ 2-21165

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$.

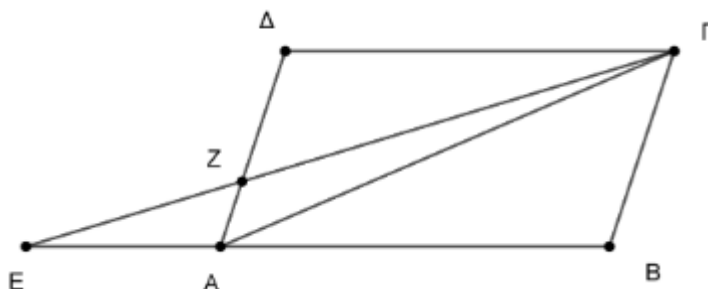
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 6)



ΑΣΚΗΣΗ 4-15042

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο του επιπέδου M , τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B , Γ , M είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του $B\Gamma$. (Μονάδες 2)

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ , λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa$ και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ 4-17076

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$ ». Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 4-21885

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

β) i. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{DE}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa |\overrightarrow{DE}|$. (Μονάδες 10)

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ 4-22170

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι υγγραμμικά; (Μονάδες 9)