

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κεφάλαιο 7

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

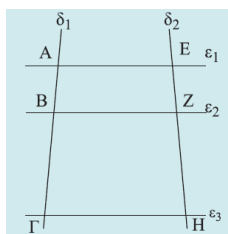
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta^2, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Αν 3 τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{BG}{ZH} = \frac{AG}{EH}$$

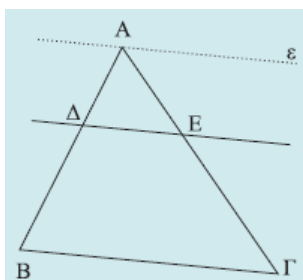


ΘΕΩΡΗΜΑ Αντίστροφο του Θ.ΘΑΛΗ

Θεωρούμε δυο ευθείες δ_1 και δ_2 που τέμνουν δυο παράλληλες ε_1 και ε_2 στα σημεία A,B και E,Z αντίστοιχα. Αν Γ και Η είναι τα σημεία των δ_1, δ_2 αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{AB}{BG} = \frac{EZ}{ZH}$, τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 .

ΠΟΡΙΣΜΑ (Εφαρμογή του Θ.ΘΑΛΗ στα τρίγωνα)

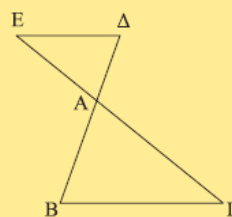
Κάθε ευθεία παράλληλη με μια απ τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δυο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.



$$\frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που η ΔΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



ΘΕΩΡΗΜΑ [Σχέση πλευρών τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ]

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δυο πλευρών τριγώνου και μια παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του ΔΕ // ΒΓ , έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ.

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΔΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$$

Κεφάλαιο 8

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο λόγος των Περιμέτρων δυο **όμοιων ευθυγράμμων σχημάτων** ισούται με το λόγο ομοιότητας τους.

Κριτήρια Ομοιότητας Τριγώνων

1. Αν δυο τρίγωνα έχουν **δυο γωνίες** τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.
2. Αν δυο τρίγωνα έχουν **δυο πλευρές ανάλογες** μία προς μία και τις **περιεχόμενες** στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.
3. Αν δυο τρίγωνα έχουν **τις πλευρές τους ανάλογες** μία προς μία , τότε είναι όμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια , όταν έχουν μια οξεία γωνία τους ίση.
2. Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
3. Δυο ισοσκελή τρίγωνα , τα οποία έχουν μια αντίστοιχη γωνία ίση , είναι όμοια.
4. Ο λόγος ομοιότητας δυο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δυο ομόλογων υψών τους.
5. Ο λόγος ομοιότητας δυο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δυο ομόλογων διχοτόμων τους.
6. Ο λόγος ομοιότητας δυο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δυο ομόλογων διαμέσων τους.

Κεφάλαιο 9

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

Πυθαγόρειο Θεώρημα & Αντίστροφο αυτού

- Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών του.
- Αν σε $AB\Gamma$ τρίγωνο ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, τότε η γωνία A είναι ορθή.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους AD που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Γενικευμένα ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ Θεωρήματα

1. Το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου η οποία βρίσκεται *απέναντι από οξεία* γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από τις πλευρές αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν.
2. Το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου η οποία βρίσκεται *απέναντι από αμβλεία* γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από τις πλευρές αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν.

Νόμος Συνημιτόνων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

Πόρισμα

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν :

$$\text{ι) } \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνον αν } A < 90^\circ$$

$$\text{ιι) } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνον αν } A = 90^\circ$$

$$\text{ιιι) } \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνον αν } A > 90^\circ$$

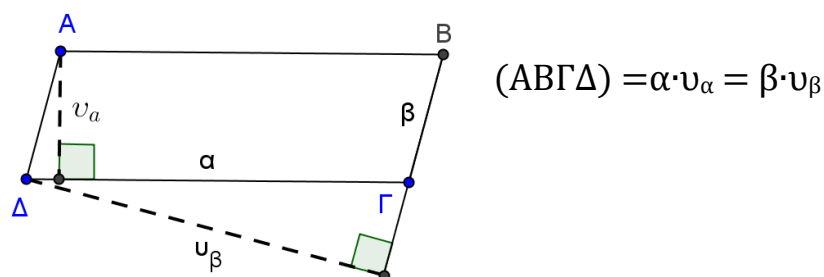
Κεφάλαιο 10

Αξιώματα

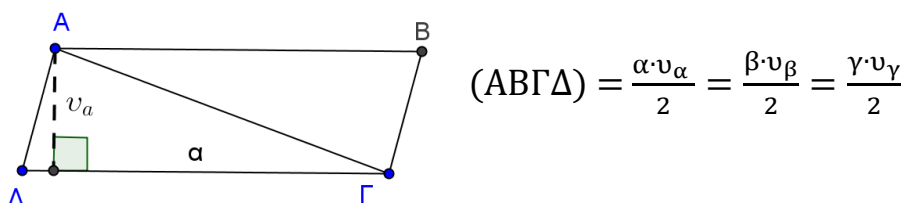
- Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
- Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένους πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.
- Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 1 είναι ίσο με 1.
- Αν πολύγωνο P περιέχεται στο εσωτερικό ενός πολυγώνου Π , τότε :
(Εμβαδόν P) < (Εμβαδόν Π)

Εμβαδά Βασικών Ευθυγράμμων Σχημάτων

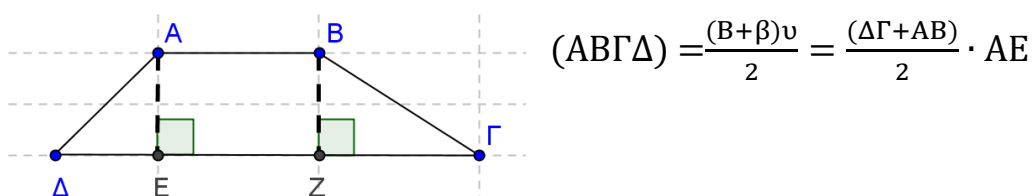
1. Τετραγώνου πλευράς α είναι $E = \alpha^2$
2. Ορθ. Παραλληλογράμμου με πλευρές α, β είναι $E = \alpha \cdot \beta$
3. Παραλληλογράμμου ABΓΔ,



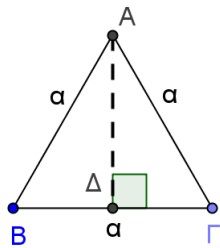
4. Τριγώνου



5. Τραπεζίου

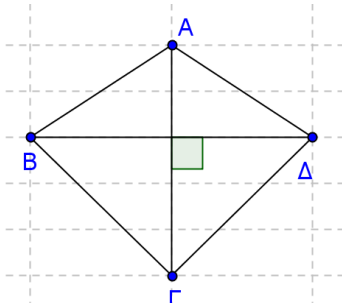


6. Ισοπλεύρου Τριγώνου (εφαρμογή 1^η σελίδα 74) :



$$(AB\Gamma) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

7. Κυρτού Τετραπλεύρου με **κάθετες** διαγωνίους – Ρόμβος (εφαρμογή 2 σελ 75)



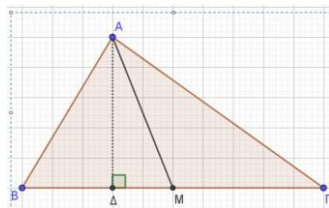
Συμβολίζω $AG = \delta_1$ και $BD = \delta_2$.

Οι δ_1, δ_2 τέμνονται κάθετα.

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\delta_1\delta_2}{2}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ !

Η διάμεσος AM σε τρίγωνο ABΓ το χωρίζει σε δυο ισοεμβαδικά τρίγωνα ABM , AMΓ.



Άλλοι Τύποι για το Εμβαδόν Τριγώνου

1. $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$, (τύπος Ήρωνα)
2. $E = \tau \cdot \rho$ (ρ: η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου)
3. $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, (R : η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου)
4. $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\alpha\gamma\eta\mu B$

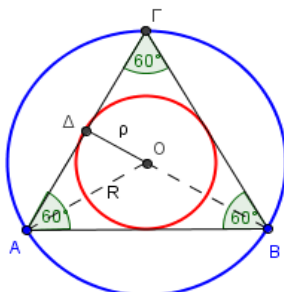
Λόγος Εμβαδών Ομοίων Τριγώνων – Πολυγώνων

1. Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.
2. Ο λόγος των εμβαδών δυο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.
3. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου , τότε ο λόγος των εμβαδών των δυο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Κεφάλαιο 11

ΘΕΩΡΗΜΑ

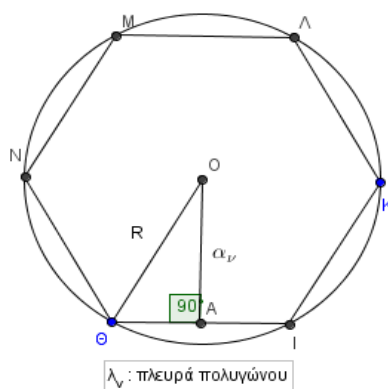
Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δυο κύκλοι είναι ομόκεντροι.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύουν οι σχέσεις :

- $\alpha_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2$
- $P_v = n \cdot \lambda_v$
- $\omega_v = \frac{360^\circ}{n}$
- $E_v = \frac{1}{2} P_v \cdot \alpha_v$



ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε δυο κανονικά ν-γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

Εγγραφή Βασικών Κανονικών Πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

	Τετράγωνο	Καν.Εξάγωνο	Ισόπλευρο Τρίγωνο
Πλευρά λ_v	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
Απόστημα α_v	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

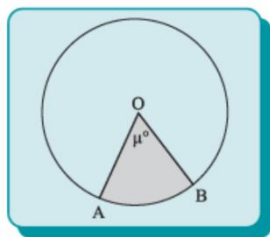
Μήκος Κύκλου ακτίνας R- Μήκος Τόξου μ° μοιρών ή α rad

$$L = 2\pi R \quad , \quad l = \frac{\pi R \mu}{180} \quad l = \alpha \cdot R, \text{ όπου } \alpha : \text{ακτίνια}$$

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R

$$E = \pi \cdot R^2$$

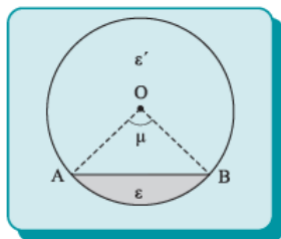
Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° και ακτίνας R



$$E = (\widehat{OAB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$$

$$(\widehat{OAB}) = \frac{\alpha R^2}{2}, \alpha : \text{rad}$$

Εμβαδόν Κυκλικού τμήματος



$$\varepsilon = (\widehat{OAB}) - (OAB)$$

