

Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Όρια και στην Συνέχεια

Θέμα 1^ο

- A. Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της .
(Μονάδες 2)
- B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και να το αποδείξετε.
(Μονάδες 5)
- Γ. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και την γεωμετρική του ερμηνεία.
(Μονάδες 3)
- Δ. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α, β) και πότε στο διάστημα $[\alpha, \beta]$;
(Μονάδες 5)

E. Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος (Μονάδες 10)

1. Αν $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ τότε η f συνεχής στο 0 . Σ Λ
2. Αν $f(x) = \frac{1}{x-2}$ και $g(x) = x^2 + 6$ τότε
 $f \circ g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ Σ Λ
 $g \circ f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 6$ Σ Λ
3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό τότε $\forall x \in \Delta$ έχω ότι $f(x) < 0$ ή $f(x) > 0$. Σ Λ
4. Η εξίσωση $\frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{x^4}{x + 3} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-3, 1)$ Σ Λ
5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα (α, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή. Σ Λ

Θέμα 2^ο

A. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2} & x < 0 \\ \lambda & x = 0 \\ \sqrt{9x^2 + x + 16} - 3x & x > 0 \end{cases}$$

- i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = 4$ (Μονάδες 6)
- ii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Μονάδες 4)
- iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Μονάδες 7)
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 \ln(8x + 1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. (Μονάδες 8)

Θέμα 3^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$.

- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 2)
- 2) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 3)
- 3) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς την συνέχεια. (Μονάδες 5)
- 4) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 4)

B. Για την συνεχή στο $[-1,1]$ συνάρτηση f , ισχύει $xf(x) = 2 - \sqrt{1-x^2} - \sin x$ για κάθε $x \in [-1,1]$

- i. Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 2)
- ii. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ \alpha & x = 0 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής.} \quad (\text{Μονάδες 5})$$

- iii. Για την τιμή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1,1]$ (Μονάδες 4)

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$ και η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύουν : $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$ και $|f(x)| < 2012\gamma$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x = f(\beta)\eta\mu x + f(\alpha)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, \alpha + \beta]$ (Μονάδες 7)
- B. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε:
- a. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \alpha + \beta$ (Μονάδες 3)
- b. Να αποδείξετε ότι η C_f της f τέμνει την $y = 2x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$ (Μονάδες 4)
- C. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)\eta\mu 4x}{x^2 + 1}$ (Μονάδες 6)
- D. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) - h(x) = 2004x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ακόμη ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις ετερόσημες ρ_1, ρ_2 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) (Μονάδες 5)

Διάρκεια : 3 ώρες

Καλή επιτυχία