

Γ.Ε.Λ. ΣΚΙΑΘΟΥ

Διαγώνισμα 1^ο Τετραμήνου στο 1^ο Κεφάλαιο

Ημερομηνία :-12-2023

Τμήμα: Γ' - Οικονομίας και Πληροφορικής

Ονοματεπώνυμο :

Θέμα 1^ο

A. Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της .

(Μονάδες 2)

B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και να το αποδείξετε.

(Μονάδες 5)

Γ. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και την γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 3)

Δ. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α, β) και πότε στο διάστημα $[\alpha, \beta]$;

(Μονάδες 5)

E. Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

(Μονάδες 10)

1. Αν $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ τότε η f συνεχής στο 0 .

Σ Λ

2. Αν $f(x) = \frac{1}{x-2}$ και $g(x) = x^2 + 6$ τότε

$$f \circ g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

Σ Λ

$$g \circ f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 6$$

Σ Λ

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό τότε $\forall x \in \Delta$ έχω ότι

$$f(x) < 0 \quad \text{ή} \quad f(x) > 0 .$$

Σ Λ

4. Η εξίσωση $\frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{x^4}{x + 3} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-3, 1)$

Σ Λ

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα (α, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

Σ Λ

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ και $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

1) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1} = g$.

(Μονάδες 5)

2) Να ορισθεί η συνάρτηση $g \circ f$.

(Μονάδες 5)

3) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

4) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f , f^{-1} είναι περιττές συναρτήσεις. (Μονάδες 7)

Θέμα 3^ο

Δίνεται περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο 2 για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2 + x - 2}{x - 2} = 9$$

1. Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

2. Να αποδείξετε ότι η f συνεχής στο -2

3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4x + 4}$

4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2) + \eta\mu(x - 2)}{x^2 - 4}$

(Μονάδες 25)

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) - 2f(1-x) = 3x - 3 - e^{-x} + 2e^{x-1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x) = x - e^{-x} + 1$. (Μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{-x} - x - 2) + e > 0$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει :

$$e^{x_0} \cdot (x_0 - 2023) = 1 \quad \text{(Μονάδες 7)}$$

Διάρκεια : 2 διδακτικές ώρες