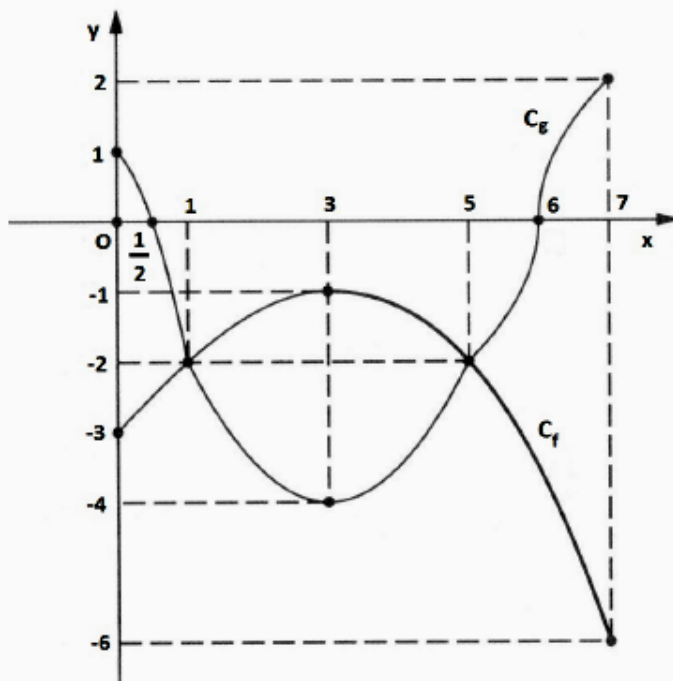


Διαγώνισμα
Στις Συναρτήσεις
Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Θέμα 1^ο

- A. Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω με Σωστό ή Λάθος : (Μονάδες 10)
- | | | |
|---|---|---|
| 1. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 2. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln x^2$ είναι το $\mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 3. Η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N}^*$ είναι: | | |
| i) άρτια, αν ο v είναι άρτιος | Σ | Λ |
| ii) περιττή, αν ο v είναι περιττός. | Σ | Λ |
| 4. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$. | Σ | Λ |
| 5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$. Τότε κάθε κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των C_f και $C_{f^{-1}}$ ανήκει στην ευθεία $y = x$. | Σ | Λ |
| 6. Αν ισχύει $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο 3. | Σ | Λ |
| 7. Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και μια συνάρτηση I , για την οποία ισχύει $I(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει $(I \circ f)(x) = (f \circ I)(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. | Σ | Λ |
| 8. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. | Σ | Λ |
| 9. Αν μια συνάρτηση f 1-1 παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο x_0 , τότε θα παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $-x_0$. | Σ | Λ |
- B. Πότε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1; (Μονάδες 2)
- Γ. Πότε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 ; (Μονάδες 3)

- Δ. Οι συναρτήσεις του σχήματος που ακολουθεί έχουν πεδίο ορισμού το $A = [0, 7]$. Σύμφωνα τα δεδομένα της γραφικής παράστασης της f να απαντήσετε στα παρακάτω.



- (α) Να γράψετε τα σύνολα τιμών $f(A), g(A)$.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ και την ανίσωση $g(x) > 0$ ως προς x .
- (γ) Να βρείτε τα $(f + g)(3)$, $(f \circ g)(6)$, $(g \circ g)(0)$.
- (δ) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{f}{g}\right)(x) < 1$.
- (ε) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες ως προς x ;

(Μονάδες 10)

Θέμα 2^ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4 - x^2) - 3$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 4)
2. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες. (Μονάδες 3)
3. Να βρείτε για ποιές τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $X'X$. (Μονάδες 5)

B. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

(Μονάδες 3)

2. Να ορίσετε την σύνθεση $f \circ f$.

(Μονάδες 5)

3. Αν $g(x) = \ln(3-x)$ να ορίσετε την σύνθεση $f \circ g$.

(Μονάδες 6)

Θέμα 3^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Να βρείτε :

α) την συνάρτηση $f^{-1}(x)$

(Μονάδες 4)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f^{-1}(x)$ και $f(x)$

(Μονάδες 5)

γ) η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο μηδέν.

(Μονάδες 4)

B. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x, x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 5)

B2 . Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), x \in (0,1)$, να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη.

(Μονάδες 6)

Θέμα 4^ο

A. Έστω μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού και τιμών το $\mathbb{R}$ για τον οποία υποθέτουμε ότι

$$f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 6, x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι :

1. η f είναι συνάρτηση 1-1

(Μονάδες 4)

2. $f^{-1}(x) = \frac{f(x) + x^3 - 6}{2}, x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

β. Να λύσετε τις εξισώσεις :

1. $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$

(Μονάδες 4)

2. $f(x) = x$

(Μονάδες 5)

Οδηγίες για τους Εξεταζόμενους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Καλή Επιτυχία