

Μαθηματικά Γ' Λυκείου
Διαγώνισμα
στον Διαφορικό Λογισμό

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο δίπλα σε κάθε γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε ερώτηση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι αληθής ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λάθος.

(Μονάδες 10)

1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Σ Λ
2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ ισχύει $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$. Σ Λ
3. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[a, \beta]$ με $f(\beta) < f(a)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$. Σ Λ
4. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Σ Λ
5. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Σ Λ

B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και την γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 7)

Γ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν :

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Μονάδες 8)

Θέμα 2^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2)$.

- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f . (Μονάδες 5)
- 2) Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 4)
- 3) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$.

- α) Να βρείτε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f . (Μονάδες 4)
- β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 3)
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 3)

Θέμα 3^ο

A. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν: f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0) = 2$ και $f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- a. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 3)
- b. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f . (Μονάδες 5)
- c. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 7)

Θέμα 4^ο

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με :

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = -1 \quad \text{και} \quad f''(x) = e^{2f(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x > 0$$

Να αποδείξετε ότι :

1. η συνάρτηση f παραγωγίζεται και τρίτη φορά.
2. $f''(x) = [f'(x)]^2$.
3. η συνάρτηση $g(x) = -f'(x)e^{-f(x)}, x > 0$ είναι σταθερή.
4. $f'(x) = -e^{f(x)}$ για κάθε $x > 0$.
5. $f(x) = -\ln x, x > 0$.

(Μονάδες 25)

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των
φωτοαντιγράφων.

Καλή Επιτυχία

ΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

ΓΙΑΝΝΗΣ ΚΑΠΟΥΛΑΣ