

Ο ΤΣΕΛΕΜΕΝΤΕΣ ΤΟΥ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΟΡΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Μήταλας Γ, Δρούγας Α, Χάδος Χ, Γερμανός Ξ, Πάτσης Σ.

Το χόμπι μου είναι η μαγειρική και ενίοτε παθαίνω εκρήξεις φαιδρότητας και κυνισμού. Ηρεμήστε, δεν προτίθεμαι να παραθέσω συνταγές μαγειρικής, πλην όμως, τα τελευταία χρόνια έχω πολλές ενστάσεις για τον τρόπο που εξετάζονται τα μαθηματικά στις πανελλαδικές εξετάσεις. Γιατί να το κρύψουμε άλλωστε, η επιτροπή θεμάτων τα τελευταία χρόνια πίνει νερό στο όνομα του Αλ Κβαρίσμι και έχει αγιοποιήσει την μεθοδολογία. Διάβαζα, πρόσφατα σε γνωστό μέσο κοινωνικής δικτύωσης ότι «μεθοδολογία στα μαθηματικά είναι ένα τέχνασμα που έγινε viral», ένας on line εξωραϊσμός του γνωστού αφορισμού του Τζωρτζ Πόλυα. Παρόλα αυτά, το παρόν είναι απόλυτα εναρμονισμένο στην λογική ενός τσελεμεντέ τεχνικών επίλυσης ασκήσεων. Το εγχειρίδιο του επιτήδειου στα μαθηματικά θετικού προσανατολισμού. Πέρα και μακριά από την μαθηματική σκέψη στις παρακάτω σελίδες θα βρείτε μια σειρά από τυφλοσούρτες για να λύσετε τα θέματα των πανελλήνιων. Το παρόν συμπληρώνει το σχολικό βιβλίο. Που και που θα βρίσκετε αγαπημένες συνταγές!!

Σ.Ο.Κ.Ο.Ν

### Μουσακάς με μελιτζάνες

Υλικά

- 1 κιλό μεγάλες μελιτζάνες
- 4 μεγάλες πατάτες
- 1/2 κιλό κιμά
- 1/2 φλιτζάνι λάδι
- 1 μεγάλο κρεμμύδι ψιλοκομμένο
- 2 σκελίδες σκόρδο ψιλοκομμένο
- 1/2 φλιτζάνι κρασί
- 1/2 ματσάκι μαϊντανό
- 1 κονσέρβα τοματάκι
- 1 κουταλιά πελτέ
- 1 ξυλαράκι κανέλλα
- αλάτι και πιπέρι
- 2 φλιτζάνια κεφαλοτύρι τριμμένο
- 4 κουταλιές βούτυρο
- 6 κουταλιές της σούπας αλεύρι
- 1 κουτί γάλα εβαπορέ
- 2 φλιτζάνια νερό λίγο μοσχοκάρυδο
- 1 κρόκο αυγού

Εκτέλεση

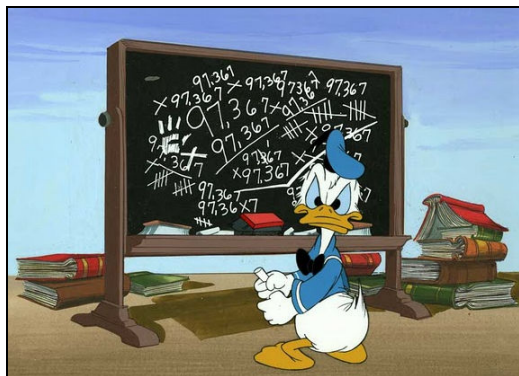
Κόβετε τις μελιτζάνες σε στρογγυλά κομμάτια. Βάλετε τις σε ένα μπολ με αλάτι και νερό για μισή ώρα. Κόβετε τις πατάτες σε ροδέλες και τις τηγανίζετε. Ξεπλένετε τις μελιτζάνες και τις τηγανίζετε. Σε μία κατσαρόλα ζεσταίνετε το λάδι και τσιγαρίζετε το κρεμμύδι. Προσθέτετε τον κιμά και τσιγαρίζετε ανακατεύοντας με πιρούνι για να μην βρολιάσει. Προσθέτετε το σκόρδο, την κανέλλα Αλατοπιπερώνετε. Σβήνετε με κρασί. Προσθέτετε τον μαϊντανό. Ρίχνετε την τομάτα και τον πελτέ και ανακατεύετε. Ψήνετε μέχρι να απορροφηθούν όλα τα υγρά. Στρώνετε σε ένα ταψί τις πατάτες σε ένα στρώμα. Από πάνω στρώνετε τις μελιτζάνες. Απλώνετε τον κιμά. Λιώνετε το βούτυρο Ζεσταίνετε το γάλα διαλυμένο στο νερό. Προσθέτετε στο λιωμένο βούτυρο, το αλεύρι ανακατεύοντας συνεχώς. Μόλις γίνει μια σφικτή μάζα προσθέτετε λίγο λίγο το γάλα ζεστό ανακατεύοντας να μην βρολιάσει και δεν ρίχνετε άλλο αν πρώτα δεν πει το προηγούμενο. Προσθέτετε τον κρόκο και το μοσχοκάρυδο και ανακατεύετε. Στρώνετε την μπεσαμέλ από πάνω από τον κιμά. Πασπαλίζετε με τυρί. Ψήνετε σε μέτριο φούρνο και ο μουσακάς είναι έτοιμος.



BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) Μαθηματικά Θετικού προσανατολισμού, Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης. Ο.Ε.Δ.Β
- 2) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Μπάρλας Α., Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική
- 3) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Κατσαρός Δ., Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική
- 4) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Στεργίου –Νάκης, Εκδόσεις Σαββάλα
- 5) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Μαυρίδης Γ., Εκδόσεις Μαυρίδη
- 6) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Σκομπρης Γ., Εκδόσεις Σαββάλα
- 7) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Μιχαηλίδης Γ., Εκδόσεις Μαυρίδη
- 8) Ανάλυση Μαθηματικά, Αχτσαλωτίδης Χ., Εκδόσεις Μεταίχμιο
- 9) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Παπαδάκης, Εκδόσεις Σαββάλα
- 10) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Ξένος. Θ., Εκδόσεις Ζήτη
- 11) Μαθηματικά-Ανάλυση Μαντάς Γ., Εκδόσεις Μαντά
- 12) Μαθηματικά-Ανάλυση Ευρυπιώτης Σ.Γ., Εκδόσεις Πατάκη
- 13) Μαθηματικά-Ανάλυση Μπαλάκης Σ.Γ., Εκδόσεις Σαββάλα
- 14) Ανάλυση 1,2, Γκατζούλη Κ., Εκδόσεις Γκατζούλη
- 15) 1000+1 ασκήσεις στις παραγώγους, Ξηνταβελώνης Π., Εκδόσεις Λιβάνη
- 16) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Β & Ρ Σπανδάγου., Εκδόσεις Αίθρα
- 17) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Αρχείο Σ.Ο.Κ.Ο.Ν
- 18) ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β
- 19) Συναρτήσεις, Ποστάντζης Β.
- 20) Βιβλίο του διδάσκοντος Για το μάθημα ανάλυση της Γ Λυκείου, Γ.Παντελίδη, Εκδόσεις Ζήτη
- 21) Θεώρημα μέσης τιμής, Γιαννιτσιώτης-Καραγιώργος, Εκδόσεις Κωστόγιαννος
- 22) Συναρτήσεις Θ.Ν. Καζάντζης. Εκδόσεις Τυποεκδοτική
- 23) Ανάλυση, Ντζιωρας.Η, Εκδόσεις Πατάκη
- 24) Ανάλυση, Μπαράλος Γ. Εκδόσεις Παπαδημητρώπουλου
- 25) Απειροστικός λογισμός, Spivak M., Παν. Εκδόσεις Κρήτης
- 26) Μαθηματική ανάλυση Ρασιιάς Μ., Εκδόσεις Σαββάλα
- 24) Problems in Calculus, I.M.Maron Mir Publisher
- 25) Θέματα μαθηματικών κατεύθυνσης, Πανουσάκης Ν., Εκδοτικός όμιλος Συγγραφέων καθηγητών
- 26) Το Φ
- 27) «Η διδασκαλία του Απειροστικού λογισμού, μέσω αντιπαραδειγμάτων», Πλάταρος Γιάννης

Τα σχήματα επιμελήθηκε ο Ντόναλντ Ντάκ ενώ τους γραμμοκώδικες (qr-code) δημιούργησε ο Οβελίξ σε συνεργασία με τον Κακοφωνίξ.



## ΟΡΙΑ

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ .

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι  $\mathbb{R} - \{3\}$ , γιατί για  $x = 3$  ο παρονομαστής γίνεται  $3 - 3 = 0$ .

Φτιάχνουμε έναν πίνακα τιμών στον οποίο θέτουμε ως  $x$ , αριθμούς που προσεγγίζουν το 3.

|        |     |      |       |      |     |
|--------|-----|------|-------|------|-----|
| $x$    | 2.9 | 2.99 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |
| $f(x)$ | 5.9 | 5.99 | 6.001 | 6.01 | 6.1 |

Παρατηρούμε ότι, όταν το  $x$  πλησιάζει («τείνει») προς το 3, αλλά από μικρότερες τιμές, τότε οι τιμές της  $f(x)$  πλησιάζουν στην τιμή 6. Ενώ όταν το  $x$  πλησιάζει προς το 3, αλλά από μεγαλύτερες τιμές, πάλι οι τιμές της  $f(x)$  πλησιάζουν προς το 6.

Για την ακρίβεια: μπορούμε να βρούμε τιμή της  $f(x)$  όσο κοντά στο 6 θέλουμε, αρκεί να πάρουμε ως  $x$  έναν αριθμό πολύ κοντά στο 3.

Συμβολίζουμε: όταν  $x \rightarrow 3$ , τότε  $f(x) \rightarrow 6$  ή  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

## Ορισμός

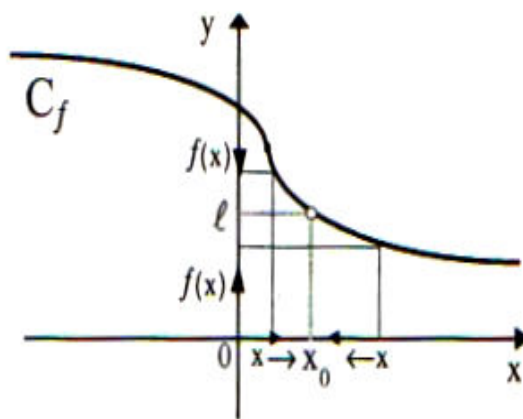
Έστω η συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Αν οι τιμές της  $f(x)$  βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στον πραγματικό αριθμό  $l$ , καθώς οι τιμές του  $x$  πλησιάζουν αρκετά κοντά στο  $x_0$  (αλλά δεν γίνεται απαραίτητα ίσο με το  $x_0$ ), τότε λέμε ότι η συνάρτηση έχει όριο τον πραγματικό αριθμό  $l$  όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$ . Συμβολίζουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Αν ορίζεται το όριο της  $f(x)$  στο  $x_0$ , τότε αυτό είναι μοναδικό.

21 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 

## Το όριο μέσα από γραφική παράσταση

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ . Δεν γνωρίζουμε τον τύπο της, ωστόσο παρατηρούμε ότι δεν ορίζεται για  $x = x_0$ , αφού υπάρχει κενό εκεί που περιμέναμε το αντίστοιχο σημείο της γραφικής της παράστασης. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε μεταβλητό αριθμό  $x$ , τον οποίο θα μεταφέρουμε πολύ κοντά στο  $x_0$  και θα μελετήσουμε την αντίστοιχη κίνηση των  $f(x)$ . Από το σχήμα είναι φανερό ότι, καθώς το  $x$  προσεγγίζει το  $x_0$ , οι τιμές  $f(x)$  προσεγγίζουν τον αριθμό  $l$ .



Αρα, αν δοθεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ζητείται το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  σε σημείο

$x_0$  του πεδίου ορισμού της, κάνω τα εξής:

1). Παρατηρώ σε ποιο σημείο πλησιάζουν οι τιμές της  $f$  καθώς οι τιμές του  $x$  πλησιάζουν εκατέρωθεν (αν είναι δυνατόν) το  $x_0$ .

2). Η τεταγμένη  $y_0$  αυτού του σημείου είναι το όριο της  $f(x)$  και η τετμημένη η θέση  $x_0, y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

- Πλευρικά όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$ .

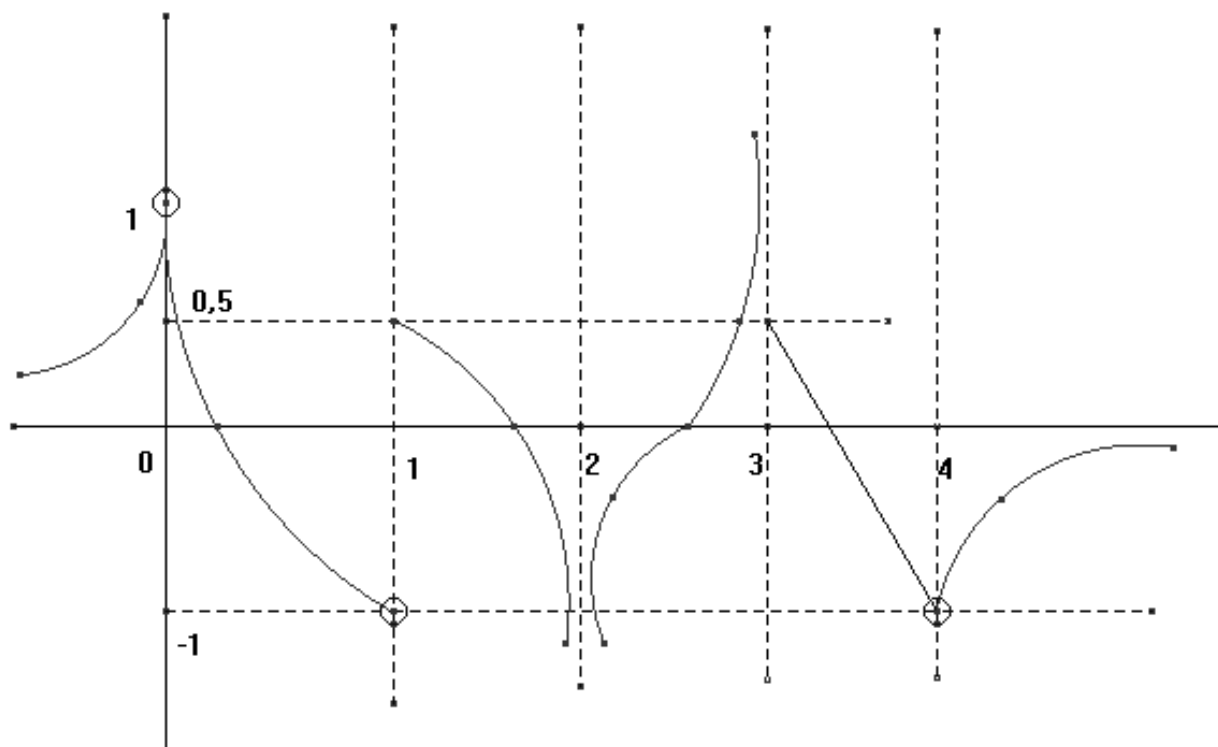
Στις θέσεις  $x_0$ , όπου οι καμπύλες δεν «συναντώνται» έχουμε μόνο πλευρικά όρια (μεταξύ τους άνισα) με την προϋπόθεση ότι εκατέρωθεν του  $x_0$  ορίζεται η συνάρτηση.

- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$ , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .
- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

Δείτε το παράδειγμα

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

21-1. Να βρεθούν τα όρια της συνάρτησης  $f$  στις θέσεις  $x_0 = 0, 1, 2, 3, 4$ , όταν η γραφική παράσταση της  $f$  είναι:



$x \rightarrow 0$ : Όταν  $x \rightarrow 0^-$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$  και όταν  $x \rightarrow 0^+$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ . Συνεπώς τα πλευρικά όρια είναι ίσα, άρα υπάρχει όριο στη θέση  $x_0 = 0$  και είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

$x \rightarrow 1$ : Όταν  $x \rightarrow 1^-$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$  και όταν  $x \rightarrow 1^+$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0,5 \neq -1$ . Συνεπώς τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, άρα και η  $f$  δεν έχει όριο στη θέση  $x_0 = 1$ .

$x \rightarrow 2$ : Όταν  $x \rightarrow 2^-$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  και όταν  $x \rightarrow 2^+$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ . Άρα το όριο της  $f$  στη θέση  $x_0 = 2$  υπάρχει και είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ .

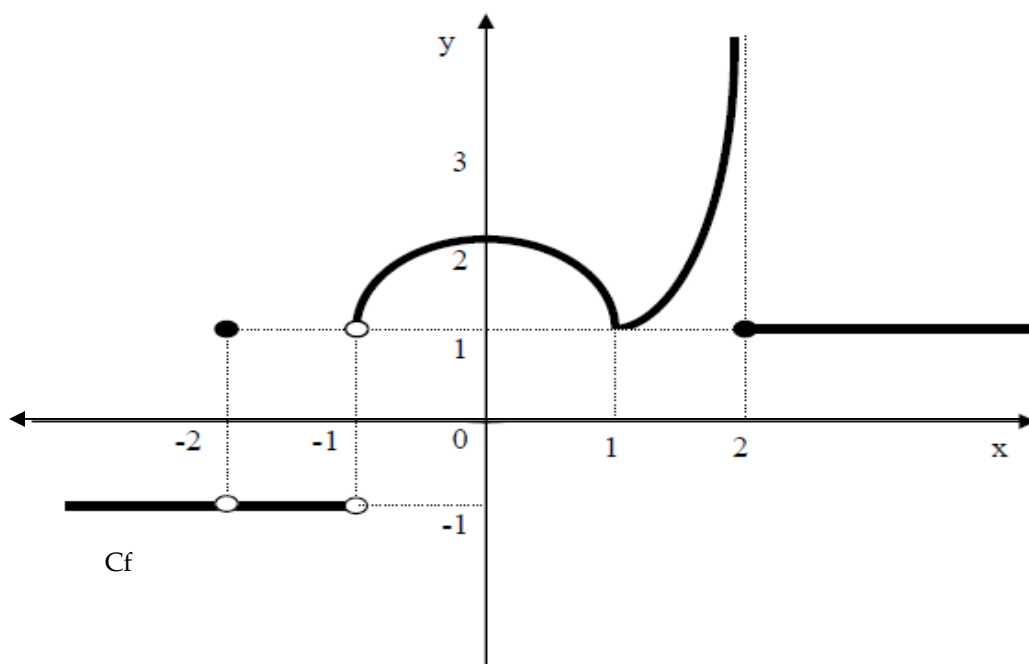
$x \rightarrow 3$ : Όταν  $x \rightarrow 3^-$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$  και όταν  $x \rightarrow 3^+$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0,5$ . Τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά άρα δεν υπάρχει το όριο της  $f$  στη θέση  $x_0 = 3$ .

$x \rightarrow 4$ : Όταν  $x \rightarrow 4^-$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -1$  και όταν  $x \rightarrow 4^+$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -1$ . Άρα το όριο της  $f$  στη θέση  $x_0 = 4$  υπάρχει και είναι το  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -1$ .

**21-1B.** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ . Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

i)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$     ii)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$     iii)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$     iv)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     v)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Υπάρχει το όριο στο  $x_0 = 1$ ;



Λύση

i)  $x \rightarrow -2$  είναι  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$ .

ii)  $x \rightarrow -1^-$ : Όταν  $x \rightarrow -1^-$  είναι  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$

iii)  $x \rightarrow -1^+$  είναι  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \neq -1$ .

Συνεπώς τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, άρα και η  $f$  δεν έχει όριο στη θέση  $x_0 = 1$ .

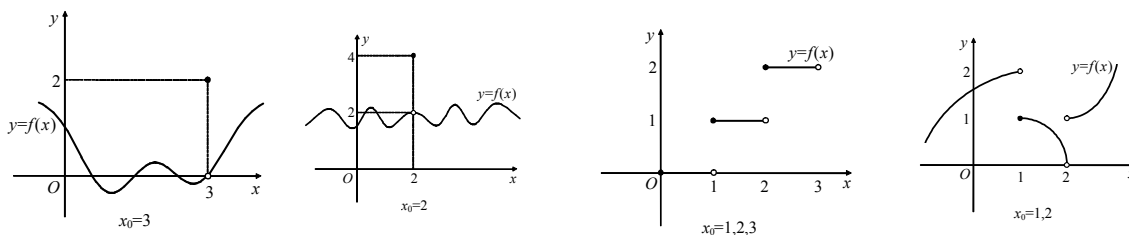
iv)  $x \rightarrow 1$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

v) Όταν  $x \rightarrow 2^-$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

vi) όταν  $x \rightarrow 2^+$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ . Τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά άρα δεν υπάρχει το όριο της  $f$  στη θέση  $x_0 = 2$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

**21-2.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και το  $f(x_0)$ , εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι:



**21-3.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη στο  $[-2, +\infty)$  και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$

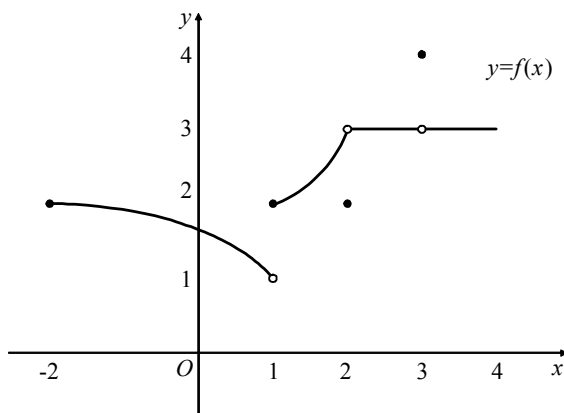
ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

v)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

vi)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$



**21-4.** Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , όταν:

i)  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ ,  $x_0 = 2$

ii)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ ,  $x_0 = 1$

iii)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}$ ,  $x_0 = 1$

iv)  $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ ,  $x_0 = 0$ .

**21-5.** Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , όταν:

i)  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$ ,  $x_0 = 1$  ή  $x_0 = -1$  ii)  $f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{3x - 1}$ ,  $x_0 = \frac{1}{3}$ .

**21-6.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x}$ . Να χαράξετε τη  $C_f$  και με τη βοήθεια της να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα  $f(1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**21-7.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  και να προσδιορίσετε το  $x_0 \in \mathbb{R}$  στο οποίο δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

22 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΩΝ

1. Ιδιότητες

Αν υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$  τότε:

- 1).  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 2).  $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 3).  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 4).  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$  εφόσον  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- 5).  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
- 6).  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$  εφόσον  $f(x) \geq 0$  κοντά στο  $x_0$
- 7).  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^v(x) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$

**Προσοχή:** Μπορεί να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  και να μην υπάρχουν τα όρια των  $f, g$  στο  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} C = C, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

Αν  $P(x), Q(x)$  πολυώνυμα, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$$

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ , τότε  $\lambda$  μοναδικό.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - \lambda| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda.$$

**Τι μας λένε τα θεωρήματα (1) έως (7):** Ουσιαστικά μας δίνουν ένα τρόπο υπολογισμού ορίων συναρτήσεων με περίπλοκους τύπους. Συγκεκριμένα, όταν ένα όριο αναφέρεται σε μια συνάρτηση που προκύπτει με τις συνηθισμένες πράξεις μεταξύ άλλων συναρτήσεων, τότε το όριο μεταφέρεται σε κάθε όρο αυτής, εφόσον πληρούνται δυο προϋποθέσεις:

1) Όλες οι επι μέρους συναρτήσεις να έχουν όρια πραγματικούς αριθμούς.

2) Να μη μηδενίζονται, μετά την αντικατάσταση των ορίων, παρονομαστές, εφόσον υπάρχουν στον τύπο της συνάρτησης.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2|x-2|+3|x-3|}{|x|+2|2-x|+1}.$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

22-1. Αν  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$  βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  με  $g(x) = \frac{(f(x)+x)^{2004} + \ln(f(x))}{\epsilon\phi \frac{\pi f(x)}{4}}.$

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(f(x)+x)^{2004} + \ln(f(x))}{\epsilon\phi \frac{\pi f(x)}{4}} = \frac{\left( \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} x \right)^{2004} + \ln \left( \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \right)}{\epsilon\phi \frac{\pi \lim_{x \rightarrow -1} f(x)}{4}} = \frac{(1-1)^{2004} + \ln 1}{\epsilon\phi \frac{\pi}{4}} = 0$$

22-2. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} [(x+1)f^2(x) - x^2 \sqrt{g^2(x)+3}]$  όταν  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1.$

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 3} [(x+1)f^2(x) - x^2 \sqrt{g^2(x)+3}] = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) \left[ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \right]^2 - \left( \lim_{x \rightarrow 3} x \right)^2 \sqrt{\left[ \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \right]^2 + 3} = (3+1)2^2 - 3^2 \sqrt{1^2 + 3} = -2$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

**22-3.** Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \ln(2 - e^x) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} (2\eta\mu^2 x + 4) \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 2}{x - 1}.$$

**22-4.** Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)^3 (2x - 1)^7 \quad ii. \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5x - 7) \quad iii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 10}{\sqrt{x} + 5}.$$

**22-5.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( 2\eta\mu^2 \frac{x}{2} + x \sigma\upsilon\nu x \right)$ .

**22-6.** Να βρεθεί ο  $\alpha \in \mathbb{R}$  αν,  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3\alpha x + \alpha^2 + 5) = 1$ .

**22-7.** Να βρείτε τα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} (x^5 - 4x^3 - 2x + 5)$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1} (x^{10} - 2x^3 + x - 1)$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow -1} (x^8 + 2x + 3)^{20}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 3} [(x - 5)^3 |x^2 - 2x - 3|]$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x - 5}{x + 3}$$

$$vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - 3x| + |x - 2|}{x^2 + x + 1}$$

$$vii) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{(x + 2)^2}$$

$$viii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 + 4x + 3}.$$

**22-8.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  αν:

$$i) g(x) = 3(f(x))^2 - 5 \quad ii) g(x) = \frac{|2f(x) - 11|}{(f(x))^2 + 1} \quad iii) g(x) = (f(x) + 2)(f(x) - 3).$$

**2. Αντικαθιστούμε στη θέση του  $x$  το  $x_0$ .**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

**22-9.** Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 4)$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -2} [(2x - 1)(x + 4)]$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 4} \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 0} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (3\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x).$$

**22-10.** Να βρείτε τα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 2x^3 + 3x + 1)$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + 2x - 3)$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow -2} [(x + 3)^5 \cdot (x + 4)]$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - x}{x^2 - 3x + 3}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 2x + 6}$$

$$vi) \lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 2x + 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu\pi x)]$$

$$vii) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3(x - 2)}$$

$$viii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2}{x^2 + 1}$$

$$ix) \lim_{x \rightarrow 0} [(x + 1)\sigma\upsilon\nu x]$$

**22-11.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ , να υπολογίσετε τα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 1} (f^2(x) - 2f(x) + 3)$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3}{f(x) + 1}$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f^2(x) + f(x) + 2}$$

$$iv. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 2)^4 + 2}{f^2(x) + f(x) + 1}.$$

**☺☺☺ Ένα σχόλιο στα όρια.**

Για να έχει νόημα η μελέτη του ορίου μιας συνάρτησης  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , στο σημείο  $x_0$  θα πρέπει να υπάρχει θετικός αριθμός  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) τέτοιος ώστε η  $f$  να είναι ορισμένη σε ένα από τα

$$\text{σύνολα } (*) \begin{cases} (x_0 - \alpha, x_0) \cup (x_0, x_0 + \alpha) \\ (x_0 - \alpha, x_0) \\ (x_0, x_0 + \alpha) \end{cases}.$$

Η απαίτηση «η συνάρτηση  $f$  να είναι ορισμένη σε ένα από τα σύνολα της μορφής  $(*)$ » είναι απαραίτητη, για να υπάρχουν σημεία  $x$  του πεδίου ορισμού, διαφορετικά του  $x_0$  οσοδήποτε κοντά στο  $x_0$ . Αντισταυμάστε ότι δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε το όριο μιας συναρτήσεως σε μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της.

23 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ  $\frac{0}{0}$ : ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Παραγοντοποιώ τον αριθμητή και τον παρονομαστή (συνήθως με σχήμα Horner) μέχρι τη μορφή  $(x-x_0)\Pi(x)$  (αν  $x \rightarrow x_0$  τότε  $x-x_0$  κοινός παράγοντας).
- Απλοποιώ τον κοινό παράγοντα και βρίσκω το όριο του πηλίκου. (Ενδέχεται μετά από απλοποίηση να έχω πάλι απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ . Αυτό σημαίνει ότι  $x_0$  διπλή ρίζα.

Επαναλαμβάνω τα ίδια).

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$ .

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

23-1. Να υπολογιστούν τα όρια (i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{-x^2 + 3x - 2}$

Λύση

i). Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x + 2) = 0$ . Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x - 1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 1}{x-1} = 7.$$

ii). Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 3x - 2) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + x^2 + x^3 - 3) = 0$ . Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{-x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)(-x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{-x+2} = 6.$$

23-2. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ .

Λύση

i). Επειδή για  $x = -2$  μηδενίζονται οι παρονομαστές των κλασμάτων, εκτελούμε τις πράξεις. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}.$$

23-3. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2}{x^2 - 2x} \right)$ .

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1) - 2(x-1)}{x(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Παρατήρηση: Η παραπάνω άσκηση αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα γιατί δεν πρέπει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  να το σπάμε στα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , αφού δεν γνωρίζουμε αν αυτά τα όρια

υπάρχουν. Π.χ. εδώ τα  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x^2 - 2x}$  δεν υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

23-4. Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 8} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^2 - 5x - 10}{x^2 - 3x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x^3 + x^2 + x - 14} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}$$

23-5. Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)^3 - 27}{x^2 + x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} + \frac{5x - 2}{x^2 - 3x + 2} \right)$

24 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ  $\frac{0}{0}$ : ΣΥΖΗΓΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

1. Απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$  και ο αριθμητής ή ο παρονομαστής είναι της μορφής  $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ ,  $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$
- Πολλαπλασιάζω παρονομαστή και αριθμητή με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή ή παρονομαστή αντίστοιχα.
  - Παραγοντοποιώ – απλοποιώ τον κοινό παράγοντα και βρίσκω το όριο.
  - Στην περίπτωση που και ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι της μορφής πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση και των δύο.

Παράδειγμα1: Να βρεθούν τα όρια: α.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-1-2}$  β.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}-2}$ .

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

24-1. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

(i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$  (ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2}$

Λύση

i). Πρέπει  $x^2+5 \geq 0$  και  $x^2-2x \neq 0$ , οπότε  $x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  και  $x \neq 2$ .

Αρα  $A = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$  και το όριο έχει νόημα. Το όριο είναι της μορφής  $\frac{0}{0}$  και πρέπει να

απλοποιήσουμε την παράσταση. Για  $x$  κοντά στο 2 η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$  γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{x^2-4}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)},$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3}.$$

ii). Θα ελέγξουμε αν έχει νόημα το όριο.

Πρέπει  $2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$ ,  $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$  και  $\sqrt{x+3}-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ .

Οπότε το πεδίο ορισμού είναι  $A = [-3, 1) \cup (1, +\infty)$  και το όριο έχει νόημα. Για  $x$  κοντά στο 1 η

$$\text{συνάρτηση } f(x) = \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2} \text{ γράφεται } f(x) = \frac{(2x+7-9)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{2x+7}+3)(x+3-4)} = \frac{2(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)} = \frac{2(\sqrt{x+3}+2)}{\sqrt{2x+7}+3}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x+3}+2)}{\sqrt{2x+7}+3} = \frac{2(2+2)}{3+3} = \frac{4}{3}.$$

24-2. Να βρείτε τα όρια (i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$  (ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$ .

Λύση

Για  $x=1$  μηδενίζονται οι όροι των κλασμάτων. Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα πηλίκου στα όρια

έχουμε απροσδιόριστη μορφή  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Στην περίπτωση αυτή για να άρουμε την απροσδιοριστία,

πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή.

i). Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-(3x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{x^2+3}-(3x-1)][\sqrt{x^2+3}+(3x-1)]}{(x^2-1)[\sqrt{x^2+3}+(3x-1)]} = \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(4x^2-3x-1)}{(x^2-1)[\sqrt{x^2+3}+(3x-1)]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)(4x+1)}{(x-1)(x+1)[\sqrt{x^2+3}+3x-1]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(4x+1)}{(x+1)[\sqrt{x^2+3}+3x-1]} = \\&= \frac{-2 \cdot (4 \cdot 1 + 1)}{(1+1)[\sqrt{1^2+3}+3 \cdot 1 - 1]} = -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

ii). Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}) \cdot (2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3})} = \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}} = \frac{7(\sqrt{1}+1)}{2\sqrt{2 \cdot 1 - 1} + \sqrt{1+3}} = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

**24-3.** Να βρείτε το όριο (i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2-1}}$ .

Λύση

i). Επειδή για  $x=1$  μηδενίζεται κάθε όρος στον αριθμητή και ο παρονομαστής, τους αναλύουμε σε γινόμενο παραγόντων. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x(x-1)}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1-\sqrt{1}}{\sqrt{1+1}} = 0$$

**24-4.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{\sqrt{f(x)+1}-2}$ .

Λύση

Αρχικά έχουμε απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ , το όριο του αριθμητή και του παρονομαστή είναι 0.

$$\text{Πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή του παρονομαστή} \quad \frac{(f(x)-3)(\sqrt{f(x)+1}+2)}{(\sqrt{f(x)+1}-2)(\sqrt{f(x)+1}+2)} = \frac{(f(x)-3)(\sqrt{f(x)+1}+2)}{f(x)-3}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{f(x)+1}+2) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)+1}+2 = \sqrt{3+1}+2 = 4.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**24-5.** Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{7}-\sqrt{x}}{x^2-49} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$$

**24-6.** Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

**24-7.** Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{9-x}{3-\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{10-x}-3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{1-\sqrt{x-2}}$$

**24-8.** Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2+3}+2x-3}{6x^2-x-1} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+4}+x-1}{x^2+3x+2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-x-1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+2x+10}-x-2}{x^2-4x+3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3x+5}+x-4}{\sqrt[3]{x}-x}$$

## 2. Κυβικό Ριζικό

- Θέτω  $\alpha, \beta$  τους όρους του αριθμητή ή του παρονομαστή που περιέχει το ριζικό
- Πολλαπλασιάζω και τους δύο όρους του κλάσματος με παράσταση της μορφής  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$  ώστε να δημιουργήσω διαφορά κύβων  $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ .

Παράδειγμα2: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt[3]{x+6} - 2}$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

24-9. Να βρεθούν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+2}-x}{\sqrt[3]{x+6}-2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{9+x}}$

## 3. Κυβικό – τετραγωνικό ριζικό:

Αν υπάρχουν κυβική και τετραγωνική ρίζα ΞΕΧΩΡΙΣΤΑ σε αριθμητή ΚΑΙ παρονομαστή

- θέτω κάθε ρίζα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
- πολλαπλασιάζω κατάλληλα ώστε να μορφοποιηθεί και διαφορά τετραγώνων και διαφορά κύβων

Παράδειγμα3: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt[3]{x+5}-2}$ .

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

24-10. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{2}}$ .

Λύση

Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{2}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1) \left( \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{4} \right)}{\left( \sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{2} \right) \left( \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{4} \right)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1) \left( \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{4} \right)}{(1-x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1) \left( \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{4} \right)}{-1} = \frac{-2 \left( \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \right)}{-1} = 6\sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

24-11. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{4-x} - \sqrt[3]{2x-5}}{\sqrt[3]{2x+2} - \sqrt[3]{3x-1}}$ .

Λύση

Έχουμε απροσδιοριστία 0:0. Αν  $\alpha = \sqrt[3]{4-x}$ ,  $\beta = \sqrt[3]{2x-5}$ ,  $\gamma = \sqrt[3]{2x+2}$  και  $\delta = \sqrt[3]{3x-1}$  το κλάσμα

$$\gammaίνεται \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2)}{(\gamma - \delta)(\gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)} = \frac{(\alpha^3 - \beta^3)(\gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2)}{(\gamma^3 - \delta^3)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}. \text{Είναι}$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\sqrt[3]{4-x})^3 - (\sqrt[3]{2x-5})^3 = 4-x-2x+5 = -3(x-3)$$

$$\gamma^3 - \delta^3 = (\sqrt[3]{2x+2})^3 - (\sqrt[3]{3x-1})^3 = 2x+2-3x+1 = -(x-3)$$

Έτσι μετά την απλοποίηση βρίσκουμε τελικά όριο ίσο με 12.

24-12. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{2x-2}}$ .

Λύση

Αν  $\alpha = \sqrt{x-1}$ ,  $\beta = \sqrt[3]{x+3}$  και  $\gamma = \sqrt[3]{2x-2}$  το κλάσμα

$$\gammaγράφεται \frac{\alpha - 2}{\beta - \gamma} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha + 2)(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)}{(\beta - \gamma)(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)(\alpha + 2)} = \frac{(\alpha^2 - 4)(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)}{(\beta^3 - \gamma^3)(\alpha + 2)}.$$

$$\text{Είναι } \alpha^2 - 4 = \sqrt{x-1}^2 - 4 = x-1-4 = x-5 \text{ και } \beta^3 - \gamma^3 = \sqrt[3]{x+3}^3 - \sqrt[3]{2x-2}^3 = x+3-2x+2 = -(x-5).$$

$$\text{Έτσι έχουμε } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \left( \sqrt[3]{x+3}^2 + \sqrt[3]{x+3} \sqrt[3]{2x-2} + \sqrt[3]{2x-2}^2 \right)}{-(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = -3.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

24-13. Να βρεθούν τα όρια.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt[3]{3-x}-1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-1}}$

#### 4. Διαφορετικές τάξεις:

Αν υπάρχουν κυβική και τετραγωνική ρίζα **ΜΑΖΙ** σε αριθμητή **Η** παρονομαστή

- Βρίσκω το όριο λ του ενός όρου (προσθετέου) του αριθμητή.
- Προσθέτω και αφαιρώ στον αριθμητή το όριο λ.
- Διαχωρίζω κατάλληλα το κλάσμα σε 2 (το καθένα πρέπει να είναι απροσδιοριστία).
- Βρίσκω τα όρια των δύο κλασμάτων ξεχωριστά.

Παράδειγμα4: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt[3]{x^2-x+6}}{x-2}.$

#### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

24-14. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt{4x+1}}{x-2}.$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά  $\frac{3\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt{4x+1}}{x-2} = \frac{3\sqrt[3]{x+6}-6-2\sqrt{4x+1}+6}{x-2} = \frac{3\sqrt[3]{x+6}-6}{x-2} - \frac{2\sqrt{4x+1}+6}{x-2}.$

Προσθαφαιρούμε το όριο ενός όρου του αριθμητή.

Βρίσκουμε κατά τα γνωστά το όριο κάθε κλάσματος.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{x+6}-6}{x-2} = \frac{1}{4}$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{4x+1}+6}{x-2} = \frac{4}{3}.$  Έτσι είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{x+6}-6}{x-2} - \frac{2\sqrt{4x+1}+6}{x-2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} = \frac{13}{12}.$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

24-15. Να βρεθούν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x^2+4}}{x-2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt{3x-2}}{x-2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4\sqrt{2x+5}-6\sqrt[3]{3x+2}}{x^2-3x+2}.$

#### 25 ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ (ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)).$
- Θέτω  $u = g(x).$
- Βρίσκω το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$
- Αντικαθιστώ και έχω  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \dots$

Παράδειγμα1:  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2+4).$

#### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

25-1. i). Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-1) = 7$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x).$

ii). Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}.$

Λύση

i). Έστω  $y = 3x-1$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-1) = 5$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-1) = \lim_{y \rightarrow 5} f(y)$ . Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$ .

ii). Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{f(3x)}{3x} = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \cdot 2 = 6.$

25-2. Να βρείτε τα όρια (i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{x}},$  (ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2}.$

Λύση

i). Θέτουμε  $\sqrt{x} = t$ , οπότε  $x = t^2, x^2 = t^4$  και έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 \cdot t - 1}{t^4 - t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t(t^3 - 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t} = 1.$

ii). Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δεικτών των ριζών είναι το 6.

Θέτουμε  $\sqrt[6]{x-1} = t$ , οπότε  $\sqrt{x-1} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x-1} = t^2$  και  $x-1 = t^6 \Leftrightarrow x = t^6 + 1$ .

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 - 2}{t^6 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2 + 2t + 2)}{(t-1)(t^5 + t^4 + \dots + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + 2t + 2}{t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + 1} = \frac{5}{6}.$$

**25-3.** Έστω ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ . Να δείξετε ότι:

i). Αν η  $f$  είναι άρτια, τότε  $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lambda$ .

ii). Αν η  $f$  είναι περιττή, τότε  $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = -\lambda$ .

Λύση

i). Επειδή η  $f$  είναι άρτια ισχύει  $f(-x) = f(x)$  κοντά στο  $x_0$ .

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -x_0} f(-x) \stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda.$$

ii). Επειδή η  $f$  είναι περιττή ισχύει  $f(-x) = -f(x)$  κοντά στο  $x_0$ .

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -x_0} f(-(-x)) \stackrel{t=-x}{=} - \lim_{x \rightarrow -x_0} f(-x) \stackrel{t=-x}{=} - \lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\lambda.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**25-4.** Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x-2) = f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 3x - 2] = 5$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

**25-5.** Δίνεται μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

α. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι περιττή

β. Αν  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , όπου  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**25-6.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή στο σύνολο  $\mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 1$ , να βρεθεί

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}.$$

### ΣΧΟΛΙΟ

• Για το όριο της σύνθετης συνάρτησης το σχολικό βιβλίο δίνει την πρόταση:

#### Πρόταση

Δίνονται οι συναρτήσεις  $u = f(x)$  και  $y = g(u)$

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = u_0$ ,  $f(x) \neq u_0$  για  $x \neq x_0$  και  $\lim_{u \rightarrow u_0} g(u) = \lambda$ , τότε υπάρχει το όριο της σύνθεσης

$$g(f(x)) \text{ στο } x_0 \text{ και ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} g(u) = \lambda \quad (1)$$

Παρατηρήσεις

**1.** Είναι απαραίτητες οι συνθήκες  $f(x) \neq u_0$  για  $x \neq x_0$ ;

Ναι! Για παράδειγμα για τις συναρτήσεις

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, 1) \text{ και } g(u) = \begin{cases} \frac{\eta \mu u}{u}, & u \neq 0 \\ 2, & u = 0 \end{cases} \quad (\text{ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1)$$

Για κάθε  $x \in (-1, 1)$  ισχύει  $g(f(x)) = g(0) = 2$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(0) = 2 \neq \lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 1$

**2.** Μπορούμε να γράψουμε την (1) στην μορφή  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = g(u_0)$ ;

(Την ισότητα θα την ξαναδούμε στην μελέτη των συνεχών συναρτήσεων)

Ναι! Αν το  $u_0$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$  και  $\lambda = g(u_0)$  για παράδειγμα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon \phi(\pi + \eta \mu x) = \varepsilon \phi(\lim_{x \rightarrow 0} (\pi + \eta \mu x)) = \varepsilon \phi(\pi + 0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \eta \mu x) = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \eta \mu x)) = \ln(1 + 0) = \ln 1 = 0$$

**26 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ  $\frac{0}{0}$  ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΟ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ**

1. Δύο ριζικά στον αριθμητή και ένας σταθερός όρος:

- Βρίσκω τα όρια κάθε ριζικού και με βάση αυτά διαχωρίζω τον αριθμό σε 2, ένα για κάθε ριζικό.
- Διαχωρίζω το κλάσμα σε 2, που το καθένα πρέπει να είναι απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$  και δουλεύω το καθένα ξεχωριστά.

Παρατήρηση: Αν έχω 3 ριζικά και έναν σταθερό όρο τον αριθμό τον «σπάω» κατάλληλα σε τρεις αριθμούς και διαχωρίζω τρία κλάσματα.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7x+2} + 3}{x^2 - 4}$ .

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

**26-1.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

Λύση

Παρατηρούμε ότι έχουμε όριο της μορφής  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{0}{0}$ .

Διασπάμε το κλάσμα σε άθροισμα κλασμάτων. Έτσι έχουμε  $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

Αλλά  $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x} + 1)}$

και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x} + 1)} = 0$ .

Είναι  $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**26-2.** Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} + 1}{x-2}$ .

Λύση

Είναι

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} + 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} - \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(\sqrt{x+2} - 2)\sqrt{x+2} + 2}{(x-2)\sqrt{x+2} + 2} - \frac{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} \right) =$

$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(x+2-4)}{(x-2)\sqrt{x+2} + 2} - \frac{(x+7-9)}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} - \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} \right) = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} - \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{12}$ .

**26-3.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} - 1}{x-8}$ .

Λύση

$x \in [0, 8) \cup (8, +\infty) = A$ . Με  $x \in (7, 8) \cup (8, 9)$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 8} (x-8) = 0$ .

Θέτουμε  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} - 1}{x-8}$  με  $A_f = A$  και

έχουμε

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} + 2}{x-8} = \frac{\sqrt{x+1} - 3}{x-8} - \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8} = \frac{(x+1)-9}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} - \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 2^2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}$ .

$$\text{Αρα } \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}\sqrt{x+4}} \right) = \frac{1}{\sqrt{9}+3} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^6+2}\sqrt{2^3+4}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

26-4. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} - 3}{x-2}.$

26-5. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x+3} - 2}.$

**2. Τρία ριζικά στον αριθμητή χωρίς σταθερό όρο:**

- Το ένα ριζικό έχει αριθμητικό συντελεστή, π.χ. 2,3,...
- Διαχωρίζω κατάλληλα το ριζικό με τον αριθμητικό συντελεστή και χωρίζω τα κλάσματα (το καθένα  $\frac{0}{0}$ ) και δουλεύω ξεχωριστά.

Παράδειγμα2: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x-3} - 2\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}.$

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

26-6. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{3x} + \sqrt{x+6}}{x^2 - 5x + 6}.$

Λύση

$$\frac{\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{3x} + \sqrt{x+6}}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x} + \sqrt{x+6} - \sqrt{3x}}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x}}{(x-3)(x-2)} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{3x}}{(x-3)(x-2)}.$$

Τα όρια αυτών είναι  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x}}{(x-3)(x-2)} = -\frac{1}{6}$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{3x}}{(x-3)(x-2)} = -\frac{1}{3}.$

Έτσι το ζητούμενο όριο είναι  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x}}{(x-3)(x-2)} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{3x}}{(x-3)(x-2)} \right) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}.$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

26-7. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x+3} - \sqrt{6-2x} - \sqrt{3x+1}}{x-1}.$

26-8. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2-x} - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3-2x}}{x^2 + 3x - 4}.$

**Κουράστηκες; Κάνε ένα διάλλειμα να ακούσεις το τραγουδάκι που θα σε οδηγήσει ο παρακάτω γραμμωτός κώδικας (Qr-code)**



## 27 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$ «ΡΙΖΑ ΣΕ ΡΙΖΑ» Η ΡΙΖΑ ΣΕ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

### 1. Ρίζα σε Ρίζα

Χρησιμοποιώ τον μετασχηματισμό  $A = |A| = \sqrt{A^2}$ . Έτσι δημιουργώ τετραγωνικό ριζικό και εφαρμόζω ιδιότητα ριζών  $\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\Lambda}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\Lambda}}$  και βρίσκω το όριο της υπόριζου ποσότητας  $\frac{\kappa}{\Lambda}$ .

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}$

#### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

27-1. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{12x}}$ .

Λύση. Επειδή  $x \rightarrow 3^+$  είναι  $x > 3$ ,  $x-3 > 0$  οπότε  $x-3 = |x-3| = \sqrt{(x-3)^2}$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{12x}} &= \sqrt{\frac{(x-3)^2}{x+3-\sqrt{12x}}} = \sqrt{\frac{(x-3)^2(x+3+\sqrt{12x})}{(x+3-\sqrt{12x})(x+3+\sqrt{12x})}} = \sqrt{\frac{(x-3)^2(x+3+\sqrt{12x})}{(x+3)^2-12x}} = \\ &= \sqrt{\frac{(x-3)^2(x+3+\sqrt{12x})}{(x-3)^2}} = \sqrt{x+3+\sqrt{12x}}. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x+3+\sqrt{12x}} = \sqrt{3+3+\sqrt{12 \cdot 3}} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

27-2. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x-7}{\sqrt{x-1}-3\sqrt{x-3}}$ .

27-3. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$ .

### 2. Άθροισμα ριζών στον παρόνομαστή

- Βρίσκω το όριο του αντίστροφου κλάσματος.
- Μετά την αντίστροφη διαχωρίζω το κλάσμα κατάλληλα σε άθροισμα δύο ή περισσότερων κλασμάτων ώστε το καθένα να είναι απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ .

Παράδειγμα2: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+8}-4}$ .

#### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

27-4. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-5}$ .

Λύση. Αρχικά έχουμε απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ . Βρίσκουμε το όριο του αντίστροφου κλάσματος. Είναι

$$\frac{3\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-5}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}-3+\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{3(\sqrt{x}-1)}{x-1} + \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}.$$

Με τη χρήση των συζυγών παραστάσεων του αριθμητή έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \frac{3}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{4}. \text{ Έτσι είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-5}{x-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4},$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-5} = \frac{4}{7}.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

27-5. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}$ .

27-6. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-5}$

28 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ  $\frac{0}{0}$ . ΡΙΖΙΚΟ ΜΕ ΙΔΙΟ ΥΠΟΡΙΖΟ ΚΑΙ ΑΛΛΗ ΤΑΞΗ

- Βρίσκω το Ε.Κ.Π. όλων των τάξεων. Έστω ν.
- Θέτω  $y = \sqrt[n]{g(x)}$  και εκφράζω όλα τα ριζικά ως δυνάμεις του y.
- Βρίσκω το όριο του  $y = \sqrt[n]{g(x)}$  όταν  $x \rightarrow x_0$ .
- Βρίσκω τελικά το όριο με νέα μεταβλητή το y.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{2x+1} - 2\sqrt[3]{2x+1} - 1}{2\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt{2x+1} - 1}$ .

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

28-1. Να βρεθεί αν υπάρχει το παρακάτω όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$ .

Λύση

Πρέπει  $x \geq 0$  και  $x \neq 1$ , άρα η  $f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$  ορίζεται κοντά στο 1.

Θέτουμε  $\sqrt[5]{x} = t$ , οπότε  $\sqrt[3]{x} = t^5$  και  $\sqrt[5]{x} = t^3$ . Επίσης καθώς  $x \rightarrow 1$  έχουμε και  $t \rightarrow 1$ , με  $t \neq 1$ .

Επομένως έχουμε  $\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}} = \frac{1 - t^5}{1 - t^3} = \frac{(1-t)(1+t+t^2+t^3+t^4)}{(1-t)(1+t+t^2)} = \frac{1+t+t^2+t^3+t^4}{1+t+t^2}$ .

Άρα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1+t+t^2+t^3+t^4}{1+t+t^2} = \frac{5}{3}$ .

28-2. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt[6]{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt[6]{3x+1}}$ .

Λύση

Ε. Κ. Π. των δεικτών 2,3,6 είναι ο 6. Θέτουμε  $\sqrt[6]{3x+1} = y$ , οπότε  $\sqrt{3x+1} = y^3$  και  $\sqrt[3]{3x+1} = y^2$ .

Όταν  $x \rightarrow 0$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[6]{3x+1} = \sqrt[6]{0+1} = 1$ , άρα  $y \rightarrow 1$ .

Έτσι έχουμε  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - y}{y^2 - y} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y(y-1)(y+1)}{y(y-1)} = \lim_{y \rightarrow 1} (y+1) = 2$ .

28-3. Να βρεθούν τα όρια

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} - 2} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x+1} - 1}{x}$$

Λύση

i). Θέτουμε  $\sqrt{x} = t \rightarrow 1$ , οπότε  $x = t^2$  και

έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 + t - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t^2+t+1}{t+2} = \frac{3}{3} = 1$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} - 2} = 1$

ii). Θέτουμε  $\sqrt[5]{x+1} = t \rightarrow 1$ , οπότε  $x = t^5 - 1$  και

έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t-1}{t^5-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t-1}{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)} = \frac{1}{5}$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{5}$ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

28-4. Να βρεθούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{3\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x} + 5\sqrt[6]{1+x} - 5}{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[6]{1+x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{7x+1} - 3\sqrt[3]{7x+1} + 4\sqrt[6]{7x+1} - 4}{\sqrt[3]{7x+1} - 4}$$

29 ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ: ΠΟΛΛΑΠΛΟΣ ΤΥΠΟΣ – ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

A. Πολλαπλός τύπος:

- Βρίσκω τα πλευρικά όρια  $x \rightarrow x_0^-$ ,  $x \rightarrow x_0^+$  παίρνοντας τον αντίστοιχο τύπο.
- Αν τα πλευρικά όρια είναι ίσα τότε η κοινή τιμή είναι το όριο της συνάρτησης στο  $x_0$ .
- Αν τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα τότε η συνάρτηση δεν έχει όριο στο  $x_0$ .

Παρατήρηση: Για να πάρω πλευρικά όρια πρέπει να υπάρχουν στον τύπο ανισότητες  $x <$ ,  $x >$ , κ.λπ. και όχι  $x \neq$ .

Παράδειγμα1: Να βρεθούν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ :  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x < 1 \\ \sqrt{2x}-2, & 1 < x < 2 \\ x^3-2x-4, & 2 < x \end{cases}$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

29-1. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2-2, & x \leq 1 \\ 3x-4, & 1 < x < 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$ . Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$                       (ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$                       (iii)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Λύση

i). Επειδή κοντά στο 0 είναι  $f(x) = x^2 - 2$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = 0^2 - 2 = -2$ .

ii). Παρατηρούμε ότι η  $f$  εκατέρωθεν του 1 αλλάζει τύπο.

- Αν  $x < 1$ , τότε  $f(x) = x^2 - 2$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = 1^2 - 2 = -1$ .
- Αν  $1 < x < 2$ , τότε  $f(x) = 3x - 4$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 4) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$ .

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ .

iii). Είναι

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 4) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ .
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ .

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

29-2. Να υπολογίσετε τα όρια:  $\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   $\beta. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  αν  $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \leq 2 \\ \frac{x^3-3x+4}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ .

29-3. Να βρείτε (αν υπάρχει), το όριο της  $f$  στο  $x_0$  αν:

i)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 5x, & x > 1 \end{cases}$  και  $x_0 = 1$                       ii)  $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$  και  $x_0 = -1$ .

B. Καθορισμός παραμέτρων ύπαρξης ορίου:

- Βρίσκω τα πλευρικά όρια στη θέση  $x_0$  που γίνεται αλλαγή τύπου.
- Εξισώνω τα πλευρικά όρια ώστε να υπάρχει το όριο, οπότε έχω εξίσωση ως προς  $\alpha$  ή  $\beta$ .
- Με μια δεύτερη σχέση μεταξύ  $\alpha, \beta$  (προκύπτει από την υπόθεση), έχω σύστημα το οποίο λύνω και βρίσκω τα  $\alpha, \beta$ .

Παράδειγμα2: Να βρεθεί η παράμετρος  $\alpha$ , ώστε να έχει όριο στο  $x = 3$  η

συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 - \alpha x - 10, & x < 3 \\ x^2 + \alpha^2 x - 1, & 3 < x \end{cases}$ .

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**29-4.** Δίνεται η  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta, & x < 2 \\ 5\alpha x + 2\beta, & x \geq 2 \end{cases}$ . Βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  ώστε η  $f(x)$  να διέρχεται από το  $A(-1, 1)$  και να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Λύση

Επειδή ο τύπος της  $f(x)$  αλλάζει στο 2, για να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  θα πρέπει τα πλευρικά όρια της  $f(x)$  να είναι ίσα μεταξύ τους. Έτσι:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (5\alpha x + 2\beta) = 10\alpha + 2\beta \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 + \alpha x + \beta) = 8 + 2\alpha + \beta \end{aligned} \right\} \text{ Άρα } 10\alpha + 2\beta = 8 + 2\alpha + \beta \Leftrightarrow 8\alpha + \beta = 8 \quad (1).$$

Επίσης η  $f(x)$  διέρχεται από το σημείο  $(-1, 1)$ , άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν. Έχουμε δηλαδή  $f(-1) = -1, 2 + \alpha + \beta = -1, \alpha + \beta = -3 \quad (2)$ .

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) παίρνουμε  $\alpha = \frac{11}{7}$  και  $\beta = -\frac{32}{7}$ .

**29-5.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 8\alpha^3 x^2 - \beta x + 1, & x < -1 \\ 2\beta x + 23, & x \geq -1 \end{cases}$ . Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ .

Λύση

Αρκεί  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad (1)$ . Είναι

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (8\alpha^3 x^2 - \beta x + 1) = 8\alpha^3 (-1)^2 - \beta(-1) + 1 = 8\alpha^3 + \beta + 1.$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2\beta x + 23) = 2\beta(-1) + 23 = -2\beta + 23.$

Οπότε

$$\eta \quad (1) \Leftrightarrow 8\alpha^3 + \beta + 1 = -2\beta + 23 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha^3 + \beta + 1 = 1 & (2) \\ -2\beta + 23 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\eta \quad (3) \Leftrightarrow \beta = 11.$$

Για  $\beta = 11$  η (1) γίνεται  $8\alpha^3 + 11 + 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ . Άρα  $\alpha = -\frac{1}{2}$  και  $\beta = 11$ .

**29-6.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \kappa}{x + 2}, & x \geq 0 \\ \lambda + 2\sqrt{x^2 + 4}, & x < 0 \end{cases}$ .

Να βρεθούν οι  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(1, 3)$ .

Λύση

Για να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  πρέπει να ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \kappa}{x + 2} = \frac{\kappa}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\lambda + 2\sqrt{x^2 + 4}) = \lambda + 4.$$

Οπότε πρέπει  $\lambda + 4 = \frac{\kappa}{2} \quad (1)$ . Αλλά έχουμε και  $f(1) = 3$ , δηλαδή  $\frac{1 + \kappa}{1 + 2} = 3 \Leftrightarrow 1 + \kappa = 9 \Leftrightarrow \kappa = 8$ .

Τελικά από τη σχέση (1) είναι  $\lambda + 4 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 0$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**29-7.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+\lambda}, & x \geq 0 \\ x+2, & x < 0 \end{cases}$ . Ποιο πρέπει να είναι το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να υπάρχει

το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**29-8.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^2 + 3\lambda$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 4$  να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**29-9.** Για μια συνάρτηση  $f$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$  και  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lambda(3-2\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι η  $f$  δεν έχει όριο καθώς  $x \rightarrow 2$ .

**29-10.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \beta + 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \alpha + 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3\beta - 4$  και  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2\alpha + 1$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , έτσι ώστε να υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**29-11.** Ένας μαθητής στην προσπάθειά του να υπολογίσει το όριο μιας συνάρτησης  $f$  στο 2, βρήκε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \alpha - 2$ , ενώ με έναν άλλον τρόπο βρήκε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \alpha^2 - \alpha - 1$ . Συμπεράνε έτσι ότι το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  δεν υπάρχει. Είναι σωστός ο ισχυρισμός αυτός;

**29-12.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x < 1 \\ x^2 + \alpha x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$ , έτσι ώστε να υπάρχει

το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**29-13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + \beta, & x \leq 3 \\ \alpha x + 3\beta, & x > 3 \end{cases}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$ .

**29-14.** Αν  $f(x) = \begin{cases} 3\alpha x + 1, & x < -1 \\ x + 2\beta, & -1 < x \leq 2 \\ 2x + 4\alpha, & x > 2 \end{cases}$ , να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**29-15.** Αν  $f(\lambda)$  είναι ο βαθμός του πολυωνύμου  $P(x) = (4-\lambda^2)x^3 + (\lambda-2)x + \lambda + 2$ , να εξετάσετε αν υπάρχει το  $\lim_{\lambda \rightarrow 2} f(\lambda)$ .

**BONUS ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΡΙΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ**

**29-15β.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 3}$$

Όπου  $\alpha, \beta$  σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύει η σχέση  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$  (\*)

Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ .

Λύση

Έχουμε  $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 3} \Leftrightarrow f(x)(x - 3) = x^2 - \alpha x + \beta, x \neq 3$ . Λαμβάνουμε όρια και στα δυο μέλη.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f(x)(x - 3)) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - \alpha x + \beta) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - \alpha x + \beta) \Leftrightarrow$$

$$1 \cdot (3 - 3) = 3^2 - 3\alpha + \beta \Leftrightarrow 0 = 9 - 3\alpha + \beta \Leftrightarrow 3\alpha - \beta = 9 \Leftrightarrow 3\alpha - 9 = \beta \quad (1)$$

Άρα

$$f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 3} = \frac{x^2 - \alpha x + 3\alpha - 9}{x - 3} = \frac{x^2 - 9 - \alpha x + 3\alpha}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3) - \alpha(x - 3)}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3 - \alpha)}{x - 3} = x + 3 - \alpha$$

$$\text{Οποτε } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (3 + 3 - \alpha) = 1 \Leftrightarrow 3 + 3 - \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 5$$

$$\text{Και από την σχέση (1) } 3\alpha - 9 = \beta \Rightarrow 3 \cdot 5 - 9 = \beta \Leftrightarrow \beta = 6$$

Προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις:

**29-15γ)** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x - 2}{x^2 - x}$$

Όπου  $\alpha, \beta$  σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$  (\*)

Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ .

**29-15δ)** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\alpha \sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2}$$

Όπου  $\alpha$  σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$  (\*)

Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ .

(Υπόδειξη : χρησιμοποιήστε συζυγή παράσταση για να απλοποιήσετε τον τύπο της f)

**29-15ε)** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} - \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 4}{x^2 - 4}$$

Όπου  $\lambda$  σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \in \mathbb{R}$  (\*)

Να βρείτε τον αριθμό  $\lambda$ .

**30 ΟΡΙΑ: ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ**

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  (όχι σε όλο το  $D_f$ ).

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$  τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

Αν  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ . Το όριο «προσθέτει ισότητα»

Αν  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  τότε  $f(x) > g(x)$  κοντά στο  $x_0$ .

Αν  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**1. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ:**

Αν το όριο δεν περιέχει μορφή  $\frac{0}{0}$  τότε υπολογίζω κανονικά το όριο.

Παράδειγμα1:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|+7}{|x+1|+3x}$ .

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

30-1. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

Λύση

Επειδή

- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x - 1) = 5 > 0$  είναι  $x^3 - x - 1 > 0$  κοντά στο 2. Οπότε  $|x^3 - x - 1| = x^3 - x - 1$  κοντά στο 2.
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 7) = -5 < 0$  είναι  $x - 7 < 0$  κοντά στο 2, οπότε  $|x - 7| = -x + 7$ .

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 1 + x - 7}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = 3.$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

30-2. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3|x-2| + |x^2-5|-1}{|x|-3}$

**2. ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ  $\frac{0}{0}$  ΚΑΙ ΔΕΝ ΜΗΔΕΝΙΖΕΙ ΚΑΝΕΝΑ ΑΠΟΛΥΤΟ:**

- Βρίσκω τα όρια της παράστασης που είναι μέσα στο απόλυτο.
- Αν το όριο είναι θετικό, τότε και η παράσταση θετική κοντά στο  $x_0$  («στόχο»).
- Αν το όριο είναι αρνητικό τότε και η παράσταση αρνητική κοντά στο  $x_0$ .
- Έτσι απαλλάσσω τον τύπο από απόλυτα, κάνω άρση της απροσδιοριστίας  $\frac{0}{0}$  και υπολογίζω τελικά το όριο.

Παράδειγμα2: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3| + 2|x^2-1|-7}{x-2}$ .

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

30-3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

Λύση

Έστω  $f(x) = \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$ ,  $x \neq 0, 2$ . Είναι  $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ .

|      |    |   |
|------|----|---|
| x    | -2 | 2 |
| f(x) | +  | - |

• Αν  $x \in (0, 2)$  είναι  $f(x) = \frac{-x^2 + 4 - x + 2}{x^2 - 2x} = -\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x} = \frac{-x - 3}{x}$ .

• Αν  $x > 2$  είναι  $f(x) = \frac{x^2 - 4 - x + 2}{x^2 - 2x} = -\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{x + 1}{x}$ .

Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x - 3}{x} = -\frac{5}{2}$  και  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{x} = \frac{3}{2}$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

30-3. Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - x + 2| - 2}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x + 2| + |x + 3| - 8}{|x^2 + x| - x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x + 2| + |x^2 - 3| - 5}{|x| - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + |x - 3| - 2x - 1}{x^2 - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x - 1| - 3|x - 5| + 2}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{5 - x}}$$

### 3. ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$ ΚΑΙ ΜΗΔΕΝΙΖΕΙ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΕΝΑ ΑΠΟΛΥΤΟ:

- Αν μηδενίζει τουλάχιστον ένα απόλυτο τότε παίρνω πλευρικά όρια  $x \rightarrow x_0^+$ ,  $x \rightarrow x_0^-$ .
- Κάνω πίνακα προσήμου για το απόλυτο που μηδενίζει εκατέρωθεν του  $x_0$ .
- Για τα απόλυτα που δεν μηδενίζουν κάνω απλοποίηση ανάλογα με το πρόσημο της παράστασης μέσα σε αυτό (περίπτωση Β).

(Οι παραστάσεις αυτές δεν μεταβάλλονται στα πλευρικά όρια, μόνο αυτές που μηδενίζουν αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$ ).

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + x^2 - 4}{x^2 - 4}$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

30-4. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x - 3| + 5|1 - x| - 10}{x^2 - 9} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - x| - 4|x - 2| - 2}{\sqrt{x - 2}} \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5}$$

### Το ισον δεν μπήκε για πλάκα.....

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g$  με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  ( $A \subseteq \mathbb{R}$ ). Έστω  $x_0 \in A$  και ότι:

$$f(x) < g(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

Τότε, όπως είναι γνωστό, ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

Θεωρούμε τις συναρτήσεις :

$$f(x) = \begin{cases} 1974, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = 1974 + \eta \mu^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι  $f(x) < g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1974 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Δεν ξεχνάμε ότι το όριο «προσθέτει ισότητα»

$$31 \text{ ΟΡΙΟ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{x} = \alpha, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Ισχύει  $|\eta\mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η ισότητα ισχύει μόνο για  $x=0$ .

**Α.**

- Μορφοποιώ το κλάσμα ώστε να σχηματιστεί η παράσταση  $\frac{\eta\mu A(x)}{A(x)}$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = 0$ .

Συνήθως πολλαπλασιάζω και διαιρώ με κατάλληλη παράσταση.

- Θέτω  $u = A(x)$ .
- Βρίσκω  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = 0$ .

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu A(x)}{A(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

$$\text{Παράδειγμα1: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 6x + 8}.$$

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Αν το τόξο  $X$  εκφράζεται σε μοίρες και όχι σε ακτίνια τότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{\pi}{180^\circ}$ .

**ΛΗΜΜΑ:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{x} = \alpha$  με απόδειξη σε ασκήσεις. Θέτω  $u = \alpha x$   $u_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha x = 0$

$$\alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{\alpha x} = \alpha \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Παράδειγμα2: Υπολόγισε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$

Παράδειγμα3: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 3x}{x + \eta\mu x}$ .

ΓΕΝΙΚΑ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΟΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΠΙΟ ΕΥΚΟΛΟ ΤΡΟΠΟ ΜΕ ΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ De L' Hospital ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ.

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**31-1.** Έστω μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$  και  $xf(x) - \eta\mu x \leq 0, x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε το  $\lambda$ .

Λύση

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$  είναι και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lambda$ . Έχουμε για

κάθε  $x \in \mathbb{R}$   $xf(x) - \eta\mu x \leq 0 \Leftrightarrow xf(x) \leq \eta\mu x$  (1).

- Για  $x > 0$  η (1)  $\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x}$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow \lambda \leq 1$ .
- Για  $x < 0$  η (1)  $\Leftrightarrow f(x) \geq \frac{\eta\mu x}{x}$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow \lambda \geq 1$ .

Άρα  $\lambda = 1$ .

**31-2.** Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}$ .

Λύση

Αν το εκλάβουμε ως πηλίκο ορίων, τότε βρίσκουμε  $\frac{0}{0}$  (απροσδιόριστη μορφή). Η αντιμετώπιση

γίνεται με αντικατάσταση του  $x-1 = t$  με  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$  άρα του  $t \rightarrow 0$ . Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi + \pi t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu(\pi t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (-\pi) \frac{\eta\mu(\pi t)}{\pi t} \right\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ (-\pi) \frac{\eta\mu\omega}{\omega} \right\} = (-\pi) \cdot 1 = -\pi.$$

31-3. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x}{x^3}.$

Λύση

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu 2x}{x} \cdot \frac{\eta\mu 3x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{\eta\mu 3x}{3x} \right] = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6.$

31-4. Να βρείτε τα όρια (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1}$  (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$

Λύση

i). Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left( 2x - \frac{\eta\mu x}{x} \right)}{x \left( 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = \frac{2 \cdot 0 - 1}{1 + 0} = -1.$

ii). Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu^2 x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu^2 x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 2 \left( \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 (\sqrt{x^2 + 1} + 1) \right] = 2 \cdot 1^2 (\sqrt{0^2 + 1} + 1) = 4. \end{aligned}$$

31-5. Να βρείτε τα όρια (i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 5x + 6}$  (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x^2}{\eta\mu 3x}.$

Λύση

i). Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x-3} \right).$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \stackrel{y=x-2}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1.$  Άρα  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 5x + 6} = 1 \cdot \frac{1}{2-3} = -1.$

ii). Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x^2}{\eta\mu 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x^2}{\sigma\upsilon\nu x^2}}{\frac{\eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x^2}{x^2}}{\frac{\eta\mu 3x}{3x}} \cdot \frac{x}{3\sigma\upsilon\nu x^2}.$  Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{x^2} \stackrel{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} \stackrel{y=3x}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1.$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x^2}{\eta\mu 3x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{0}{3 \cdot \sigma\upsilon\nu 0^2} = 0.$

31-6. Αν για τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ισχύουν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$  και  $f^3(x) + f^2(x) \eta\mu x + x^3 f(x) = 2x^2 \eta\mu x, x \in \mathbb{R}.$

Να βρείτε (i) το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  (ii) το  $\lambda.$

Λύση

i). Έστω  $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \neq 0.$  Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lambda$  και  $f(x) = xg(x), x \neq 0.$

Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x)) = 0 \cdot \lambda = 0.$  Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$

ii). Για κάθε  $x \neq 0$  έχουμε  $f^3(x) + f^2(x) \eta\mu x + x^3 f(x) = 2x^2 \eta\mu x \Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{x} \right)^3 + \left( \frac{f(x)}{x} \right)^2 \frac{\eta\mu x}{x} + f(x) = 2 \frac{\eta\mu x}{x}.$

Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \left( \frac{f(x)}{x} \right)^3 + \left( \frac{f(x)}{x} \right)^2 \frac{\eta\mu x}{x} + f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 \cdot 1 + 0 = 2 \cdot \lambda \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ .

**31-7.** Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x + \eta\mu x}$ .

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x + \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x} - \frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

**31-8.** Αν  $\eta\mu x \cdot f(x) \geq \eta\mu 3x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ , να βρεθεί ο  $\kappa$ .

Λύση

Αφού υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  θα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \kappa = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ . Μας ενδιαφέρει να βρούμε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  γι' αυτό θα ασχοληθούμε με τις τιμές του  $x$  κοντά στο 0. Έστω για

- $x \in (0, \pi)$ . Τότε  $\eta\mu x > 0$ , οπότε από  $\eta\mu x \cdot f(x) \geq \eta\mu 3x \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x}$ , άρα

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \kappa \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta\mu 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\eta\mu x} \cdot \frac{3x}{x} \right) \Leftrightarrow \kappa \geq 3 \quad (1).$$

- $x \in (-\pi, 0)$ . Τότε  $\eta\mu x < 0$ , οπότε από  $\eta\mu x \cdot f(x) \geq \eta\mu 3x \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x}$ , άρα

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \kappa \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\eta\mu 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\eta\mu x} \cdot \frac{3x}{x} \right) \Leftrightarrow \kappa \leq 3 \quad (2).$$

Από (1) και (2) είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa = 3$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**31-9.** Να βρείτε τα όρια:

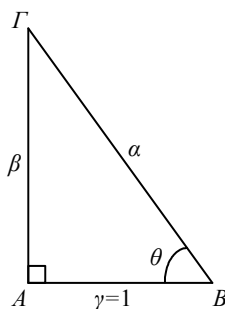
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu x}{x^3 + x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \eta\mu x}{x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi 4x}{\eta\mu 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 6x - \sin 2x}$$

**31-10.** Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sin x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x}{\eta\mu 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 - x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x + x}{\sqrt{1+x} - 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3x}{\eta\mu x - \eta\mu 3x}$$

**31-11.** Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + \sin x} - 2}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} - 1}$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2 + \eta\mu^2 x}$

**31-12.** Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\gamma = 1$ .



Να υπολογίσετε τα όρια: i)  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta)$ , ii)  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2)$  iii)  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha}$ .

**31-13.** Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει ότι  $|f(x) - \eta\mu x - 3x| \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τα όρια  $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + \eta\mu 2x}{xf(x) + \eta\mu x}$ .

**31-14.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $\mathbb{R}$  για την οποία υποθέτουμε ότι:

i. υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \in \mathbb{R}$  και ii.  $xf(x) \geq \eta\mu^2 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να προσδιορίσετε την πραγματική τιμή του  $L$ .

**31-15.** Αν για κάθε  $x$  κοντά στο 0 ισχύει  $\alpha\eta\mu x + \beta\eta\mu 2x \leq \gamma\eta\mu 3x$ , να αποδειχθεί ότι  $\alpha + 2\beta = 3\gamma$ .

**31-16.** Αν  $|x| < 1$  και ισχύουν οι ανισότητες:  $|f(x) - 3| \leq |x|$  και  $|g(x) + 4| \leq |x|$

i. Να βρεθεί αν υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

ii. Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - 3}{\eta\mu x} \right| \leq 1$ .

**31-17.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα  $f^3(x) - xf^2(x) - x^2f(-x) = x^2\eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν το  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  είναι πραγματικός αριθμός, να αποδειχθεί ότι  $A = 1$ .



After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

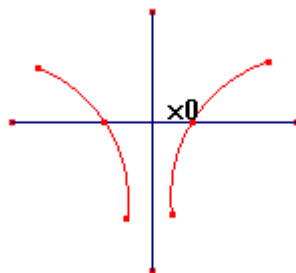
I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example.

This was the result:

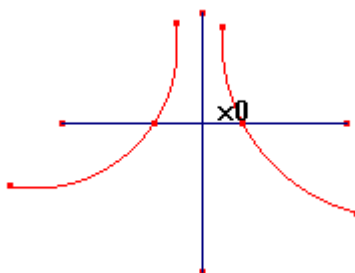
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = \infty$$

32 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

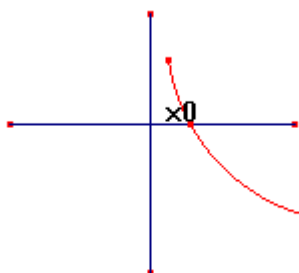
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



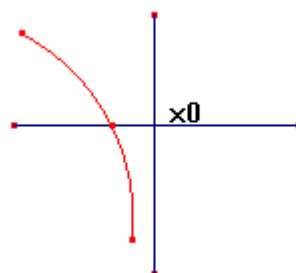
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

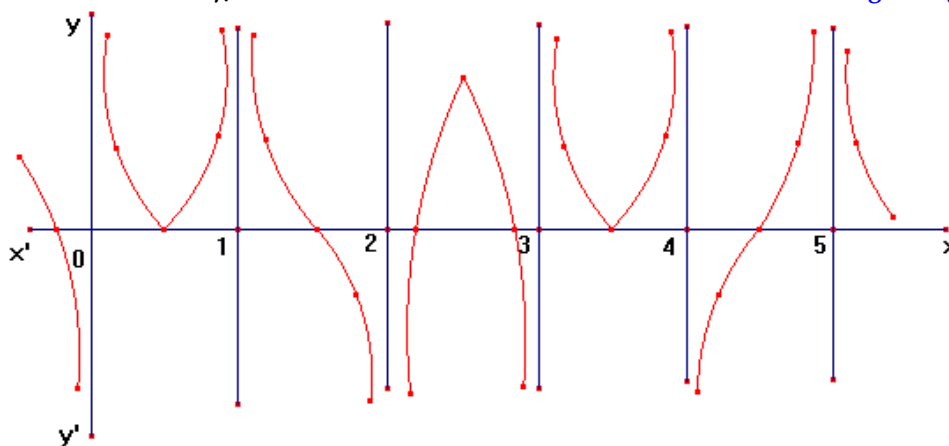


$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



$$\begin{aligned} &\text{Αν } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (όμοια για } -\infty \text{).} \\ &\text{Αν } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \end{array} \right| \text{ τότε δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \end{aligned}$$

Παράδειγμα1: Να βρεθούν τα όρια της συνάρτησης  $f$  στις θέσεις  $x_0 = 0, 1, 2, 3, 4$  όταν η γραφική παράσταση της  $f$  είναι:



Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^{2v}} = \pm\infty \quad v \in \mathbb{N}^*$ .

Πράξεις που δεν επιτρέπονται:

$\frac{0}{0}$ ,  $+\infty - \infty$ ,  $-\infty + \infty$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$

Η απόλυτη συνταγή για Μπιφτεκοσουβλάκια .....



**33. ΟΡΙΟ ΤΟ  $\pm\infty$  ( $x \rightarrow x_0$ ). ΜΟΡΦΗ  $\frac{\alpha}{0} \quad \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$**

$$\frac{\alpha}{0} \text{ οδηγεί σε } \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \text{δεν υπάρχει όριο} \end{cases}$$

$$\frac{0}{0} \text{ οδηγεί σε } \begin{cases} \text{αριθμό} \\ \frac{\alpha}{0} \text{ οδηγεί σε } \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \text{δεν υπάρχει όριο} \end{cases} \end{cases}$$

**Υπολογισμός  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  σε μορφή  $\frac{\alpha}{0}$**

1). Υπολογίζω το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ .

2). Υπολογίζω το  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , τότε  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ .

3). Βρίσκω το πρόσημο της  $g(x)$  εκατέρωθεν του  $x_0$  (ίσως χρειαστεί πίνακας προσήμου).

• Αν αλλάζει το πρόσημο τότε δεν υπάρχει όριο

• Αν  $g(x) > 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \lambda \cdot (+\infty) \begin{cases} +\infty, \lambda > 0 \\ -\infty, \lambda < 0 \end{cases}$

• Αν  $g(x) < 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \lambda \cdot (-\infty) \begin{cases} -\infty, \lambda > 0 \\ +\infty, \lambda < 0 \end{cases}$

Παράδειγμα1:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{(x-1)^2} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x^2-9} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{x}{x-3} - \frac{x^2-6}{x^2-5x+6} \right]$

**Παρατήρηση:** Αν είναι αρχικά μορφή  $\frac{0}{0}$ , τότε αίρω την απροσδιοριστία και μετά προκύπτει

$$\frac{\alpha}{0}.$$

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

**33-1.** Να βρεθούν τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{x-2}$

(β)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-5x}{x-2}$

(γ)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x-2}$

(δ)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-5x}{x-2}$

Λύση

Οι συναρτήσεις ορίζονται στο  $\mathbb{R} - \{2\}$ .

(α). Με  $x < 2$  έχουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$  με  $x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{x-2} = -\infty$ .

(β). Με  $x < 2$  έχουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$  με  $x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0$ . Επίσης  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-5x) = 4-10 = -6 < 0$ .

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-5x}{x-2} = +\infty$ .

(γ). Με  $x > 2$  έχουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$  με  $x > 2 \Leftrightarrow x-2 > 0$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x-2} = +\infty$ .

(δ). Με  $x > 2$  έχουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$  με  $x > 2 \Leftrightarrow x-2 > 0$ . Επίσης  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-5x) = 4-10 = -6 < 0$ .

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-5x}{x-2} = -\infty$ .

**33-2.** Να βρείτε τα όρια (α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{x \ln x}$

(β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{|\ln x| - |x|}$ .

Λύση

(α). Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{x\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (2x-3) \cdot \frac{1}{x\eta\mu x} \right]$ . Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} x\eta\mu x = 0 \cdot \eta\mu 0 = 0$  και  $x, \eta\mu x$  ομόσημοι κοντά

στο 0, οπότε  $x\eta\mu x > 0$ , είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\eta\mu x} = +\infty$ . Επειδή επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x-3) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$ ,

έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{x\eta\mu x} = (-3) \cdot (+\infty) = -\infty$ .

(β). Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} (|\eta\mu x| - |x|) = |\eta\mu 0| - |0| = 0$  και  $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow |\eta\mu x| - |x| < 0$  κοντά στο 0,

είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|\eta\mu x| - |x|} = -\infty$ . Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{|\eta\mu x| - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} (3x+2) \cdot \frac{1}{|\eta\mu x| - |x|} = (3 \cdot 0 + 2) \cdot (-\infty) = -\infty$ .

**33-3.** Να βρείτε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x^2-1}$ .

Λύση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$ ,  $x \neq \pm 1$ . Είναι  $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1} = \frac{3x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$ . Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{3x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = \frac{5}{2} \cdot (+\infty) = +\infty$ .

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{3x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = \frac{5}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$ .

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  δεν υπάρχει το όριο της  $f$  στο 1.

**33-4.** Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x}$ .

Λύση

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-5x+6) = 2$  γράφουμε κατάλληλα τη συνάρτηση για  $x \neq 0$  και

έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+6}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2-5x+6}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \right)$ . Επειδή στην περιοχή του 1 το  $(x-1)$  δεν

διατηρεί πρόσημο, παίρνουμε πλευρικά όρια, οπότε έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x^2-5x+6}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$

αφού  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-5x+6}{x} = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ .

Επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x^2-5x+6}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$  αφού  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-5x+6}{x} = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ .

Παρατηρούμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ . Επομένως δεν υπάρχει το όριο της  $f$  στο 1.

**33-5.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^3}$ .

Λύση

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}) = 0$ .

Πρέπει να απλοποιήσουμε την παράσταση οπότε κοντά στο 0 η  $f$  γράφεται

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x})(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})}{x^3(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})} = \frac{2-x-2-x}{x^3(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})} = \frac{-2x}{x^3(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})} = \frac{-2}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-2}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$  αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

33-6. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$ .

Λύση

Παρατηρούμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ . Το πρόσημο του  $x^2 - 1$  για τις τιμές του  $x$  κοντά στο 1 είναι:

|           |           |      |     |           |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $x^2 - 1$ | $+$       | $-$  | $+$ | $+$       |

Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$ .

Το συμπέρασμα είναι ότι δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$ .

33-7. Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{x^2 - 4} - \frac{x}{x^2 - 2x} \right)$ .

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{x^2 - 4} - \frac{x}{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{x(x-2)(x+2)} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{x-2} \times \frac{-x}{x^2 + 2x} \right) = (+\infty) \times \left( -\frac{1}{2} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{1}{x-2} \times \frac{-x}{x^2 + 2x} \right) = (-\infty) \times \left( -\frac{1}{2} \right) = +\infty \end{array} \right.$$

άρα δεν υπάρχει το όριο.

33-8.

Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} \right) \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right) \quad (γ) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{|x|} \right).$$

Λύση

$$(α). \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty. \text{ Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} \right) = +\infty.$$

(β). Παίρνοντας πλευρικά όρια έχουμε

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{2}{x} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}$  δεν έχει όριο στο 0.

$$(γ). \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|x|^2} - \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{|x|} \left( \frac{1}{|x|} - 1 \right) \right] = +\infty \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|x|} - 1 \right) = +\infty.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

33-9. Να βρεθούν τα όρια (αν

$$\text{υπάρχουν}): \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^{3000}} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-7}{(x+2)^2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4x+4} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|-3}{|x-2|} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+4}{x^2+6x+9}$$

33-10. Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+6}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)^{2003}} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+\sqrt{x}-6} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2-4x+1|-3|x-2|}{|x-1|-2}$$

33-11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2+3x-1}$ . Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

33-12. Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3+5}{1-\sin x}$   $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{2\sigma\phi x-3\eta\mu x}{1+\eta\mu x}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\eta\mu x+1}{2\eta\mu^2 x-1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta\mu^2 x} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}$$

33-13. Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \epsilon\phi x \quad B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x \quad \Gamma = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sigma\phi x \quad \Delta = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sigma\phi x.$$

33-14. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της  $f$  στο  $x_0$  όταν:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \quad x_0 = 0, \quad f(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{4}{1-x^2} \quad x_0 = 1, \quad f(x) = \frac{4}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} \quad x_0 = 1 \quad f(x) = \frac{x+5}{x^4+3x^2} \quad x_0 = 0, \quad f(x) = \frac{2x-3}{4(x-1)^4} \quad x_0 = 1$$

### 34 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Για τον υπολογισμό αυτών των ορίων ελέγχω πρώτα αν έχει νόημα η αναζήτησή τους, π.χ. για να έχει νόημα το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  πρέπει το πεδίο ορισμού να είναι της μορφής  $D_f = (\alpha, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} &= 0, v \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^v &= \begin{cases} +\infty, & \text{v αρτιος} \\ -\infty, & \text{v περιττος} \end{cases} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} &= 0, v \in \mathbb{N}^* \text{ προσοχη} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^v &= \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases} & \text{αναλογα αν } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

#### 1: Πολυωνυμικές

Παίρνω το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου.

$$\text{Παράδειγμα1: } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 2x + 6)$$

#### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

34-1. Να βρείτε τα όρια

$$\alpha). \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 3x - 1), \quad \beta). \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + 5x - 1), \quad \gamma). \lim_{x \rightarrow -\infty} (|\eta\mu\theta| + \theta)(-x^3 + x + 2), \theta < 0$$

Λύση

$$\alpha). \text{ Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -2 \cdot (+\infty) = -\infty.$$

$$\beta). \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + 5x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2) = -3 \cdot (+\infty) = -\infty.$$

γ). Ισχύει ότι  $|\eta\mu\theta| < |\theta|$ ,  $\theta \neq 0$ . Για  $\theta < 0$  είναι  $|\eta\mu\theta| < -\theta \Leftrightarrow |\eta\mu\theta| + \theta < 0$ . Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|\eta\mu\theta| + \theta)(-x^3 + x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|\eta\mu\theta| + \theta)(-x^3) = -\infty.$$

34-2. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$ .

Λύση

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  υπάρχει αριθμός  $\alpha$ , ώστε για κάθε  $x > \alpha$  να ισχύει  $x^3 - x - 1 > 0$ .

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - (x^3 - x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty.$$

34-3. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha). \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^5 + x^2 - 3x + 1), \quad \beta). \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1),$$

Λύση

$$\alpha). \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^5 + x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^5) = -\infty.$$

$$\beta). \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

34-4. Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 + 3x^2 + x + 1)$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 + 2x^2 + x - 3)$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-10x^3 + 2x - 5)$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 2x + 1)$

## 2: Ρητές

Παίρνω το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων.

Παράδειγμα2:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 6x + 6}{(x-1)^2 + 4}$ .

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Πρέπει να γίνουν πρώτα όλες οι πράξεις σε αριθμητή – παρονομαστή.

Αν έχω άθροισμα πολυωνυμικής και ρητής ή δύο ρητών και καταλήγω σε απροσδιοριστία  $\infty - \infty$  τότε προσθέτω τις δύο συναρτήσεις (ένα κλάσμα) και μετά βρίσκω το όριο.

Παράδειγμα3 Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1} \right)$ .

Παρατηρήσεις: Έστω ρητή συνάρτηση  $P(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

- Αν ο βαθμός της  $f$  είναι μεγαλύτερος του βαθμού της  $g$  το όριο είναι άπειρο.
- Αν ο βαθμός της  $f$  είναι ίσος με το βαθμό της  $g$  τότε το όριο είναι στο  $\mathbb{R}^*$  (το πηλίκο των μεγιστοβάθμιων συντελεστών).
- Αν ο βαθμός της  $f$  είναι μικρότερος του βαθμού της  $g$  τότε το όριο είναι 0.

Δηλαδή αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή τότε το όριο είναι πραγματικός αριθμός.

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

34-5. Να βρείτε τα όρια

α).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$ , β).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$ , γ).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - \frac{2x^2}{x+1} \right)$

Λύση

α). Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = \frac{2}{3}$ .

β). Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ .

γ). Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - \frac{2x^2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ .

34-6. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - x + 1}{4x^5 - x^3 + 2}$ , β).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4 - x^2 + 2}{2x^2 - x + 1}$ , γ).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 + 2}{x+1} \right)$ .

Λύση

α).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - x + 1}{4x^5 - x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{4x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2}{4} \right) \cdot \frac{1}{x^3} = 0$ .

β).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4 - x^2 + 2}{2x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2) = -\infty$ .

γ).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 + 2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4 + x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$ .

34-7. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

α).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 3x| + 2x}{x^2 - 5x + 6}$ , β).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2| - |3-x| + 1}{x-7}$ .

Λύση

α). Το πρόσημο της παράστασης  $x^2 - 3x$  φαίνεται στον διπλανό πίνακα. Επειδή  $x \rightarrow -\infty$  έχουμε  $x < 0$ , οπότε  $x^2 - 3x > 0$  και το όριο είναι ίσο

| x          | $-\infty$ | 0 | 3 | $+\infty$ |
|------------|-----------|---|---|-----------|
| $x^2 - 3x$ | +         | - | + | +         |

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

β). Το πρόσημο των παραστάσεων που είναι σε απόλυτη τιμή φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Επειδή  $x \rightarrow +\infty$  έχουμε  $x > 3$ ,

οπότε  $x - 2 > 0$  και  $3 - x < 0$ . Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2| - |3-x| + 1}{x-7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2+3-x+1}{x-7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-7} = 0.$$

| x     | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
|-------|-----------|---|---|-----------|
| $x-2$ | -         |   | + | +         |
| $3-x$ | +         | + |   | -         |

$$34-8. \text{ Να βρεθεί το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^v + (x+2)^v + \dots + (x+10)^v}{x^v + 10^v}, v \in \mathbb{N}.$$

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^v \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^v + \left(1 + \frac{2}{x}\right)^v + \dots + \left(1 + \frac{10}{x}\right)^v \right]}{x^v \left(1 + \frac{10^v}{x^v}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^v + \left(1 + \frac{2}{x}\right)^v + \dots + \left(1 + \frac{10}{x}\right)^v}{1 + \frac{10^v}{x^v}} = \frac{1+1+\dots+1}{1} = 10.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

34-9. Να βρείτε τα

$$\text{όρια: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^2 + 3x + 7}{2x^2 + x + 3} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^4 + 3x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x + 4} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3 + 8} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^{10} + x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{5}{x+2} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x} - \frac{x^2 + 3}{x+2} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x|}{x-1}$$

$$34-10. \text{ Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια: } A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x-6| - |1-x| + 2}{x-5}, B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3|2-x| - |x^2-4| + 1}{x^2 - x + 2}.$$

$$34-11. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{|2x^3 + 3x^2 - 3x + 5| - |x^2 - 7x - 13|}{|x^3 + x - 5| + |7-x|}. \text{ Να βρεθούν τα όρια}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

$$34-12. \text{ Να βρείτε τα όρια: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{|x-1| + |x-2|}{x-3} \right), B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{|1-x^2| + |x^2-9| + |x^2+5x+31|}{x^2+2x+5} \right).$$

## 35 ΡΙΖΙΚΑ

Σε όλα τα ριζικά ελέγγω πρώτα αν έχει νόημα η αναζήτηση ορίου.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[k]{f(x)}, \text{ βρίσκω το } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

- Αν  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \geq 0$  τότε έχει νόημα η αναζήτηση ορίου.
- Αν  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) < 0$  τότε δεν έχει νόημα η αναζήτηση ορίου.

### 1: Απλά ριζικά

- Κάνω «ανορθόδοξη» παραγοντοποίηση μέσα στην υπόριζο ποσότητα βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο  $x^k$  όπου  $k$  η τάξη της ρίζας, π.χ. αν έχω κυβική ρίζα βγάζω το  $x^3$ .
- Εξάγω από το ριζικό το  $x^k$ , δηλαδή  $|x| = \sqrt[k]{x^k}$ .
- Αν  $x \rightarrow +\infty$  τότε  $|x| = x$ , αλλιώς  $|x| = -x$ .
- Υπολογίζω το όριο.

$$\text{Παράδειγμα 1: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 6}.$$

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

35-1. Να βρείτε τα όρια

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}, \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 5x + 7}.$$

Λύση

i). Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left( 4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= (+\infty) \cdot \sqrt{4 - 0 + 0} = +\infty.$$

$$\text{ii). } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}} \right) = (+\infty) \cdot \sqrt{1 + 0 + 0} = +\infty.$$

35-2. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

$$\alpha). \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - x^2}.$$

Λύση

α). Πρέπει  $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ ή } x \leq 1$ .

Οπότε το πεδίο ορισμού είναι  $A = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$  και έχει νόημα το όριο. Για  $x \in (-\infty, 0)$  έχουμε

$$f(x) = \sqrt{x^2 \left( 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = |x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = +\infty.$$

β). Πρέπει  $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ , οπότε το πεδίο ορισμού είναι  $A = [-2, 2]$  και δεν έχει νόημα το όριο.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

35-3. Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3}$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 10x + 9}$

## 2: Ριζικά με κλάσμα

- Κάνω «ανορθόδοξη» παραγοντοποίηση όπως προηγουμένως και στα ριζικά του αριθμητή και στον παρονομαστή και εξαγωγή εκτός των ριζικών το  $x^k$ :  $|x| = \sqrt[k]{x^k}$ .
- Αν  $x \rightarrow +\infty$  τότε  $|x| = x$ , αλλιώς  $|x| = -x$ .
- Κάνω παραγοντοποίηση, απλοποιώ και υπολογίζω το όριο.

Παράδειγμα2: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} + x - 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 2}}$ .

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

35-4. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 2})^{10} + (x - \sqrt{x^2 - 2})^{10}}{x^{10}}$ .

Λύση

Για  $x \in (0, +\infty)$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 2})^{10} + (x - \sqrt{x^2 - 2})^{10}}{x^{10}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{x} \right)^{10} + \left( \frac{x - \sqrt{x^2 - 2}}{x} \right)^{10} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} \right)^{10} + \left( 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} \right)^{10} \right].$$

$$\text{Ομως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \right)}{x} = 1,$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} \right)^{10} + \left( 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} \right)^{10} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} \right)^{10} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} \right)^{10} = (1 + 1)^{10} + (1 - 1)^{10} = 2^{10}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 2})^{10} + (x - \sqrt{x^2 - 2})^{10}}{x^{10}} = 2^{10}.$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

$$35-5. \text{ Να βρείτε τα όρια: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x+3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x+3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+7} + \sqrt{x^2+x+7}}{x+3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+7} + x + 1}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + 5 - x}{x + \sqrt{4+3x^2}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 3x+2}{\sqrt{x^2+5x+7} - 2x+3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$35-6. \text{ Αν } f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + x, \text{ να βρείτε τα όρια: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta.$$

**3. Πράξη Ριζών**

- Στην περίπτωση αυτή υπάρχει το ενδεχόμενο να προκύψει απροσδιόριστη μορφή  $0 \cdot (\infty)$ . Αυτό το καταλαβαίνω από την αρχή κάνοντας τον εξής έλεγχο (στο πρόχειρο): βρίσκω τη διαφορά ή το άθροισμα των ριζών των μεγιστοβάθμιων όρων. Αν η διαφορά κάνει 0 τότε θα καταλήξω σε  $0 \cdot (\infty)$ , αλλιώς δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, π.χ.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 - 5x + 1}) \quad \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} = |x| - |x| = 0, \text{ άρα απροσδιόριστη μορφή.}$$

- Ελέγχω αν έχω α. μ.  $0 \cdot (\infty)$ .
- Αν έχω τότε πολλαπλασιάζω με συζυγή παράσταση.
- Εφαρμόζω «ανορθόδοξη» παραγοντοποίηση.
- Απλοποιώ και υπολογίζω το όριο.

(όμοια και για κυβικά ριζικά).

$$\text{Παραδείγμα3: Να βρεθεί το όριο } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 1})$$

$$\text{Παραδείγμα4: Να βρεθεί το όριο } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 1})$$

$$\text{Παραδείγμα5: Να βρεθεί το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 6x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 2})$$

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

35-7. Να βρείτε τα όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 5}).$$

Λύση

α). Για  $x > 0$  είναι  $\sqrt{4x^2} - 2x = 2x - 2x = 0$ . Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 1 - 4x^2}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x \sqrt{\left(4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{2 + 0}{\sqrt{4 + 0 + 0} + 2} = \frac{1}{2}.$$

β). Για  $x < 0$  είναι  $x + \sqrt{x^2} = x + |x| = x - x = 0$ . Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 5}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 5})(x - \sqrt{x^2 + 5})}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 5)}{x - |x| \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x + x \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}} = 0 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = 0.$$

35-8. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - x + 2}), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - 3x)$$

Λύση

α). Πρέπει  $x^2 + 1 \geq 0$  που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $4x^2 + x + 2 \geq 0$ , που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αφού  $\Delta < 0$ , οπότε το πεδίο ορισμού  $A = \mathbb{R}$  και έχει νόημα το όριο. Για  $x \in (-\infty, 0)$  η

συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - x + 2}$  γράφεται

$$f(x) = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + |x| \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = (-x) \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right), \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 4.$$

β). Πρέπει  $x^2 - x + 2 \geq 0$ , που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα το πεδίο ορισμού είναι  $A = \mathbb{R}$ , οπότε έχει νόημα το όριο. Για  $x \in (-\infty, 0)$  η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2} - 3x$  γράφεται

$$f(x) = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 3x = -x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 3x = (-x) \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3 \right) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3 \right) = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3 \right) = 4.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

35-9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 7} - \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ . Να βρεθούν τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

35-10. Να βρεθούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 7} - x + 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x + 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x)$ ,  $\alpha \neq \beta$

35-11. Να βρείτε τα

$$\text{όρια: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + 2x - 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 10} - \sqrt{x^2 + 2x + 3}) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 6x + 4} + 3x - 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x^2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 3})$$

35-12. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

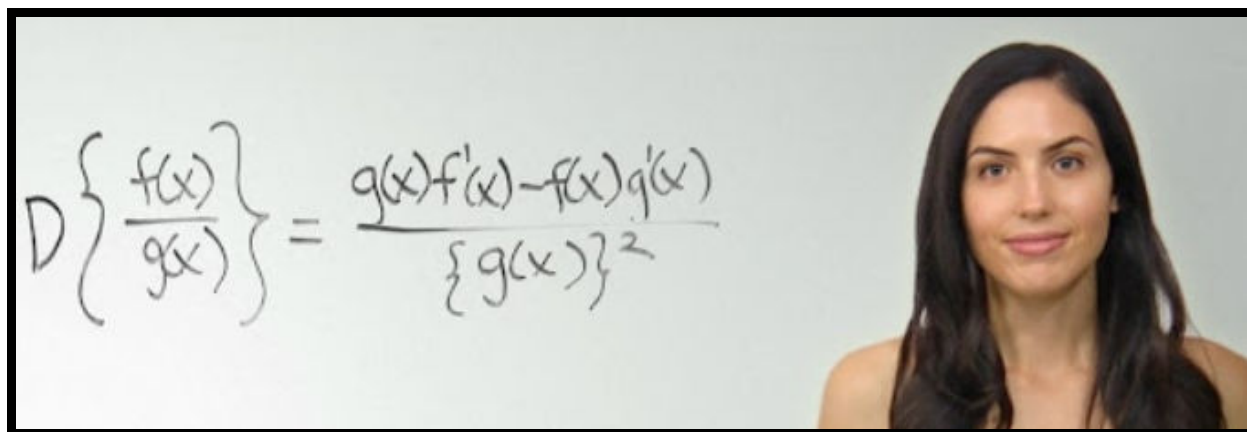
35-13. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1})$ .

35-14. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 1 - x\sqrt{4x^2 + x + 1})$ .

### ☺ Για οπτικούς τύπους....

Στον παρακάτω σύνδεσμο μια σειρά από εκπαιδευτικά βίντεο που περιγράφουν εύληπτα την έννοια του ορίου με οικοδόσποινα την [♥2 mathbff](https://www.youtube.com/watch?v=jLLxgwCt6o). Καθηγήτρια του MIT, αγνώστων λοιπών στοιχείων.

Στον ιστότοπο : <https://www.youtube.com/watch?v=jLLxgwCt6o>



## 36 ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΟΡΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Χαρακτηριστικό γνώρισμα: άθροισμα 3 προσθετέων με 2 τουλάχιστον ριζικά.

- Διαχωρίζω κατάλληλα έναν από τους όρους (συνήθως αυτού που δεν έχει ρίζα) σε 2 και έχουμε δύο αθροίσματα με όρους.
- Βρίσκω το όριο του κάθε αθροίσματος χωριστά π.χ.  $\sqrt{4x^2 + \dots} + \sqrt{9x^2 + \dots} - 5x$ ,  
επειδή  $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$ , τότε  $-5x = -2x - 3x$ ,  
άρα  $\sqrt{4x^2 + \dots} + \sqrt{9x^2 + \dots} - 5x = (\sqrt{4x^2 + \dots} - 2x) + (\sqrt{9x^2 + \dots} - 3x)$ .

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 8x} + \sqrt{4x^2 - 1} - 6x)$ .

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

36-1. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{4x^2 + x + 2})$ .

Λύση Πρέπει  $x^2 + 1 \geq 0$ ,  $x^2 + 2x + 3 \geq 0$  και  $4x^2 + x + 2 \geq 0$  που ισχύουν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Δηλαδή το πεδίο ορισμού της δοσμένης συνάρτησης είναι το  $A = \mathbb{R}$  και έχει νόημα το όριο.

Επειδή  $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2} - \sqrt{4x^2} = |x| + |x| - 2|x| = 0$  έχουμε απροσδιοριστία και για να βρούμε το όριο γράφουμε κατάλληλα τη συνάρτηση: προσθέτω, αφαιρώ κατάλληλους όρους.

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sqrt{x^2 + 1} - x) + (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) (\sqrt{4x^2 + x + 2} - 2x) = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} - \frac{4x^2 + x + 2 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 2} + 2x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x(2 + \frac{3}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1)} - \frac{x(1 + \frac{2}{x})}{x(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2} = 0 + \frac{2}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

36-2. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - 3x)$ .

Λύση Ο τύπος γράφεται  $(\sqrt{4x^2 + 8x + 1} - 2x) + (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x)$ . Βρίσκουμε με τη γνωστή μέθοδο της

$$\text{συζυγούς παράστασης } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(8 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2)} = \frac{8}{4} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x)(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} + x^2)}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + 1)} = \frac{3}{3} = 1.$$

Έτσι είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

36-3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3x + 2$ . Να βρεθούν τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

36-4. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{9x^2 + 6x + 2})$ .

36-5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\text{i. } f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 8x + 5} - 3x + 2 \quad \text{ii. } g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{9x^2 + 6x + 3} - 2x + 1.$$

Να υπολογίσετε τα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

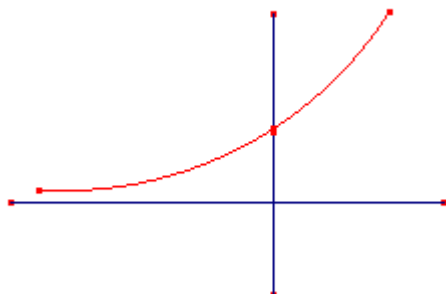
36-6. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{x^2 + 2x + 5} - 3\sqrt{x^2 + 2})$ .

37 ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

1: απλή συνάρτηση

Εκθετική:

$$\alpha > 1$$



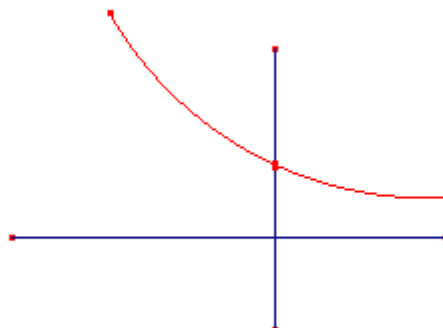
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$0 < \alpha < 1$$

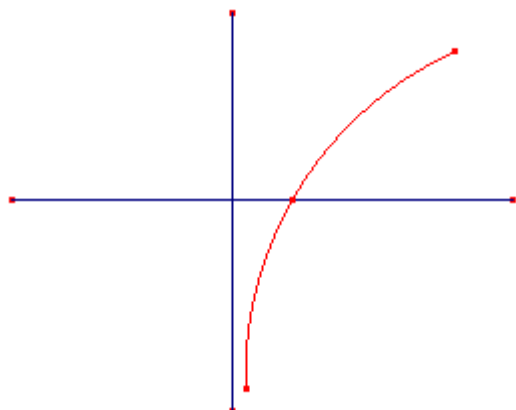


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$$

Λογαριθμική:

$$\alpha > 1$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\alpha} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$$

- Δεν έχει νόημα το όριο της λογαριθμικής στο  $-\infty$ .
- Για να θυμάμαι αυτά τα όρια σχεδιάζω πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις.
- Υπολογισμός
  1. Αναλύω τις δυνάμεις ώστε να έχω μόνο  $\alpha^x$ .
  2. Βγάζω κοινό παράγοντα τον  $\alpha^x$  ή διαιρώ με αυτόν αν χρειαστεί,
  3. Απλοποιώ και υπολογίζω το όριο.

Παράδειγμα1:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 2 - e^x}{e^x + 1}$ .

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

37-1. Να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{x+2} - 5^x - 4}{5^x + 1}$ .

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{x+2} - 5^x - 4}{5^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \left( 5^2 - 1 - \frac{4}{5^x} \right)}{5^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25 - 1 - 4 \left( \frac{1}{5} \right)^x}{1 + \left( \frac{1}{5} \right)^x} = \frac{25 - 1 - 0}{1 - 0} = 24.$$

37-2. Να βρεθούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 3x - 2), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 - 2 + \left( \frac{3}{4} \right)^x \right], \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{4}{5} x^3 - \left( \frac{4}{5} \right)^x \right].$$

Λύση

$$\alpha). \text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2) = +\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 3x - 2) = +\infty.$$

$$\beta). \text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) = +\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 - 2 + \left( \frac{3}{4} \right)^x \right] = +\infty.$$

$$\gamma). \text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4}{5} \right)^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4}{5} x^3 \right) = -\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{4}{5} x^3 - \left( \frac{4}{5} \right)^x \right] = -\infty.$$

37-3. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x + 3}{\ln^4 x - 2 \ln x + 1}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \text{ όταν } f(x) = \ln(x^2 + \eta \mu x) - 2 \ln x.$$

Λύση

α). Βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $\ln^4 x$  και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x \left( 1 + \frac{3}{\ln^4 x} \right)}{\ln^4 x \left( 1 - \frac{2}{\ln^3 x} + \frac{1}{\ln^4 x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{\ln^4 x}}{1 - \frac{2}{\ln^3 x} + \frac{1}{\ln^4 x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0 + 0} = 1$$

$$\alpha\text{φού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\ln^4 x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln^3 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^4 x}.$$

$$\beta). \text{Η συνάρτηση } f \text{ γράφεται } f(x) = \ln(x^2 + \eta \mu x) - \ln x^2 = \ln \frac{x^2 + \eta \mu x}{x^2} = \ln \left( 1 + \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x} \right).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = 1 + 0 \cdot 0 = 1, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0. \text{ Αν θέσουμε } u = 1 + \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln(u) = 0.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

$$37-4. \text{Να υπολογίσετε τα όρια: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{2}{5} \right)^x - x^2 + 1 \right] \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + 5x - 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{7}{3} \right)^x \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2}{3} x - \left( \frac{2}{3} \right)^x \right].$$

$$37-5. \text{Να υπολογίσετε τα όρια: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \log_{\frac{2}{3}} x + \left( \frac{2}{3} \right)^x \right] \lim_{x \rightarrow 0} [2x - 1 + \log x] \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \log_{\frac{2}{3}} x + 5x^2 - 1 \right].$$

$$37-6. \text{Να βρεθούν τα όρια: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 2}{x^5 + 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 1}{2^{x+1} + 3}$$

### 2: Σύνθετη συνάρτηση

- Θέτω  $u$  την παράσταση του εκθέτη στην εκθετική και την παράσταση στον λογάριθμο στη λογαριθμική. Προσπαθώ με ιδιότητες να τις φέρω στη μορφή  $a^{g(x)}$  ή  $\ln g(x)$ .
- Υπολογίζω το  $\lim_{u \rightarrow u_0} e^u$  ή  $\lim_{u \rightarrow u_0} \ln(u)$  αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2+3x+6}{x+2}\right)$

**Παρατήρηση:** Αν εμφανίζεται πολλές φορές ο όρος  $a^x$  ή  $\log_a x$

θέτω  $u = a^x$  και  $u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u$  συνήθως παραγοντοποιώ αριθμητή και παρονομαστή (ή  $u = \log_a x$ ).

Παράδειγμα 4: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 2^{x+2} + 3}{2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 3}$ .

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**37-7.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + x + 1)$ .

Λύση

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ . Έστω  $t = e^x + x + 1$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + x + 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$ .

**37-8.** Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e^{\frac{3x^5-3x^2+1}{x^4+1}} \eta\mu x \right).$$

Λύση

α). Παρατηρούμε ότι  $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ , άρα  $\sqrt{x^2+1} - x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα το πεδίο ορισμού

της  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$  είναι το  $\mathbb{R}$ . Έχουμε  $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ .

Άρα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ .

Θέτουμε  $\sqrt{x^2+1} - x = u > 0$ . Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$ , ισχύει  $u \rightarrow 0$ , με  $u > 0$ .

Επομένως έχουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ .

β). Παρατηρούμε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5-3x^2+1}{x^4+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{x^4} = -\infty$ . Επομένως ισχύει  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{3x^5-3x^2+1}{x^4+1}} = 0$ .

$$\text{Έχουμε } \left| e^{\frac{3x^5-3x^2+1}{x^4+1}} \eta\mu x \right| \leq e^{\frac{3x^5-3x^2+1}{x^4+1}} \Leftrightarrow -e^{\frac{3x^5-3x^2+1}{x^4+1}} \leq e^{\frac{3x^5-3x^2+1}{x^4+1}} \eta\mu x \leq e^{\frac{3x^5-3x^2+1}{x^4+1}}.$$

Και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι 0.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**37-9.** Να υπολογίσετε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x - 5 + e^{\frac{2-x^3}{x^2+1}} \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - 2 \ln(x-1)]$ .

**37-10.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  όταν: i.  $f(x) = e^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$  ii.  $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-2}}$  iii.  $f(x) = e^{\frac{2-x^3}{x^2+x}}$ .

**37-11.** Να βρεθούν τα όρια:  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3^{x+4})$   $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3^{x+4})$   $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-4}{x^2+1}\right)$ .

**37-12.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  όταν:

$$\text{i. } f(x) = 2 \ln(3x) - \ln(x^2+1) \quad \text{ii. } f(x) = 3 \ln x - \ln(2x^2-x+1) \quad \text{iii. } f(x) = \ln(x+\eta\mu x) - 2 \ln x.$$

**37-13.** Να βρεθούν τα όρια:  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + 1}{\ln^2 x - \ln x + 1}$   $B = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log(\ln x)$   $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\ln x}(\ln x^2)$ .

## 38 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ

- Αναλύω τις δυνάμεις ώστε να έχω μόνο  $\alpha^x, \beta^x, \gamma^x, \dots$ .
- Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με κατάλληλη εκθετική παράσταση. Γενικά ακολουθώ τον εξής κανόνα:
  - α). Αν  $x \rightarrow +\infty$ 
    - i). Αν όλες οι βάσεις είναι μεγαλύτερες του 1 διαιρώ με  $\alpha^x$  όπου  $\alpha$  η μεγαλύτερη βάση.
    - ii). Αν όλες οι βάσεις είναι μικρότερες του 1 διαιρώ με  $\alpha^x$  όπου  $\alpha$  η μικρότερη βάση.
  - β). Αν  $x \rightarrow -\infty$ 
    - i). Αν όλες οι βάσεις είναι μεγαλύτερες του 1 διαιρώ με  $\alpha^x$  όπου  $\alpha$  η μικρότερη βάση.
    - ii). Αν όλες οι βάσεις είναι μικρότερες του 1 διαιρώ με  $\alpha^x$  όπου  $\alpha$  η μεγαλύτερη βάση.

Παράδειγμα1: Υπολόγισε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 2^x}{e^x + 2^{x+3}}$ .

Παρατήρηση: Αν υπάρχουν και παράγοντες πολλαπλασιαστές, δυνάμεις του  $x$ , διαιρώ και με τη μεγιστοβάθμια δύναμη του  $x$ , εκτός της εκθετικής δηλαδή  $x^3 e^x$ .

Παράδειγμα2: Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 5x^2 \cdot 3^{x+1} + 6x^3 \cdot 2^{2x}}{3x^3 \cdot 2^{2x} - 7x \cdot 2^{x+1} - 3}$ .

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

38-1. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2^{x+1}}{2e^x + 2^x}$ .

Λύση

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2^{x+1}}{2e^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2 \cdot 2^x}{2e^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{2^x} + \frac{2 \cdot 2^x}{2^x}}{\frac{2e^x}{2^x} + \frac{2^x}{2^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x + 2}{2\left(\frac{e}{2}\right)^x + 1} = \frac{0+2}{2 \cdot 0+1} = 2.$$

38-2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 3^{x+2} + e^{x-1}}{3^{x+1} + 2^{x-1} - e^{x-2}}, \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 3^{x+2} + e^{x-1}}{3^{x+1} + 2^{x-1} - e^{x-2}}.$$

Λύση

$$\alpha). \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 3^{x+2} + e^{x-1}}{3^{x+1} + 2^{x-1} - e^{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left( \frac{2^x}{3^x} - 3^2 + \frac{e^{x-1}}{3^x} \right)}{3^x \left( 3 + \frac{2^{x-1}}{3^x} - \frac{e^{x-2}}{3^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3^2 + \left(\frac{e}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{e}}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{e}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{e^2}} = \frac{0-9+0}{3+0+0} = -3.$$

$$(\text{Αφού } \frac{2}{3} \text{ και } \frac{e}{3} < 1 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^x = 0).$$

$$\beta). \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 3^{x+2} + e^{x-1}}{3^{x+1} + 2^{x-1} - e^{x-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \left( 1 - \frac{3^{x+2}}{2^x} + \frac{e^{x-1}}{2^x} \right)}{2^x \left( \frac{3^{x+1}}{2^x} + 2^{-1} - \frac{e^{x-2}}{2^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot 3^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{e}}{\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot 3 + \frac{1}{2} - \left(\frac{e}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{e^2}} = \frac{1-0+0}{0+\frac{1}{2}-0} = 2.$$

$$(\text{Αφού } \frac{3}{2} \text{ και } \frac{e}{2} > 1 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x = 0).$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

38-3. Αν  $f(x) = \frac{5^x + 3^{x+1}}{5^x - 3^{x+1}}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

38-4. Να βρεθούν τα όρια:  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+5}}{3^x + 2^{x+1} + 2}$   $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2} + e^x - 2}{e^x + e^{x+1} + 1}$   $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 3^{x+1}}{8^x + 5^{x+1}}$   $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+2} + 5}{2^x + 3^{x+1} + 1}$ .

38-5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2^{x+1} - 3^x + 2}{2^x + 3^{x+1} + 2}$ . Να βρεθούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

38-6. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2^{x+3} + 3^{x-1}}{5^{x+2} + 2^{x+1}}}$ .

38-7. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 3^{x+1} - 3x \cdot 2^{x-1} - 6x^2 \cdot 5^x}{3x^2 \cdot 5^x + 6x \cdot 2^{x+2} - 4}$ .

### ΕΝΑ ΣΧΟΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΤΟ ΚΑΙ ΕΝΑ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ ☺

Ο Τοτός για να βρει το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  σκέφτηκε ως εξής:

«Εφόσον  $x \rightarrow +\infty$  ισχύει  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+0)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1$$

Από την άλλη ο Τοτός χρησιμοποίησε αριθμομηχανή τσέπης και υπολόγισε την τιμή της παράστασης  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  για μεγάλα  $x$  και διαπίστωσε ότι:

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2.70481$$

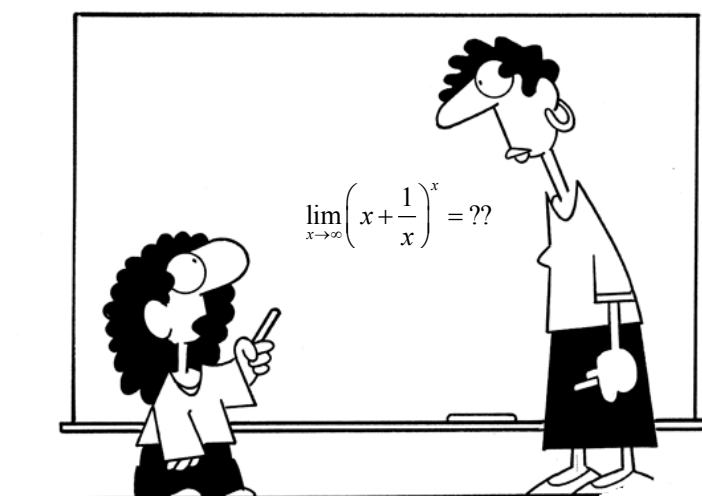
$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2.71692$$

$$\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} \approx 2.71814$$

Τι δεν πάει καλά;

Όταν παίρνουμε το όριο μιας παράστασης δεν επιτρέπεται να παίρνουμε το όριο κάποιων όρων της και να αφήνουμε τους υπολοίπους για αργότερα. Ειδικά, όταν παίρνουμε όριο, δεν πρέπει να υπάρχει καμία εμφάνιση της μεταβλητής μετά την λήψη του ορίου.

(Για την ακρίβεια ισχύει  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ )



## 39 ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗΣ

1. Εύρεση ορίου της  $f(x)$ .

- Θέτω  $h(x)$  την παράσταση του γνωστού ορίου.
- Λύνω ως προς  $f(x)$  την ισότητα.
- Βρίσκω το όριο της  $f(x)$

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης  $f$  στη θέση  $x = 1$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 5x + 1) = 10$ .

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

39-1. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - x^2 + 3x) = 3$  και  $f(x) \neq 1$  κοντά στο

2. Να βρείτε τα όρια (i)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  (ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2f(x)}{f(x) - 1}$

Λύση

i). Θέτουμε  $g(x) = f(x) - x^2 + 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$  και  $f(x) = g(x) + x^2 - 3x$

Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + x^2 - 3x) = 3 + 2^2 - 3 \cdot 2 = 1$ .

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ .

ii). Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2f(x)}{f(x) - 1} \stackrel{y=f(x)}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y^2 + 3} - 2y}{y - 1} = -\frac{3}{2}$ .

39-2. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2x^2 + x - 3] = 5$ . Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x - 2}{2f(x) - 3}$

Λύση

i). Θέτουμε  $g(x) = f(x) - 2x^2 + x - 3$ , οπότε  $f(x) = g(x) + 2x^2 - x + 3$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$ .

Τότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x + 3) = 5 + 2 - 1 + 3 = 9$ .

ii). Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 9$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) - 3] = 2 \cdot 9 - 3 = 15$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - x - 2) = 9 - 1 - 2 = 6$ .

Οπότε είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x - 2}{2f(x) - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - x - 2]}{\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) - 3]} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

39-3. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2|f(x) = 1$ . Να βρείτε τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  (β)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) + 5}{f^3(x) + 1}$

Λύση

(α). Έστω η συνάρτηση  $g(x) = |x - 2|f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$  και  $f(x) = \frac{g(x)}{|x - 2|}$  κοντά στο 2.

Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \cdot \frac{1}{|x - 2|} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$ .

(β). 1ος τρόπος:

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ , είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} = 0$ . Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) + 5}{f^3(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) \left( 1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{5}{f^2(x)} \right)}{f^3(x) \left( 1 + \frac{1}{f^3(x)} \right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{5}{f^2(x)}}{1 + \frac{1}{f^3(x)}} = 0 \cdot \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

2ος τρόπος:

Έστω  $y = f(x)$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} y = +\infty$ . Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) + 5}{f^3(x) + 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - 2y + 5}{y^3 + 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{y^3} = 0$ .

39-4. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{f(x) + 2} = +\infty$ . Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Λύση

$$\text{Θέτουμε } \frac{f(x) - 3}{f(x) + 2} = g(x),$$

οπότε  $f(x) - 3 = g(x)f(x) + 2g(x) \Leftrightarrow f(x)[1 - g(x)] = 2g(x) + 3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2g(x) + 3}{1 - g(x)}$ , διότι  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$  και

$$\text{άρα } g(x) \neq 1. \text{ Όμως } f(x) = \frac{2 + \frac{3}{g(x)}}{\frac{1}{g(x)} - 1} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{g(x)} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \frac{3}{g(x)}}{\frac{1}{g(x)} - 1} = \frac{2 + 0}{0 - 1} = -2.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

39-5. Αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - x^2 - 2x + 5) = 10$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

39-6. Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} [(3x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot g(x)] = 34$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ , να υπολογίσετε την τιμή του.

39-7. Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 1}{x - 3} = 4$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

39-8. Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 2x^2 + 3x + 5) = 10$  τότε να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  και το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4}{f(x) - 2}$ .

39-9. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - 5) = 7$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

39-10. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , αν: i)  $\lim_{x \rightarrow 1} (4f(x) + 2 - 4x) = -10$  ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$ .

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0 = 0$  όταν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \exp x}{2x^2 - x} = -\infty$ .

39-11. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ , εφόσον υπάρχει, όταν:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 3x}{5x + 4} = -\infty \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -2} [(3x + 1)f(x) + 5] = +\infty \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3}{f(x)} = -\infty.$$

39-12. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \sin \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x} - 1} = -\infty$  τότε να προσδιορίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

39-13. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 13$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

39-14. Αν  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 2}{f(x)} = +\infty$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ .

39-15. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , όταν:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4}{f(x)} = +\infty \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x + 2} = -\infty \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x^2 - 2)] = +\infty.$$

39-16. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , να βρεθεί το όριο αυτό αν:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4}{f(x)} = +\infty \text{ και ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x + 4} = -\infty.$$

39-17. Αν  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 1}{f(x)} = +\infty$ , να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$ .

39-18. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 5}{f(x) - 5} = -\infty$ , να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ .

## 2. Εύρεση του ορίου της $f(x)$ και $g(x)$

- Θέτω  $h(x)$  και  $\phi(x)$  τις παραστάσεις των γνωστών ορίων.
- Λύνω το σύστημα ως προς  $f(x)$  και  $g(x)$ .
- Βρίσκω το όριο των  $f(x), g(x)$ .

Παράδειγμα2: Να βρεθούν τα όρια των  $f$  και  $g$  στο  $x = 3$ , όταν 
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} [5f(x) - 2xg(x)] = -8 \\ \lim_{x \rightarrow 3} [3xf(x) - 4g(x)] = 6 \end{cases}$$

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**39-19.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2g(x)] = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - g(x)] = 2$ , να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

Λύση

Έστω  $h(x) = f(x) - 2g(x)$  και  $\phi(x) = f(x) - g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι

- $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x) = 2$
- $$\begin{cases} f(x) - 2g(x) = h(x) \\ f(x) - g(x) = \phi(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2\phi(x) - h(x) \\ g(x) = \phi(x) - h(x) \end{cases}$$

Οπότε

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [2\phi(x) - h(x)] = 2 \cdot 2 - 3 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [\phi(x) - h(x)] = 2 - 3 = -1$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**39-17.** Αν για τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = 8$  και  $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) - g(x)) = 4$ , να βρείτε τα  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ .

**39-18.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 10} (3f(x) - 2g(x)) = 7$  και  $\lim_{x \rightarrow 10} (3g(x) + 7f(x)) = 7$ , να υπολογίσετε τα  $\lim_{x \rightarrow 10} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 10} g(x)$ .

**39-19:** Να βρεθούν τα όρια των  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , όταν 
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - 3g(x)] = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) + 3g(x)] = -\infty \end{cases}, x_0 = 3.$$

**40 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ: ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΟΥ  $f(x) \cdot g(x)$  Ή  $f(x) : g(x)$**

- Πολλαπλασιάζω και διαιρώ συγχρόνως κάθε όρο του γινομένου  $f(x) \cdot g(x)$  ή του πηλίκου  $\frac{f(x)}{g(x)}$  με τον διαιρέτη ή πολλαπλασιαστή που περιέχεται στο αντίστοιχο δοσμένο όριο ώστε να μορφοποιηθεί η παράσταση του γνωστού ορίου.

- Βρίσκω τα όρια και αντικαθιστώ.

**Παρατήρηση:** Οτι επιθυμώ το δημιουργώ κατασκευαστικά (δομικά) με προσθαφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις.

Παράδειγμα1: Αν  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{3 - \sqrt{x+6}} = \frac{1}{2}$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)(2 - \sqrt{x+1}) = 6$ , να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \cdot g(x)$ .

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

**40-1.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x^3 - 1)] = 5$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$ .

Λύση

1ος τρόπος:

Έστω  $h(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ ,  $x \neq 1$  και  $\phi(x) = g(x)(x^3 - 1)$ . Είναι

- $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x) = 5$
- $f(x) = h(x)(x-1)$ ,  $x \neq 1$  και  $g(x) = \frac{\phi(x)}{x^3 - 1}$ ,  $x \neq 1$

Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( h(x)(x-1) \cdot \frac{\phi(x)}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) \cdot \phi(x)}{x^2 + x + 1} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$ .

2ος τρόπος:

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x)}{x-1} (x-1) g(x) (x^3 - 1) \frac{1}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x)}{x-1} \cdot g(x) (x^3 - 1) \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ .

**40-2.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ορισμένες στο  $\mathbb{R}$ , για τις οποίες γνωρίζουμε

ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \alpha$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)(\sqrt{x+1} - 1) = \beta$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ .

Λύση

Για  $x \neq 0$  είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)}{x^2} \cdot g(x)(\sqrt{x+1} - 1) \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x+1} - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)(\sqrt{x+1} - 1)] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x+1} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x)(\sqrt{x+1} - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x+1} - 1)}{x} = \alpha \cdot \beta \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

**40-3.** Έστω ότι το  $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x)(2x^2 - 18)] = 4$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} [g(x)(\sqrt{x+1} - 2)] = 5$ . Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{f(x)}$ .

Λύση

Αν θέσουμε  $h(x) = f(x)(2x^2 - 18)$  και  $\delta(x) = g(x)(\sqrt{x+1} - 2)$  και λύσουμε ως προς  $f(x)$  και  $g(x)$

αντίστοιχα, θα έχουμε  $f(x) = \frac{h(x)}{2x^2 - 18}$  και  $g(x) = \frac{\delta(x)}{\sqrt{x+1} - 2}$  με  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 4$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} \delta(x) = 5$ . Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{\delta(x)}{\sqrt{x+1} - 2}}{\frac{h(x)}{2x^2 - 18}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x^2 - 18)\delta(x)}{(\sqrt{x+1} - 2)h(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)(x+3)\delta(x)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)h(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)(x+3)\delta(x)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)h(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x+3)\delta(x)(\sqrt{x+1} + 2)}{h(x)} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4} = 60. \end{aligned}$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

40-4. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 \mu x} = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 1} - 1)g(x) = 5$ , να βρεθούν τα όρια

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - x^4 g(x)}{f(x) + \eta \mu^2 x}.$$

40-5. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = 5$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2 - 3x + 2} = 4$ , να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$ .

40-6. Αν  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 5$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} [g(x)(x^2 - x - 6)] = 3$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x)g(x))$ .

40-7. Να βρεθεί το όριο του  $f(x) \cdot g(x)$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x} - 1} = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x-1) = 3$  και  $x \rightarrow 1$ .

40-8. Να βρεθεί το όριο του  $f(x) \cdot g(x)$ ,

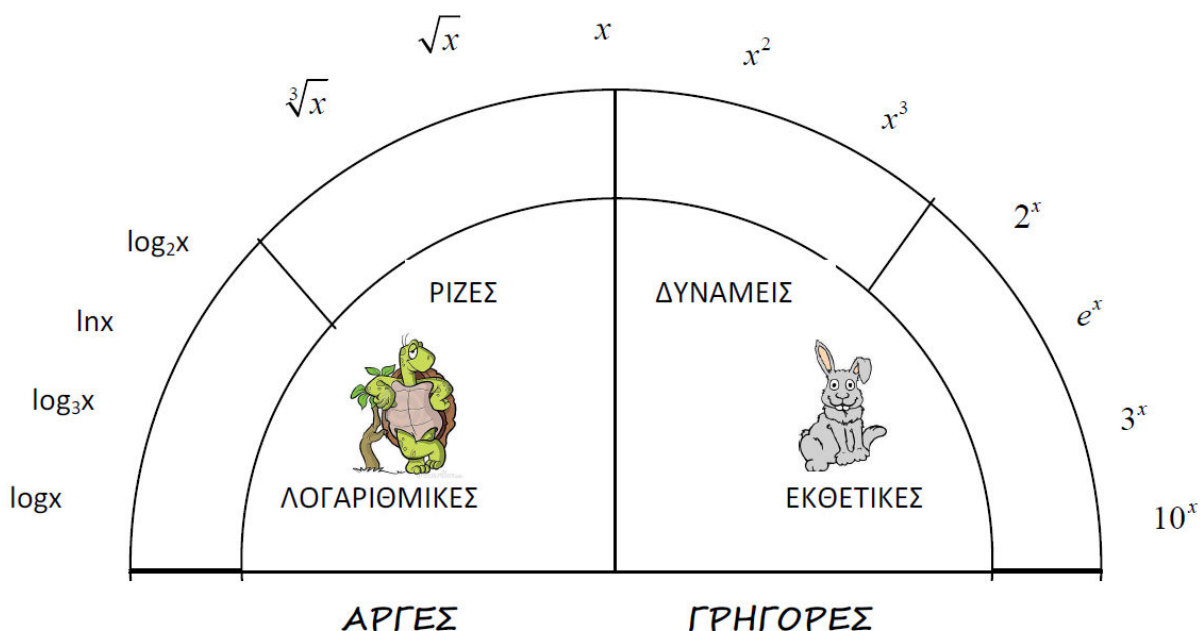
όταν  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3x-3}} = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)(\sqrt{12x+8} - \sqrt{5x-4}) = -9$  και  $x \rightarrow 4$ .

40-9. Να βρεθεί το όριο του  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{\sqrt[3]{x+5} - 2} = 4$  και  $x \rightarrow 3$ .

40-10. Να βρεθεί το όριο του  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{3 - \sqrt{x+6}} = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{2 - \sqrt{x+1}} = 2$  και  $x \rightarrow 3$ .

**Ποιες συναρτήσεις έχουν μεγαλύτερο γκάτζ;**

Οι «σχετικές ταχύτητες» με τις οποίες αυξάνονται οι βασικές συναρτήσεις φαίνονται στο παρακάτω ταχύμετρο.



Δίνεται όριο παράστασης που περιέχει την  $f$  και ζητείται όριο παράστασης που επίσης περιέχει την  $f$ .

- Βρίσκω από το δεδομένο όριο, το όριο της  $f(x)$  και στη συνέχεια απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$  στο ζητούμενο.

- Μορφοποιώ (συνήθως με προσθαφαίρεση στον αριθμητή) την παράσταση του ζητούμενου ορίου ώστε να γίνει μετασχηματισμός σε παραστάσεις με γνωστά όρια.

Παράδειγμα1: Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 5x + 6} = 5$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x - 2}$ .

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**41-1.** Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - 2}{x + 3} = 3$ , να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f^2(x) - 4}{xf(x) + 6} = -\frac{12}{7}$ .

Λύση

Θέτουμε  $\frac{f(x) - 2}{x + 3} = \phi(x)$  με  $\lim_{x \rightarrow -3} \phi(x) = 3$  και έχουμε  $f(x) = 2 + (x + 3)\phi(x)$ , ενώ  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f^2(x) - 4}{xf(x) + 6} = \frac{0}{0}$

απροσδιόριστη μορφή. Η παραπάνω απροσδιοριστία αντιμετωπίζεται ως εξής: Είναι

$$\begin{aligned} \frac{f^2(x) - 4}{xf(x) + 6} &= \frac{[2 + (x + 3)\phi(x)]^2 - 4}{x[2 + (x + 3)\phi(x)] + 6} = \frac{4 + (x + 3)^2 \phi^2(x) + 4(x + 3)\phi(x) - 4}{2x + x(x + 3)\phi(x) + 6} = \frac{(x + 3)[(x + 3)\phi^2(x) + 4\phi(x)]}{2(x + 3) + x(x + 3)\phi(x)} = \\ &= \frac{(x + 3)\phi^2(x) + 4\phi(x)}{2 + x\phi(x)}. \text{ Αρα } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f^2(x) - 4}{xf(x) + 6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)\phi^2(x) + 4\phi(x)}{2 + x\phi(x)} = -\frac{12}{7}. \end{aligned}$$

**41-2.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{3}{2}$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ .

Λύση

Αν  $\frac{f(x) - \sqrt{x}}{x - 1} = h(x)$  τότε  $f(x) = (x - 1)h(x) + \sqrt{x}$ , οπότε το όριο της  $f(x)$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 1$ .

Έτσι για το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1}$  έχουμε απροσδιοριστία  $\frac{0}{0}$ . Το κλάσμα  $\frac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1}$  γράφεται

$$\frac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{f(x)} - 1)(\sqrt{f(x)} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{f(x)} + 1)} = \frac{f(x) - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + 1} \quad (1).$$

$$\text{Επίσης } \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad (2).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε λόγω των (1) και (2) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right) \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + 1} = \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot 1 = \frac{4}{2} = 2$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**41-3.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ . Να υπολογιστούν τα όρια

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{2 - f(x)}}{\sqrt{f(x)} - 1} \text{ και ii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f^2(x) - 3f(x)| - 2}{|f(x)| - 1}.$$

**41-4.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x^2 - x + 2) = 3$ . Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{f^2(x) - 1} = 2.$$

41-5. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3f(x) + 1}}{\sqrt{f(x) + 3} - 2}$  όταν  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ .

41-6. Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 3$  να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x - 2}$ .

41-7. Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 3}{x - 2} = -1$  να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 f(x) - 12}{x - 2}$ .

## 42 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Έστω συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ .

**Βασικό γνώρισμα: Διπλή ανισότητα ή απόλυτο με ανισότητα.**

**A. Εύρεση του  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  απλός τύπος:**

- Με πράξεις μετασχηματίζω τη σχέση ώστε μεταξύ των συμβόλων  $\leq$  να υπάρχει μόνο η  $f(x)$ . (Απομονώνω την  $f(x)$  στο μεσαίο μέλος)  $A(x) \leq f(x) \leq B(x)$ .
- (Η  $f$  δεν πρέπει να υπάρχει σε καμία περίπτωση στα άλλα δύο μέλη).
- Βρίσκουμε τα όρια των  $A(x), B(x)$ . Αν αυτά είναι ίσα με  $\lambda$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ .
- Αν τα όρια είναι διαφορετικά δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει το όριο, απλά δεν εφαρμόζεται το Κ.Π. Διαλέγω άλλο τρόπο.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης  $f$  στην αντίστοιχη θέση  $x_0$ , όταν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $4x^2 + 6x - 2 \leq f(x) - 3 \leq 5x^2 + 2x + 2$ ,  $x_0 = 2$ .

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**42-1.** Αν για μια συνάρτηση  $g$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) \eta \mu x] = 0$ .

Λύση

Το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x$  δεν υπάρχει, αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \eta \mu x$ . Αντίθετα

το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \eta \mu x$  υπάρχει και προτείνουμε να κατανοηθεί η διαδικασία ως μέθοδος που θα

χρησιμοποιείται σε πλήθος άλλων όμοιων προβλημάτων.

Παρατηρούμε ότι  $|g(x) \eta \mu x| = |g(x)| |\eta \mu x| \leq |g(x)| \cdot 1$  η  $|g(x)| \leq |g(x) \eta \mu x| \leq |g(x)|$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-|g(x)|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = 0$ . Άρα με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής

έχουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) \eta \mu x] = 0$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**42-2.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , αν:

i)  $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$     ii)  $1 - x^4 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sin^2 x}$  για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**42-3.** Αν  $|f(x) - 3x + 5| \leq x^2$ , για κάθε  $x \neq 0$ . Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**698.** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα  $|f(x) - x + 2| \leq x^2 - 2x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ .

**42-4.** Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \geq f(x) + x \geq \sqrt{x^2 + 4x + 6}. \text{ Να βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

**42-5.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $(0, +\infty)$  και για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$|(2 + x^4)f(x) - 3x^4| \leq x^2 + 1, \text{ να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

**B. Εύρεση του  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  σύνθετη μορφή:**

- Απομονώνω την  $f(x)$  στο μεσαίο μέλος.
- Υπάρχει ενδεχόμενο να πάρω πλευρικά όρια (όταν διαιρέσουμε τα μέλη με  $x - x_0$  παίρνω περιπτώσεις  $x > x_0$ ,  $x < x_0$ ).
- Το κριτήριο παρεμβολής το εφαρμόζω σε κάθε πλευρικό όριο χωριστά.

Παράδειγμα2: Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης  $f$  στην αντίστοιχη θέση  $x_0$ , όταν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $7x - x^2 - 11 \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 5x + 7$ ,  $x_0 = 3$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

42-6. Δίνεται η συνάρτηση  $\sqrt{3x+3} \leq (x-2)f(x)+3 \leq 3\sqrt{x+7}-6$  για κάθε  $x \in (1,3)$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

### Γ. Εύρεση ορίων που περιέχουν την $f(x)$ .

- Κατασκευάζω στο μεσαίο μέλος την παράσταση της οποίας θέλω να υπολογίσω το όριο.
- Αν χρειαστεί παίρνω πλευρικά όρια.

Παράδειγμα3: Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f^2(x) - 6f(x) \leq x - 9$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ .

Παράδειγμα4: Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  αν για κάθε  $x > 1$  ισχύει  $\frac{x^2 + x + 1}{1 - x^2} \leq f^2(x) - 2f(x) \leq \frac{x^3 + x + 1}{1 - x^3}$ .

### ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

42-7. Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Λύση

Είναι  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (1).

i). Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 1^2 - 1 = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2 - x^2) = 3 \cdot 1 - 2 - 1^2 = 0$ .

Αρα  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 1^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2 - x^2) = 0$ .

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής από την (1) είναι και  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

ii). Για  $x = 1$  η (1) γίνεται  $0 \leq f(1) \leq 0$ , οπότε  $f(1) = 0$ . Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$ .

- Για  $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$  η (1) γίνεται  $\frac{3x - 2 - x^2}{x - 1} \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq \frac{x^2 - x}{x - 1}$  ή  $2 - x \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq x$  (2).

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x$  σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής από την (2) έχουμε ότι

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} = 1.$$

- Για  $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$  η (1) γίνεται  $\frac{3x - 2 - x^2}{x - 1} \geq \frac{f(x)}{x - 1} \geq x$  ή  $2 - x \geq \frac{f(x)}{x - 1} \geq x$  (3).

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} x$  σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής από την (3) έχουμε

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1} = 1.$$

Αφού  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$ , θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$ .

42-8. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) \leq 2\eta\mu x f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Λύση

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε

$$f^2(x) \leq 2\eta\mu x \cdot f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2\eta\mu x \cdot f(x) + \eta\mu^2 x \leq \eta\mu^2 x \Leftrightarrow (f(x) - \eta\mu x)^2 \leq \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - \eta\mu x| \leq |\eta\mu x| \Leftrightarrow -|\eta\mu x| \leq f(x) - \eta\mu x \leq |\eta\mu x| \Leftrightarrow \eta\mu x - |\eta\mu x| \leq f(x) \leq \eta\mu x + |\eta\mu x| \quad (1)$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x - |\eta\mu x|) = \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x + |\eta\mu x|) = 0$  και λόγω της (1) από το κριτήριο παρεμβολής

έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

42-9. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε  $f^2(x) + g^2(x) \leq 2xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

Λύση

Η σχέση γράφεται  $f^2(x) + g^2(x) - 2xf(x) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 + g^2(x) \leq x^2 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 + g^2(x) \leq x^2$   
για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Επειδή  $0 \leq (f(x) - x)^2 + g^2(x) \leq x^2$ , εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής και αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , θα

είναι και  $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - x)^2 + g^2(x)] = 0$ . Είναι  $0 \leq g^2(x) \leq (f(x) - x)^2 + g^2(x)$ , και

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - x)^2 + g^2(x)] = 0$  θα είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} g^2(x) = 0$ , οπότε και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

Έστω  $h(x) = (f(x) - x)^2 + g^2(x)$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ . Άρα  $(f(x) - x)^2 = h(x) - g^2(x)$

και  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g^2(x) = 0 - 0 = 0$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x) = 0$ . Αν  $f(x) - x = \phi(x)$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$ , τότε  $f(x) = x + \phi(x)$ ,

οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0 + 0 = 0$ .

**42-10.** Αν για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $4\sqrt{x} \leq f(x) \leq x + 4$ , να βρεθούν

$$(i) \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{\sqrt{x + 5} - 3}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - 64}{x - 4}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{f(x) + 1} - 3}{x - 4}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|f(x) - 5| - 3}{x^2 - 5x + 4}$$

Λύση

i). Είναι  $\lim_{x \rightarrow 4} 4\sqrt{x} = 4 \cdot 2 = 8$  και  $\lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$ . Σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8$ .

ii). Η σχέση γράφεται  $4\sqrt{x} - 8 \leq f(x) - 8 \leq x + 4 - 8$ .

• Αν  $x - 4 > 0, x > 4$ :  $\frac{4\sqrt{x} - 8}{x - 4} \leq \frac{f(x) - 8}{x - 4} \leq \frac{x - 4}{x - 4} = 1$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{4\sqrt{x} - 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} 4 \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = 1$ . Έτσι σύμφωνα με το κριτήριο

παρεμβολής θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - 8}{x - 4} = 1$ .

• Αν  $x - 4 < 0, x < 4$  με όμοιο τρόπο βρίσκουμε  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - 8}{x - 4} = 1$ .

Τελικά θα είναι  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4} = 1$ .

iii). Είναι  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{\sqrt{x + 5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4} \cdot \frac{x - 4}{\sqrt{x + 5} - 3} = 6$ , γιατί  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x + 5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(\sqrt{x + 5} + 3)}{(\sqrt{x + 5} - 3)(\sqrt{x + 5} + 3)} = 6$ .

iv). Είναι  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - 64}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4} \cdot \frac{f(x) + 8}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 8}{x + 4} = 1 \cdot \frac{16}{8} = 2$ .

v). Είναι  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{f(x) + 1} - 3}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{f(x) + 1} - 3)(\sqrt{f(x) + 1} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{f(x) + 1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x) + 1} + 3} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5} + 3} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ .

vi). Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8$  υπάρχει περιοχή του 4 όπου  $f(x) - 5 > 0$ . Έτσι έχουμε

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5 - 3}{(x - 4)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4} \cdot \frac{1}{x - 1} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

**42-11.** Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $g(x) \geq 0$ ,  $2\sqrt{g(x)} \leq f(x) \leq g(x) + 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-1}{x-1} = 2$ , να βρεθούν τα

όρια: (1):  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  (2):  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (3):  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}$ .

**42-12.** Για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $3x-x^2 \leq f(x) \leq x^2+3x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x^2+x} = 3.$$

**42-13.** Αν  $f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

**42-14.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, ώστε για κάθε  $x > 0$  να ισχύει:  $\frac{x^3+x^2+x}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+1}$ .

Να υπολογίσετε τα όρια: i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  και ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \eta \mu \frac{2}{x}$ .

**42-15.** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει:  $(x-1)f(x) + f(1-x) = x^2(1)$ .

Να βρείτε :

α. τον τύπο της συνάρτησης

β. τα όρια  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  και

γ. το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) \eta \mu \frac{3}{x} \right)$ .

**42-16.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα

$$x^2 + 2xf(x) \leq f^2(x) + \eta \mu^2 x \leq 2xf(x) + \eta \mu^2 x, x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

**42-17.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$2f(x) \eta \mu x + x^2 - 2\eta \mu^2 x \leq f^2(x) \leq x^2 + 2f(x) \eta \mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

**42-18.** Αν  $6\sqrt{x} - 6 \leq f(x) \leq x + 3$  για κάθε  $x > 0$  να βρεθούν

$$(i) \lim_{x \rightarrow 9} f(x) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x)-12}{x-9} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{f(x)}-2\sqrt{3}}{\sqrt{x}-3} \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{f(x)+4}-4}$$

**Δ: Βασικά όρια**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{x} = 0$ .

**Με απόδειξη σε ασκήσεις.**

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

**42-19.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+3}}{2x + \eta \mu x}$ .

Λύση

Για  $x \in (-\infty, 0)$  η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+3}}{2x + \eta \mu x}$  γράφεται

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+1-x^2-2x-3}{(2x+\eta \mu x)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2x+3})} = \frac{-2x-2}{x\left(2+\frac{\eta \mu x}{x}\right)(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = \\ &= \frac{1\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\eta \mu x}{x}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2+\frac{2}{x}}{\left(2+\frac{\eta \mu x}{x}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}. \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \cdot \frac{2+0}{(2+0)(1+1)} = 0.$$

**42-20.** Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{(x^4+1)(2-\eta\mu x)}.$

Λύση

Παρατηρούμε ότι  $-1 \leq -\eta\mu x \leq 1$  ή  $1 \leq 2 - \eta\mu x \leq 3$  ή  $1 \geq \frac{1}{2 - \eta\mu x} \geq \frac{1}{3}$  (1).

Είναι  $\frac{x^2+1}{x^4+1} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και από (1) έχουμε  $\frac{x^2+1}{x^4+1} \geq \frac{x^2+1}{(x^4+1)(2-\eta\mu x)} \geq \frac{x^2+1}{3x^4+3}$  (2)

με  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{3x^4+3} = 0$  και με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{(x^4+1)(2-\eta\mu x)} = 0.$$

**42-21.** Να υπολογιστούν τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 + 7\eta\mu x - 2x),$  β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \sigma\upsilon\nu x),$  γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \eta\mu 3x + \frac{x^5+4}{x-2} \right).$

Λύση

α). Δουλεύουμε στο  $(-\infty, 0)$ . Είναι  $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ , δηλαδή  $-7 \leq 7\eta\mu x \leq 7$  άρα

και  $-7 + 5x^3 - 2x \leq 5x^3 - 2x + 7\eta\mu x \leq 7 + 5x^3 - 2x$ . Ομοίως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 2x + 7) = 5 \cdot (-\infty)^3 = -\infty$ .

Άρα τελικά  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 + 7\eta\mu x - 2x) = 0$ .

β). Δουλεύουμε στο  $(0, +\infty)$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \sigma\upsilon\nu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left( 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left( 1 + \frac{2 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right).$

Ομως  $\left| \frac{2 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right| \leq \frac{|2| + |\sigma\upsilon\nu x|}{x^2} \leq \frac{2+1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$  και επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$  άρα και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) = 1$ .

Τελικά  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left( 1 + \frac{2 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) = +\infty$ .

γ). Δουλεύουμε στο  $(0, +\infty)$ . Έχουμε  $-1 \leq \eta\mu 3x \leq 1$ , δηλαδή  $-1 + \frac{x^5+4}{x-2} \leq \eta\mu 3x + \frac{x^5+4}{x-2} \leq 1 + \frac{x^5+4}{x-2}$ ,

δηλαδή  $\frac{-x+2+x^5+4}{x-2} \leq \eta\mu 3x + \frac{x^5+4}{x-2} \leq \frac{x-2+x^5+4}{x-2}$ . Ομοίως  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5+6-x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ , άρα

και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \eta\mu 3x + \frac{x^5+4}{x-2} \right) = +\infty$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**42-22.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} + 4, & x < 0 \\ \frac{x^3 - 5x^2 + 2}{5x^2 + 1}, & x \geq 0 \end{cases}$ . Να βρεθούν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**42-23.** Να βρεθούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \eta\mu x)$ .

**42-24.** Να βρεθούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$ .

**42-25.** Να βρεθούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \eta\mu \frac{\pi}{x} \right)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^v \eta\mu \frac{\pi}{x} \right), v \in \mathbb{N}^*$ .

**43 ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΕΠΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ (ΟΡΙΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ)**

- Διαπιστώνω ότι έχω γινόμενο δύο συναρτήσεων εκ των οποίων η μία έχει όριο 0 και η άλλη είναι φραγμένη.
- Ξεκινάω από την ανισότητα της φραγμένης και πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της με την απόλυτη τιμή της συνάρτησης που τείνει στο 0.
- Εφαρμόζω την ιδιότητα των απολύτων για να δημιουργήσω διπλή ανισότητα και εφαρμόζω Κ. Π.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα η ύπαρξη ορίων ημ  $\frac{1}{x}$ , συν  $\frac{1}{x}$ , ημ  $\frac{1}{g(x)}$ , κ.λπ.

Παράδειγμα1: Υπολόγισε το  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{2}{x}$ .

**ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

**43-1.** Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$ .

Λύση

Πεδίο ορισμού:  $\mathbb{R}^*$

Έχουμε  $\left| x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x^2| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| = x^2$ . Όμως  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , άρα από γνωστή πρόταση

και  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$ .

**43-2.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$ .

Λύση

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$  και η συνάρτηση  $\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$  φραγμένη.

Έχουμε για κάθε  $x \neq 0$   $\left| \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right| = |\eta\mu x| \cdot \left| \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right| \leq |\eta\mu x| \cdot 1 = |\eta\mu x|$ .

Άρα  $-|\eta\mu x| \leq \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \leq |\eta\mu x|$  (1).

Σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής από τη σχέση (1) είναι και  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

**43-3.** Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} = 0$ , όπου  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**43-4.** Να αποδείξετε ότι i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^5 \eta\mu \frac{2}{x} \right) = 0$  ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 + x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) = 0$ .

**43-5.** Να αποδείξετε ότι i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 \eta\mu \frac{2}{x} \right) = 0$  ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^4 \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right) = 0$ .

**43-6.** Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{\pi}{x} \right) = 0$ .

**43-7.** Να βρεθούν τα όρια i.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left[ (x^2 - 9)^4 \cdot \eta\mu \frac{1}{2x-6} \right]$  ii.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left[ 5x^2 - (x^2 - 9)^4 \cdot \eta\mu \frac{1}{2x-6} - 2 \right]$ .

## 44 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Αν  $f(x) \leq g(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

Αν  $f(x) \leq g(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

Εφαρμόζεται το κριτήριο παρεμβολής.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  αν  $g(x) \geq \frac{1}{x^2}$

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

44-1. Αν ισχύει  $f(x)x^4 \leq \sin x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να υπολογιστεί το

όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{f^2(x) - 2f(x) + 3} + f(x) \right)$ .

Λύση

Από  $f(x)x^4 \leq \sin x - 1 \Leftrightarrow_{x \neq 0} f(x) \leq \frac{\sin x - 1}{x^4} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{-2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{x^4}$  και

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} \right) = -\infty \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

Έτσι το ζητούμενο όριο είναι της απροσδιόριστης μορφής  $(+\infty) + (-\infty)$ , οπότε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με συζυγή παράσταση έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \sqrt{f^2(x) - 2f(x) + 3} + f(x) \right) \left( \sqrt{f^2(x) - 2f(x) + 3} - f(x) \right)}{\sqrt{f^2(x) - 2f(x) + 3} - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 2f(x) + 3 - f^2(x)}{\sqrt{f^2(x) \left( 1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{3}{f^2(x)} \right)} - f(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2f(x) + 3}{|f(x)| \sqrt{1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{3}{f^2(x)}} - f(x)} = \left( \text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ θα είναι } f(x) < 0 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2f(x) + 3}{-f(x) \sqrt{1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{3}{f^2(x)}} - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) \left( 2 - \frac{3}{f(x)} \right)}{-f(x) \left( \sqrt{1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{3}{f^2(x)}} + 1 \right)} = \frac{2 - 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1} = 1. \end{aligned}$$

44-2. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $g(x) > 0$  και  $f(x)g(x) \geq x^2 + x + 1$  ναδειχθεί

ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

Λύση

Από τη σχέση  $f(x)g(x) \geq x^2 + x + 1$ , έχουμε  $\frac{x^2 + x + 1}{g(x)} \leq f(x)$  (1). Είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x + 1) = x_0^2 + x_0 + 1 > 0$ ,

[κάθε παράσταση της μορφής  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$  είναι μη αρνητική, στην περίπτωσή μας  $\alpha = x_0$  και  $\beta = 1$ ]

και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  με  $g(x) > 0$ . Έτσι σύμφωνα με γνωστό θεώρημα

«Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 > 0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  με  $g(x) > 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ » θα είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + x + 1}{g(x)} = +\infty$ , οπότε

λόγω της σχέσης (1) θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

**44-3.** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι περιττή. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ , να αποδειχθεί ότι

i.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  ii. το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  δεν υπάρχει.

**44-4.** Να υπολογίσετε εφόσον υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\eta\mu^4 x}$ .

**44-5.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x - 3}{x - 3}, & x < 3 \\ \frac{(\alpha^2 - 1)x + 8\alpha}{3x - x^2}, & x > 3 \end{cases}$ . Να προσδιορίσετε τις πραγματικές τιμές του  $\alpha$

για τις οποίες ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ .

**44-6.** Αν  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ , να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2f(x) + 3g(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$ .

**44-7.** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τη σχέση

$3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5$ . Να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f(x)}$ .

**44-8.** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα  $f(x)f(y) = yf(x) + xf(y) - xy$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ .

# 45 ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ: ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Επειδή ακολουθία  $\alpha_v$  είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{N}$  για να βρω το  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \alpha_v$  βρίσκω το όριο της συνάρτησης  $f(x) = \alpha_x$ , δηλαδή  $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , άρα ισχύουν όλες οι προηγούμενες μέθοδοι και στα όρια των ακολουθιών.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας  $(\alpha_v)$   $\alpha_v = \frac{v^2+1}{v-1} - \frac{v^2-2}{v+1}$ .

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

45-1. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας  $\alpha_v = \frac{\sqrt[3]{8v^3+1}-v}{\sqrt{4v^2+1}-v}$ .

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_v = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+1}-x}{\sqrt{4x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left[ \sqrt[3]{8+\frac{1}{x^3}}-1 \right]}{x \left[ \sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1 \right]} = 1.$$

45-2. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας  $\alpha_v = 2\sqrt{v^2+1}-\sqrt{4v^2-v}$ .

Λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_v &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2-x})-(2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2-x})}{2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2-x}-2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( 1+\frac{4}{x} \right)}{x \left[ 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{x}} \right]} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

45-3. Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών: i.  $\alpha_v = \frac{5v^4-3v+1}{v^3-5v-2v^4}$  ii.  $\beta_v = \sqrt{25v^2-10v+3}-5v$ .

45-4. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας  $\alpha_v = 2v-4-\sqrt{4v^2-4v+2}$ .

45-5. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας  $\alpha_v = \frac{4 \cdot 3^{v+2} + 5 \cdot 2^{v+1}}{2 \cdot 3^{v+1} - 3 \cdot 2^v}$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΟΡΙΑ**

Αν έχετε φτάσει σε αυτό το σημείο και έχετε λύσει όλες τις παραπάνω ασκήσεις μελετήστε τις επόμενες για ανακεφαλαίωση και κατόπιν προσπαθήστε να λύσετε το κριτήριο που ακολουθεί.

1) Έστω  $f(x) = \frac{|2x^3 - 4x + 1974| - \lambda x}{x^3 - 2015}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

Λύση

Παρατηρούμε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x + 1974) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$ . Κατά συνέπεια θα υπάρχει  $\kappa \in \mathbb{R}$  τ.ω για κάθε  $x \in (-\infty, \kappa)$  να ισχύει  $2x^3 - 4x + 1974 < 0$

Άρα για κάθε  $x \in (-\infty, \kappa)$  έχουμε  $|2x^3 - 4x + 1974| = -2x^3 + 4x - 1974$ .

Έτσι ο τύπος της  $f$  γράφεται

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 4x - 1974 - \lambda x}{x^3 - 2015} = \frac{-2x^3 + (4 - \lambda)x - 1974}{x^3 - 2015}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + (4 - \lambda)x - 1974}{x^3 - 2015} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$$

2i) Με την βοήθεια της ανισότητας  $\ln x \leq x - 1$  για κάθε  $x > 0$ . Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

ii) Με την βοήθεια της ανισότητας  $e^x \geq x + 1$  για κάθε  $x > 0$ . Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Λύση

i) Η ανισότητα  $\ln x \leq x - 1$  ισχύει για κάθε  $x > 0$  άρα θα ισχύει αν θέσουμε όπου  $x$  το  $\frac{1}{x}$ , έτσι:

$$\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \ln x^{-1} \leq \frac{1 - x}{x} \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1 - x}{x} \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x - 1}{x}$$

Άρα θα ισχύει:

$$\frac{x - 1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \quad (1)$$

Όταν  $x > 1$  η (1) γίνεται:  $\frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x - 1} \leq 1 \quad (2)$

Όταν  $0 < x < 1$  η (1) γίνεται:  $\frac{1}{x} \geq \frac{\ln x}{x - 1} \geq 1 \quad (3)$

Από (2), (3) επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$  προκύπτει:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$

ii) Ανάλογα με το (i) (Μεταξύ μας, αυτό σε πάσης φύσεως μαθηματικές σημειώσεις σημαίνει βαριέμαι να την γράψω... ☺)

3) Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα

$$f(x)f(y) + xy = xf(y) + yf(x), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

ii) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$

Λύση

i) Η ισότητα  $f(x)f(y) + xy = xf(y) + yf(x)$  ισχύει για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  άρα θα ισχύει ακόμα και αν βάλουμε όπου  $y$  το  $x$ , έτσι:

$$f(x)f(x) + x^2 = xf(x) + xf(x) \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)^2 = 0 \Rightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$$

Η  $f(x)=x$  ικανοποιεί την υπόθεση οπότε είναι η ζητούμενη συνάρτηση .

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

#### 4)( Oldies but goodies)

**i) Αν κοντά στο  $x_0$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  και  $g(x) \geq 0$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$  ,να αποδείξετε ότι**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

**ii) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + g^2(x)) = 0$  να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$**

**iii) Αν  $f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) + 5 \leq \sqrt{|x|}$  , να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και το  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  .**

Λύση

i) Κοντά κοντά στο  $x_0$  θα ισχύει:  $0 \leq f(x) \leq f(x) + g(x)$  και επειδή είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$  , από το

κριτήριο παρεμβολής θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  .Ομοίως προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  .

ii) Προφανώς ισχύει  $f^2(x) \leq f^2(x) + g^2(x) \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} \leq \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} \Leftrightarrow |f(x)| \leq \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} \Leftrightarrow$

$-(\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}) \leq f(x) \leq \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$  και εφόσον  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = 0$  από το κριτήριο παρεμβολής

θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  .Ομοίως προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  .

iii) Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) + 5 \leq \sqrt{|x|} \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + 1 - 1 + g^2(x) - 4g(x) + 4 - 4 + 5 \leq \sqrt{|x|} \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) + 2f(x) + 1) - 1 + (g^2(x) - 4g(x) + 4) - 4 + 5 \leq \sqrt{|x|} \Leftrightarrow (f(x) + 1)^2 + (g(x) - 2)^2 \leq \sqrt{|x|}$$

$$\text{Τελικά } 0 \leq (f(x) + 1)^2 + (g(x) - 2)^2 \leq \sqrt{|x|} , \text{ ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$$

από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} ((f(x) + 1)^2 + (g(x) - 2)^2) = 0$  .

Από το ερώτημα (ii) θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - 2) = 0 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 .$$

$$\text{5) Να βρεθεί το όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$$

Λύση

Θέτουμε  $\sqrt[15]{x} = u$  άρα  $x = u^{15}$  με  $15 = \text{E.K.Π}(3,5)$

Έτσι το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{u^{15}} + \sqrt[3]{u^{15}}}{\sqrt[3]{u^{15}} + \sqrt[5]{u^{15}}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{u^{15} + u^{15}}}{\sqrt[3]{u^{15} + u^{15}}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{u^5(u^{10} + 1)}}{\sqrt[3]{u^3(u^{12} + 1)}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \sqrt[5]{u^{10} + 1}}{u \sqrt[3]{u^{12} + 1}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{u^{10} + 1}}{\sqrt[3]{u^{12} + 1}} = 1$$

6) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με:

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \alpha x + \beta$$

i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των  $f, g$ .

ii) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  έτσι, ώστε:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 5$$

Λύση

i) Για την  $f$  αρκεί  $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

Όσο για την  $g$  πρέπει:  $x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_g = \mathbb{R}$

$$\text{ii) } \alpha) f(x) = \frac{\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta}{x^2 - 4x + 3} \Leftrightarrow f(x)(x^2 - 4x + 3) = \alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta \quad (1)$$

Παίρνουμε όρια .

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)(x^2 - 4x + 3)) = \lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x)) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta)$$

$$2 \cdot 0 = \alpha - (\beta + 3) + 2\alpha + \beta \Leftrightarrow 0 = 3\alpha - 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta}{x^2 - 4x + 3} \xrightarrow{\alpha=1} f(x) = \frac{x^2 - (\beta + 3)x + 2 + \beta}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (\beta + 3)x + 2 + \beta}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (\beta + 3)x + 2 + \beta}{(x-1)(x-3)} \quad (1)$$

Παραγοντοποιούμε το τριώνυμο  $x^2 - (\beta + 3)x + 2 + \beta$

$$\Delta = (\beta + 3)^2 - 4(2 + \beta) = \beta^2 + 6\beta + 9 - 8 - 4\beta = \beta^2 + 2\beta + 1 = (\beta + 1)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{\beta + 3 \pm \sqrt{(\beta + 1)^2}}{2} = \begin{cases} \frac{\beta + 3 + \sqrt{(\beta + 1)^2}}{2} \\ \frac{\beta + 3 - \sqrt{(\beta + 1)^2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\beta + 3 + (\beta + 1)}{2} = \beta + 2 \\ \frac{\beta + 3 - (\beta + 1)}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } x^2 - (\beta + 3)x + 2 + \beta = (x-1)(x-\beta-2)$$

$$(1): \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (\beta + 3)x + 2 + \beta}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-\beta-2)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-\beta-2)}{(x-3)} = \frac{-1-\beta}{-2}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3-\beta}{-2} = 2 \Leftrightarrow -1-\beta = -4 \Leftrightarrow \beta = 3$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \alpha x + \beta \right) \stackrel{\alpha=3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} \right)} - \alpha x + \beta \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x}} - \alpha x + \beta \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x}} - x + \beta \right) \stackrel{x \rightarrow +\infty \text{ άρα τελικά } |x|=x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x}} - x + \beta \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x}} - \alpha + \frac{\beta}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x}} - \alpha + \frac{\beta}{x} \right) = (+\infty) \cdot (1 - \alpha)$$

$$\text{Αν } 1 - \alpha > 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{Αν } 1 - \alpha < 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Επειδή όμως  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 5$  οι παραπάνω τιμές απορρίπτονται.

$$\text{Αν } 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ τότε:}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x + \beta) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x - \beta))(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x - \beta))}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x - \beta)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - (x - \beta)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x - \beta)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - (x^2 - 2x\beta + \beta^2)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x - \beta)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2 + 2x\beta - \beta^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x - \beta)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3 + 2x\beta - \beta^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x - \beta)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + 2\beta)x + 3 - \beta^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x - \beta)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \beta)x + 3 - \beta^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x - \beta)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( (2 + \beta) + \frac{3}{x} - \frac{\beta^2}{x} \right)}{x \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \left( 1 - \frac{\beta}{x} \right) \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( (2 + \beta) + \frac{3}{x} - \frac{\beta^2}{x} \right)}{\left( \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \left( 1 - \frac{\beta}{x} \right) \right)} = \\
&= \frac{(2 + 2\beta) + 0 - 0}{(\sqrt{1 + 0 + 0} + (1 + 0))} = \frac{2 + 2\beta}{2}
\end{aligned}$$

Όμως ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 5 \Leftrightarrow 5 = \frac{2 + \beta}{2} \Leftrightarrow 8 = 2 + 2\beta \Leftrightarrow \beta = 4$

7) Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)]$

Λύση

Θέτουμε  $\sqrt{x^2 + 1} - x = u$  και παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} [\ln(u)] = -\infty$

8) i) Να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}} = 100$

ii) Να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+100)}{(x+101)^{100}} = 1$

Λύση

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^{10} + \left(x\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)^{10} + \dots + \left(x\left(1 + \frac{100}{x}\right)\right)^{10}}{x^{10} \left(1 + \frac{10^{10}}{x^{10}}\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10} + \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{10} + \dots + \left(1 + \frac{100}{x}\right)^{10} \right)}{x^{10} \left(1 + \frac{10^{10}}{x^{10}}\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10} + \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{10} + \dots + \left(1 + \frac{100}{x}\right)^{10} \right)}{\left(1 + \left(\frac{10}{x}\right)^{10}\right)} = \frac{\left( (1+0)^{10} + (1+0)^{10} + \dots + (1+0)^{10} \right)}{(1+0)} = 100$$

i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+100)}{(x+101)^{100}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})x(1+\frac{2}{x})\dots x(1+\frac{100}{x})}{\left(x(1+\frac{101}{x})\right)^{100}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})\dots(1+\frac{100}{x})}{\left(x(1+\frac{101}{x})\right)^{100}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})\dots(1+\frac{100}{x})}{\left(x(1+\frac{101}{x})\right)^{100}} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})\dots(1+\frac{100}{x})}{x^{100}\left(1+\frac{101}{x}\right)^{100}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})\dots(1+\frac{100}{x})}{\left(1+\frac{101}{x}\right)^{100}} = \frac{(1+0)(1+0)\dots(1+0)}{(1+0)^{100}} = 1 \end{aligned}$$

9) Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{x} = 2$

i) να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

ii) να υπολογίσετε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \lambda x \eta \mu x}{x^2 \eta \mu x + f^2(x)} = 5$

iii) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x) + x}{x + \eta \mu x}$

Λύση

i) Θέτουμε  $g(x) = \frac{f(x)-x}{x}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$  και  $f(x) = xg(x) + x$ , οπότε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + x) = 0 \cdot 2 + 0 = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(g(x) + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) + 1) = 3$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \lambda x \eta \mu x}{x^2 \eta \mu x + f^2(x)} \stackrel{x^2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xf(x) + \lambda x \eta \mu x}{x^2}}{\frac{x^2 \eta \mu x + f^2(x)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xf(x)}{x^2} + \frac{\lambda x \eta \mu x}{x^2}}{\frac{x^2 \eta \mu x}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + \lambda \frac{\eta \mu x}{x}}{\eta \mu x + \frac{f^2(x)}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + \lambda \frac{\eta \mu x}{x}}{\eta \mu x + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} = \frac{3 + \lambda}{0 + 9}. \text{ Έτσι, } \frac{3 + \lambda}{0 + 9} = 5 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 42$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x) + x}{x + \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(\eta \mu x) + x}{x}}{\frac{x + \eta \mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(\eta \mu x)}{x} + 1}{1 + \frac{\eta \mu x}{x}} \stackrel{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(\eta \mu x)}{\eta \mu x} + 1}{1 + \frac{\eta \mu x}{x}}$$

Για το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}$  θέτουμε  $\eta\mu x = u$  και όταν  $x \rightarrow 0$  τότε  $u \rightarrow 0$  οπότε το προηγούμενο όριο

$$\text{γίνεται } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 3. \text{ Τελικά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) + x}{x + \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} + 1}{1 + \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\frac{3}{1} + 1}{1 + 1} = 2$$

10) Έστω η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε,

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i)  $0 < f(x) < x$ , για κάθε  $x > 0$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

iv) αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Λύση

i) Ισχύει  $f^3(x) + f(x) = x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = x$  για κάθε  $x > 0$

Δηλαδή  $f(x) = \frac{x}{f^2(x) + 1}$  για κάθε  $x > 0$

Όμως  $0 < \frac{x}{f^2(x) + 1} < x$  για κάθε  $x > 0$

ii) ισχύει  $0 < f(x) < x$  για κάθε  $x > 0$  οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έπεται:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο 0 άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

iv) ▪ Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  τότε από την δοθείσα σχέση προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (f(x))^3 + f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x$  που είναι

αδύνατον διότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (f(x))^3 + f(x) \right] = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

▪ Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$  τότε από την δοθείσα σχέση προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (f(x))^3 + f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x$  που είναι

αδύνατον διότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (f(x))^3 + f(x) \right] = L^3 + L$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

11) Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι περιττή και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x^2 + 5}{\sqrt{x^3 + 1} - 3} = 4$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = \frac{f(x) - 3x^2 + 5}{\sqrt{x^3 + 1} - 3}$  (1) οπότε  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$  (2)

Λύνουμε την (1) ως προς  $f(x)$ :

$$g(x) = \frac{f(x) - 3x^2 + 5}{\sqrt{x^3 + 1} - 3} \Leftrightarrow g(x) (\sqrt{x^3 + 1} - 3) = f(x) - 3x^2 + 5 \Leftrightarrow g(x) (\sqrt{x^3 + 1} - 3) + 3x^2 - 5 = f(x) \quad (3)$$

Επειδή η  $f$  είναι περιττή ισχύει:  $f(-x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-f(-x)) = \lim_{x \rightarrow 2} (-f(-x)) = -\lim_{x \rightarrow 2} (f(-x))$$

Θέτουμε όπου  $-x = u$  όταν  $x \rightarrow -2$  το  $u \rightarrow 2$  άρα

$$\lim_{x \rightarrow -2} (f(-x)) = -\lim_{u \rightarrow 2} f(u) = -\lim_{u \rightarrow 2} (g(u)(\sqrt{u^3 + 1} - 3) + 3u^2 - 5) = -\lim_{u \rightarrow 2} g(u) \cdot \lim_{u \rightarrow 2} (\sqrt{u^3 + 1} - 3) =$$

$$-\lim_{u \rightarrow 2} g(u) \cdot \lim_{u \rightarrow 2} (\sqrt{u^3 + 1} - 3) - \lim_{u \rightarrow 2} (3u^2 - 5) = -4 \cdot \lim_{u \rightarrow 2} (\sqrt{2^3 + 1} - 3) - \lim_{u \rightarrow 2} (3 \cdot 2^2 - 5) = \dots = -7$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -7$$

**Bonus συναφή μεξεδάκια θεωρίας. Για να χρησιμοποιηθούν θέλουν απόδειξη)**

**I) Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  περιττή και  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$  να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = -L$**

**II) Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  άρτια και  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$  να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = L$**

Λύση

i) Η  $f$  περιττή στο  $\mathbb{R}$  άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε  $-x \in \mathbb{R}$  και επίσης  $f(-x) = -f(x)$  (1)

$$\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\alpha} -f(-x) = -\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(-x) = -\lim_{u \rightarrow \alpha} f(u) = -L$$

ii) Η  $f$  άρτια στο  $\mathbb{R}$  άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε  $-x \in \mathbb{R}$  και επίσης  $f(-x) = f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\alpha} f(-x) \stackrel{-x=u}{=} \lim_{u \rightarrow \alpha} f(u) = L$$

**12)( επανάληψη στα τριγωνομετρικά όρια με ολίγη από..1974)**

**Να βρεθούν τα όρια**

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1974}{\chi\eta\mu x}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(1974x) \eta\mu(1975x)}{x^2}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1974x^{v+2} \left( \frac{\eta\mu(2x)}{2x} \right)^2 \right], v \in \mathbb{Z}^*$

iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

v)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1974x^2 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2 - \sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

i) Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1974) = 1974$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (\chi\eta\mu x) = 0$

Αναζητούμε το πρόσημο του παρανομαστή κοντά στο 0.

• Αν  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τότε  $x > 0$ ,  $\eta\mu x > 0$  άρα  $\chi\eta\mu x > 0$

• Αν  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  τότε  $x < 0$ ,  $\eta\mu x < 0$  άρα  $\chi\eta\mu x > 0$

Δηλαδή  $\chi\eta\mu x > 0$  ,για κάθε  $x$  κοντά στο 0.

Εφόσον  $\lim_{x \rightarrow 0} (\chi\eta\mu x) = 0$  με  $\chi\eta\mu x > 0$  για κάθε  $x$  κοντά στο 0 είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\chi\eta\mu x} \right) = +\infty$

Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1974}{\chi\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x^2 + x + 1974) \frac{1}{\chi\eta\mu x} \right] = \dots = (+\infty) \cdot 1974 = +\infty$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(1974x) \eta\mu(1975x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta\mu(1974x)}{x} \cdot \frac{\eta\mu(1975x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1974 \frac{\eta\mu(1974x)}{1974x} \cdot 1975 \frac{\eta\mu(1975x)}{1975x} \right] =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1974 \frac{\eta\mu(1974x)}{1974x} \right] \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1975 \frac{\eta\mu(1975x)}{1975x} \right] \stackrel{u \rightarrow 1974x}{y \rightarrow 1975x} = 1974 \lim_{u \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta\mu(u)}{u} \right] 1975 \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta\mu(y)}{y} \right] = 1974 \cdot 1 \cdot 1975 \cdot 1 = 1974 \cdot 1975$$

iii) Διακρίνουμε περιπτώσεις για το  $v$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1974x^{v+2} \left( \frac{\eta\mu(2x)}{2x} \right)^2 \right] = \begin{cases} v = -2, & 1974 \\ v > -2, & 0 \\ v < -2, & \begin{cases} v \text{ αρτιος, } +\infty \\ v \text{ περιττος, δεν υπαρχει το οριο} \end{cases} \end{cases}$$

iv) Θα εργαστούμε με το κριτήριο παρεμβολής.

Για κάθε  $x < 0$  έχουμε διαδοχικά

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad (1)$$

Ομως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  οπότε από το κριτήριο παρεμβολής από την σχέση (1) προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

$$v) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1974x^2 + \sin x}{x^2 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1974x^2 + \sin x}{x^2}}{\frac{x^2 - \sin x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1974 + \frac{\sin x}{x^2}}{1 - \frac{\sin x}{x^2}} \stackrel{vi}{=} \frac{1974 + 0}{1 - 0} = 1974$$

13) Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι 1-1 τέτοια ώστε

$$f(x) \leq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(x) \leq e^x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

$$i) f^{-1}(x) \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0)$$

$$iii) f(0) = 0$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$

$$v) \text{ αν επιπλέον ισχύει η σχέση } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = L \in \mathbb{R} \text{ τότε } L = 1.$$

Λύση

i) Η 1-1 άρα  $f^{-1}$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}$  άρα  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  έχουμε

$f(x) \leq x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και θέτοντας όπου  $x$  το  $f^{-1}(x)$  λαμβάνουμε:

$$f(f^{-1}(x)) \leq f^{-1}(x) \Leftrightarrow x \leq f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x \in f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ δηλαδή}$$

$$f^{-1}(x) \geq x$$

ii)  $x \leq f^{-1}(x) \leq e^x - 1$  (1) ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα θα ισχύει και για  $x = 0$ , έτσι

$$0 \leq f^{-1}(0) \leq e^0 - 1 \Leftrightarrow 0 \leq f^{-1}(0) \leq 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$$

Επίσης από το κριτήριο παρεμβολής στην (1) προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = 0$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0)$$

iii) Ισχύει  $f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f(f^{-1}(0)) = f(0) \Rightarrow 0 = f(0)$

iv) Έχουμε  $x \leq f^{-1}(x) \leq e^x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1) = +\infty$

v) Έχουμε  $f(x) \leq x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

• Άρα,  $\frac{f(x)}{\eta\mu x} \leq \frac{x}{\eta\mu x}$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  και συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\eta\mu x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\eta\mu x} \text{ δηλαδή } L \leq 1 \quad (2)$$

$L \geq 1$  Όμοια,  $\frac{f(x)}{\eta\mu x} \geq \frac{x}{\eta\mu x}$  για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  και συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{\eta\mu x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\eta\mu x} \text{ δηλαδή } L \geq 1 \quad (3)$$

Από (2), (3) έπεται ότι  $L = 1$ .

**14) Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta}$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (άσκηση ωδή στις διάκριση περιπτώσεων ☺)**

Λύση

Υπολογίζουμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta) = \sqrt{\beta^2} - \beta = |\beta| - \beta \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha) = \sqrt{\alpha^2} - \alpha = |\alpha| - \alpha$$

Για λόγους συμβολισμού θέτουμε  $g(x) = \sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta$  και  $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha$  έτσι το πεδίο ορισμού της

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ είναι το } \mathbb{R}^*$$

Το όριο του παρανομαστή είναι:  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = |\beta| - \beta$  με  $|\beta| - \beta \neq 0$  αν  $\beta < 0$  ενώ  $|\beta| - \beta = 0$  αν  $\beta \geq 0$ . Έτσι θα

διακρίνουμε περιπτώσεις :

1η περίπτωση Έστω  $\beta < 0$  τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = |\beta| - \beta = -2\beta > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} = \frac{|\alpha| - \alpha}{-2\beta}$$

$$\underline{2η περίπτωση} \text{ Έστω } \beta = 0 \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{|x|}$$

i. Αν  $\alpha < 0$ , τότε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha = |\alpha| - \alpha = -\alpha - \alpha = -2\alpha > 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  με  $|x| > 0$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$\text{ii. Αν } \alpha = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{|x|} = 1$$

$$\text{iii. Αν } \alpha > 0, \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha = |\alpha| - \alpha = \alpha - \alpha = 0 \text{ αρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ (απροσδιοριστία)}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha)(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)}{|x|(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \alpha^2 - \alpha^2}{|x|(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{|x|(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} = \frac{0}{2\alpha} = 0 \end{aligned}$$

3η περίπτωση

Έστω  $\beta > 0$  τότε:  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = |\beta| - \beta = 0$

i. Αν  $\alpha < 0$ , τότε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha = |\alpha| - \alpha = -\alpha - \alpha = -2\alpha > 0$

Έτσι  $x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + \beta^2 > \beta^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + \beta^2} > \beta \Rightarrow g(x) > \beta$  άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

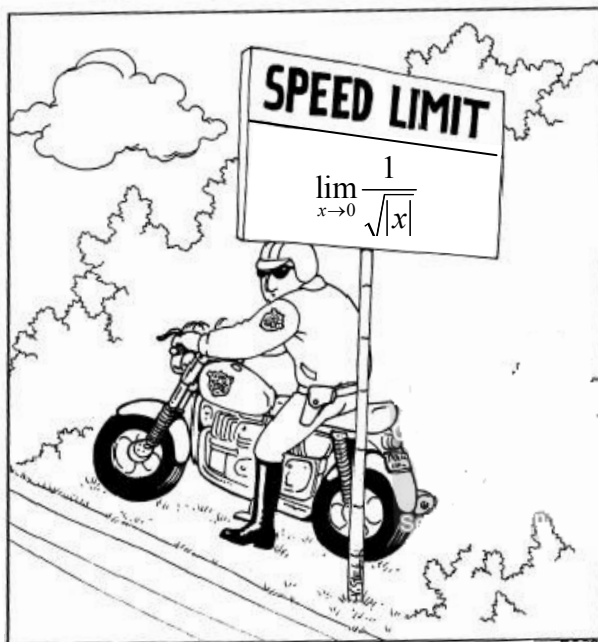
$$\text{ii. Αν } \alpha = 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)}{(\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta)(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)}{x^2 + \beta^2 - \beta^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)}{|x|^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)}{|x|} = +\infty$$

$$\text{iii. Αν } \alpha > 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ (απροσδιοριστία)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha)(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)}{(\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta)(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \alpha^2 - \alpha^2)(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)}{(x^2 + \beta^2 - \beta^2)(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)}{x^2(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta)}{(\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha)} = \frac{2\beta}{2\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$



MINI ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

Θέμα Α

**A1.** Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής για τις συναρτήσεις  $f, g, h$  αν

ισχύει  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$

**A2.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λανθασμένη.

1. Αν η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  τότε τα πλευρικά όρια της  $f$  στο  $x_0$  είναι πάντοτε ίσα. Σ Λ

2. Αν  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ . Σ Λ

3. Αν ισχύει  $\alpha > 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$ . Σ Λ

4. Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)$  τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Σ Λ

5. Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$  Σ Λ

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2}{x} = 2$ .

α) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x + \eta \mu x}{\sqrt{x+1} - 1}$ .

γ) Να βρείτε το πραγματικό αριθμό  $\lambda$  έτσι ώστε να ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - x^3}{\lambda x^2 + f^2(x)} = 2$ .

Θέμα Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  όπου ισχύει

$x f(x) \leq \eta \mu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον  $y' y$ .

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \in [0, 1] \\ \alpha \frac{\eta \mu(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, 4] \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε να υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Θέμα Δ

Δ1. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1} \right)^x$ ,  $0 < \alpha \neq 2$

Δ2. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  και  $L \in \mathbb{R}$ . Αν  $|g(x) - L| \leq |x - x_0|$  κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  και

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$ , να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Δ3. Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το όριο στο  $-\infty$  της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5} + \lambda x$$