

Όριο Συνάρτησης-Μεθοδολογία

Ορισμός

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν οι τιμές της $f(x)$ βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στον πραγματικό αριθμό l , καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν αρκετά κοντά στο x_0 (αλλά δεν γίνεται απαραίτητα ίσο με το x_0), τότε λέμε ότι η συνάρτηση έχει όριο τον πραγματικό αριθμό l όταν το x τείνει στο x_0 . Συμβολίζουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

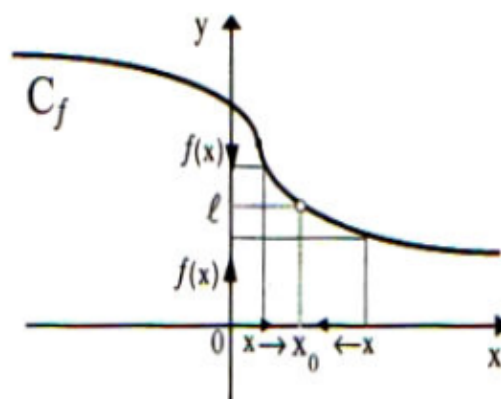
Αν ορίζεται το όριο της $f(x)$ στο x_0 , τότε αυτό είναι μοναδικό.

1

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Το όριο μέσα από γραφική παράσταση

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Δεν γνωρίζουμε τον τύπο της, ωστόσο παρατηρούμε ότι δεν ορίζεται για $x = x_0$, αφού υπάρχει κενό εκεί που περιμέναμε το αντίστοιχο σημείο της γραφικής της παράστασης. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε μεταβλητό αριθμό x , τον οποίο θα μεταφέρουμε πολύ κοντά στο x_0 και θα μελετήσουμε την αντίστοιχη κίνηση των $f(x)$. Από το σχήμα είναι φανερό ότι, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 , οι τιμές $f(x)$ προσεγγίζουν τον αριθμό l .



Αρα, αν δοθεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ζητείται το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, κάνω τα εξής:

1). Παρατηρώ σε ποιο σημείο πλησιάζουν οι τιμές της f καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν εκατέρωθεν (αν είναι δυνατόν) το x_0 .

2). Η τεταγμένη y_0 αυτού του σημείου είναι το όριο της $f(x)$ και η τετμημένη η θέση $x_0, y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

- Πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$.

Στις θέσεις x_0 , όπου οι καμπύλες δεν «συναντώνται» έχουμε μόνο πλευρικά όρια (μεταξύ τους άνισα) με την προϋπόθεση ότι εκατέρωθεν του x_0 ορίζεται η συνάρτηση.

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΩΝ

1. Ιδιότητες

Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 τότε:

- 1). $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 2). $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 3). $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 4). $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- 5). $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
- 6). $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0
- 7). $\lim_{x \rightarrow x_0} f^v(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v, v \in \mathbb{N}^*$

Προσοχή: Μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ και να μην υπάρχουν τα όρια των f, g στο x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} C = C, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

Αν $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$, τότε λ μοναδικό.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - \lambda| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda.$$

Τι μας λένε τα θεωρήματα (1) έως (7): Ουσιαστικά μας δίνουν ένα τρόπο υπολογισμού ορίων συναρτήσεων με περίπλοκους τύπους. Συγκεκριμένα, όταν ένα όριο αναφέρεται σε μια συνάρτηση που προκύπτει με τις συνηθισμένες πράξεις μεταξύ άλλων συναρτήσεων, τότε το όριο μεταφέρεται σε κάθε όρο αυτής, εφόσον πληρούνται δυο προϋποθέσεις:

- 1) Όλες οι επι μέρους συναρτήσεις να έχουν όρια πραγματικούς αριθμούς.
- 2) Να μη μηδενίζονται μετά την αντικατάσταση των ορίων, παρονομαστές, εφόσον υπάρχουν στον τύπο της συνάρτησης.

☺☺☺ Ένα σχόλιο στα όρια.

Για να έχει νόημα η μελέτη του ορίου μιας συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού A , στο σημείο x_0 θα πρέπει να υπάρχει θετικός αριθμός α ($\alpha > 0$) τέτοιος ώστε η f να είναι ορισμένη σε ένα από τα

$$\text{σύνολα } (*) \begin{cases} (x_0 - \alpha, x_0) \cup (x_0, x_0 + \alpha) \\ (x_0 - \alpha, x_0) \\ (x_0, x_0 + \alpha) \end{cases}.$$

Η απαίτηση «η συνάρτηση f να είναι ορισμένη σε ένα από τα σύνολα της μορφής (*)» είναι απαραίτητη, για να υπάρχουν σημεία x του πεδίου ορισμού, διαφορετικά του x_0 οσοδήποτε κοντά στο x_0 . Αντιλαμβάνεστε ότι δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε το όριο μιας συναρτήσεως σε μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της.

3

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$: ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Παραγοντοποιώ τον αριθμητή και τον παρονομαστή (συνήθως με σχήμα Horner) μέχρι τη μορφή $(x - x_0) \Pi(x)$ (αν $x \rightarrow x_0$ τότε $x - x_0$ κοινός παράγοντας).
- Απλοποιώ τον κοινό παράγοντα και βρίσκω το όριο του πηλίκου. (Ενδέχεται μετά από απλοποίηση να έχω πάλι απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Αυτό σημαίνει ότι x_0 διπλή ρίζα. Επαναλαμβάνω τα ίδια).

4

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$: ΣΥΖΗΓΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

1. Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ και ο αριθμητής ή ο παρονομαστής είναι της μορφής $\alpha \pm \sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$
 - Πολλαπλασιάζω παρονομαστή και αριθμητή με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή ή παρονομαστή αντίστοιχα.
 - Παραγοντοποιώ – απλοποιώ τον κοινό παράγοντα και βρίσκω το όριο.
 - Στην περίπτωση που και ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι της μορφής πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση και των δύο.
2. Κυβικό Ριζικό
 - Θέτω α, β τους όρους του αριθμητή ή του παρονομαστή που περιέχει το ριζικό
 - Πολλαπλασιάζω και τους δύο όρους του κλάσματος με παράσταση της μορφής $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ ώστε να δημιουργήσω διαφορά κύβων $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$.

3. Κυβικό – τετραγωνικό ριζικό:

Αν υπάρχουν κυβική και τετραγωνική ρίζα ΞΕΧΩΡΙΣΤΑ σε αριθμητή ΚΑΙ παρονομαστή

- θέτω κάθε ρίζα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
- πολλαπλασιάζω κατάλληλα ώστε να μορφοποιηθεί και διαφορά τετραγώνων και διαφορά κύβων

4. Διαφορετικές τάξεις:

Αν υπάρχουν κυβική και τετραγωνική ρίζα ΜΑΖΙ σε αριθμητή Η παρονομαστή

- Βρίσκω το όριο λ του ενός όρου (προσθετέου) του αριθμητή.
- Προσθέτω και αφαιρώ στον αριθμητή το όριο λ .
- Διαχωρίζω κατάλληλα το κλάσμα σε 2 (το καθένα πρέπει να είναι απροσδιοριστία).
- Βρίσκω τα όρια των δύο κλασμάτων ξεχωριστά.

5

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ (ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$.
- Θέτω $u = g(x)$.
- Βρίσκω το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- Αντικαθιστώ και έχω $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \dots$

6 ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ: ΠΟΛΛΑΠΛΟΣ ΤΥΠΟΣ – ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

A. Πολλαπλός τύπος:

- Βρίσκω τα πλευρικά όρια $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0^+$ παίρνοντας τον αντίστοιχο τύπο.
- Αν τα πλευρικά όρια είναι ίσα τότε η κοινή τιμή είναι το όριο της συνάρτησης στο x_0 .
- Αν τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα τότε η συνάρτηση δεν έχει όριο στο x_0 .

Παρατήρηση: Για να πάρω πλευρικά όρια πρέπει να υπάρχουν στον τύπο ανισότητες $x <$, $x >$, κ.λπ. και όχι $x \neq$.

B. Καθορισμός παραμέτρων ύπαρξης ορίου:

- Βρίσκω τα πλευρικά όρια στη θέση x_0 που γίνεται αλλαγή τύπου.
- Εξισώνω τα πλευρικά όρια ώστε να υπάρχει το όριο, οπότε έχω εξίσωση ως προς α ή β .
- Με μια δεύτερη σχέση μεταξύ α , β (προκύπτει από την υπόθεση), έχω σύστημα το οποίο λύνω και βρίσκω τα α , β .

7 ΟΡΙΑ: ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (όχι σε όλο το D_f).

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν όριο στο x_0 και $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$. Το όριο «προσθέτει ισότητα»

Αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0$.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 .

Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

8 ΟΡΙΟ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{x} = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$

Ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

A.

- Μορφοποιώ το κλάσμα ώστε να σχηματιστεί η παράσταση $\frac{\eta\mu A(x)}{A(x)}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = 0$.

Συνήθως πολλαπλασιάζω και διαιρώ με κατάλληλη παράσταση.

- Θέτω $u = A(x)$.
- Βρίσκω $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = 0$.

Αρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu A(x)}{A(x)} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$.