

ΘΕΜΑ Α

A.1. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Να αποδείξετε ότι το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB , έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

15 μονάδες

A.2. Να απαντήσετε αν η κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι **Σωστή** (Σ) ή **Λάθος** (Λ) και να μεταφέρετε τις απαντήσεις στο τετράδιό σας.

1. Για δύο μη μηδενικά και παράλληλα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ για τα οποία ορίζονται συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

2. Η ευθεία $\varepsilon: y = 5$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

3. Η εξίσωση $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

παριστάνει κύκλο ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $K(2,1)$.

4. Η παραβολή: $C: y^2 = 4x$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$.

5. Αν E', E είναι δύο σταθερά σημεία του επιπέδου και για μεταβλητό σημείο M ισχύει:

$$(ME') + (ME) = 2a, \text{ όπου } a > 0$$

τότε, αυτό το σημείο M ανήκει σε μια υπερβολή, η οποία έχει εστίες τα σημεία E' και E .

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1)$.

B.1. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

(Μονάδες 11)

B.2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 6)

B.3. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM , η οποία διάμεσος είναι κάθετη στην πλευρά AB .

$(AM \perp AB)$. Δίνονται επίσης οι συντεταγμένες των κορυφών A, Γ του τριγώνου, οι οποίες είναι $A(2,3)$ και $\Gamma(-3,-2)$. Αν τέλος γνωρίζετε ότι η πλευρά AB βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε) με εξίσωση:

$$\varepsilon: 3x + y - 9 = 0$$

τότε:

Γ.1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) πάνω στην οποία βρίσκεται η διάμεσος AM . 6 μονάδες

Γ.2. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής B του τριγώνου είναι $B(1,6)$. 7 μονάδες

Γ.3. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου. 6 μονάδες

Γ.4. Να βρείτε τις εφαπτόμενες ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της παραβολής $(C): y^2 = 20x$

οι οποίες διέρχονται από την κορυφή B του τριγώνου.

6 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $A(a, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $a, \beta > 0$ και $a + \beta = 10$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την AB , για κάθε τιμή των a και β είναι $x^2 + y^2 - ax - (10 - a)y = 0$.

(Μονάδες 8)

Δ.2. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την AB , για τις διάφορες τιμές των a και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή O των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

Δ.3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB για τις διάφορες τιμές των a και β .

(Μονάδες 8)

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

Ματσάγκος Ιωάννης

Αρκάς Ροδόλφος

Μαντζαβίνος Αναστάσιος

Σταχτέας Χαράλαμπος