

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να αποδείξετε ότι εάν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-p$, τότε το p είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή $P(p)=0$.

15 μονάδες

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλλο σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Για οποιουδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει ότι $\ln(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$
2. Αν $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$ τότε $\chi = 2k\pi \pm \theta$, $k \in \mathbb{Z}$
3. Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sin(\omega x)$ με $\rho, \omega \in \mathbb{R}$ και $\rho, \omega > 0$ έχει μέγιστο ρ , ελάχιστο το $-\rho$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
5. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$, είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $a > 1$.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ με τύπο:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + \beta, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αν γνωρίζετε ότι:

- Η διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ δίνει υπόλοιπο $\nu = 2$ και
- Ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου

τότε:

Γ.1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 0 \text{ και } \beta = 4$$

(8 μονάδες)

Γ.2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$P(x) = 0$$

(8 μονάδες)

Γ.3. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$P(x) < 0$$

(9 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες x' και y' .

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 5)

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές