

Τράπεζα θεμάτων 7-5-2022

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις



**Πενθούμε τα Μαθηματικά
στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση**

www.Askisopolis.gr

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς – Νίκος Τούντας

Τόσο χάλι μαζεμένο δεν έχει ξαναγίνει.

- Λάθος ασκήσεις

- Λάθος λύσεις ασκήσεων

- Ασκήσεις εκτός πραγματικότητας σχολικού βιβλίου

- ασκήσεις χωρίς λογική στο βαθμό δυσκολίας.

Καλά να πάθουμε Αυτό το χάλι μας αξίζει.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητές τους

2^ο Θέμα

1251. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να

ισχύουν: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$ (Μονάδες 15)

12685. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha = \beta$. (Μονάδες 13)

13088. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$ (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

13323.α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17. \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$. (Μονάδες 13)

13053. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι
i. $\beta + \gamma = -\alpha$. (Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$ (Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0. \quad (\text{Μονάδες } 13)$$

13472. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha^2 = 2\alpha + \beta \text{ και } \beta^2 = 2\beta + \alpha.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$. (Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$. (Μονάδες 9)

14555. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3 (x - y)^3$. (Μονάδες 13)

14458. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $(x + 4y)(x + y) = 9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι

i) $(2y - x)^2 = 0$ (Μονάδες 8)

ii) $y = \frac{x}{2}$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$. (Μονάδες 12)

14473. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$. (Μονάδες 13)

14489. Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$ (Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι. (Μονάδες 15)

3^ο Θέμα

14329. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}$, $B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 15)

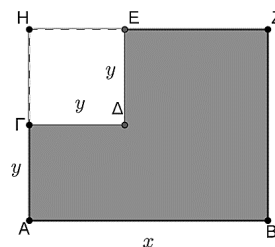
Διάταξη πραγματικών αριθμών

2^ο Θέμα

1261. Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma\Delta E\text{H}$ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBA\Gamma\Delta$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$ (Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)



1287. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

1317. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$. (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

1324. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

1353. α) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y

ισχύει: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$. (Μονάδες 13)

1373. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

12673. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

12922. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

13266. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

14475. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$ (Μονάδες 13)

14492. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

14704. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

- α) $x + y$ β) $2x - 3y$ γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 5+10+10)

4^ο Θέμα

14820.α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$ (Μονάδες 4+4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A. (Μονάδες 5)
 ii. Με τη βοήθεια του β) i με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$. (Μονάδες 5)

3^ο Θέμα

14602. Αν $0 < a < 1$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι: $a^3 < a$. (Μονάδες 13)
 β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, a^3, 1, a, \frac{1}{a}$. (Μονάδες 12)

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

2^ο Θέμα

1239. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i) για κάθε $x \geq 2$ είναι $A = 3x - 4$.
 ii) για κάθε $x < 2$ είναι $A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

(Μονάδες 13)

1252. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

1258. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$

(Μονάδες 15)

1260. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

- α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$ (Μονάδες 13)
 β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

1268. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

- α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. (Μονάδες 12)
 β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y . (Μονάδες 13)

1320. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

- α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)
 β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

1322. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

- α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$. (Μονάδες 12)
 β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$. (Μονάδες 13)

1323. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y-2| < 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$. (Μονάδες 12)
 β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$. (Μονάδες 13)

1366. α) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι: $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|a| + \left| \frac{1}{a} \right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

1371. α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1)

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

1383. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$, τότε:

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$. (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

(Μονάδες 13)

1384. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

13177. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha-3| = 3-\alpha$ και $|\beta+2| = \beta+2$ (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|α + β| + |α - 3| - |β + 2|$ είναι ίση με 1. (Μονάδες 9)

14412. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $α, β$ ισχύει $α > β$, με $β > 1$ και $α > 1$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\frac{α - β}{|α - β|} - \frac{|1 - α|}{1 - α} = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε $α + β > \frac{α - β}{|α - β|} - \frac{|1 - α|}{1 - α}$. (Μονάδες 13)

14491.α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

14572. Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$. (Μονάδες 10)

β) $|2x + 4| < 2$. (Μονάδες 15)

14599. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ ισχύει $x^2 < 1$. (Μονάδες 13)

14617. Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$. (Μονάδες 13)

4^ο Θέμα

1427. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x + 4| + |x - 14| = 18$. (Μονάδες 5)

1428. Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x + 2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x - 7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x + 2| + |x - 7|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

1429. Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$. (Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$ τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

1515. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta) > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha-1| + |1-\beta|$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

1525. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, $\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha-2| < 1$ και $|\beta-3| \leq 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β. (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

13179. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$. (Μονάδες 6)

1^ο Θέμα

14801.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
y = f(x)	0	1	-1	2	0,5

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

(Μονάδες 15)

Ρίζες πραγματικών αριθμών

2° Θέμα

1270. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

- α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)
 β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

1281. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$ και $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$.

- α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$. (Μονάδες 13)
 β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

1335. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός.

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; (Μονάδες 7)
 β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; (Μονάδες 8)
 γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$. (Μονάδες 10)

1338. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$ και $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$. (Μονάδες 15)
 β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B . (Μονάδες 10)

1340. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)
 β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$. (Μονάδες 13)

1375. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41, \quad \sqrt{3} \cong 1,73, \quad \sqrt{5} \cong 2,24 \quad \text{και} \quad \sqrt{7} \cong 2,64.$$

- α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{40}, \sqrt{80}$. (Μονάδες 12)
 β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

1376. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

1377.α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$, $6 - \sqrt[3]{30}$. (Μονάδες 13)

1378. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
 β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$. (Μονάδες 12)

1379. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$. (Μονάδες 12)

1380. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ (Μονάδες 12)

1381. Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$. (Μονάδες 12)

1382. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

12943. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha\beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$. (Μονάδες 13)

14774.α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$. (Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}. \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

14682. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$. (Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$. (Μονάδες 13)

14452. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$. (Μονάδες 10)

4^ο Θέμα

14931. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 10)

ΕΙΣΩΣΕΙΣ**Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού****2^ο Θέμα**

1246. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$. (Μονάδες 12)
 β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

1327. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:
 i) όταν $\alpha = 1$. (Μονάδες 5)
 ii) όταν $\alpha = -3$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

1351. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)
 γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

1369. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις. (Μονάδες 6)
 β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 10)

12857. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

- α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$. (Μονάδες 7)
 ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα. (Μονάδες 8)

14224. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0, x \neq 1$.

- α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$. (Μονάδες 8)
 β) i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται. (Μονάδες 8)
 ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

4^ο Θέμα

13170. Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %).

- α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο $x \in \mathbb{E}$ με επιτόκιο ε %, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \in \mathbb{E}$. (Μονάδες 7)

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης $(1,03^2 - 1,02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2$.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

(Μονάδες 8)

14543. Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός a γράφεται στη μορφή $a = 2k + 1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3, 5, 7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

(Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

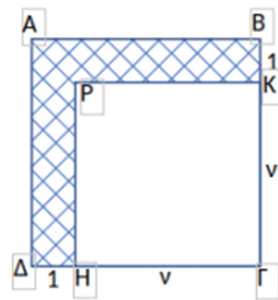
(Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με $(ΓΗ) = (ΓΚ) = v$ και $(ΒΚ) = (ΔΗ) = 1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου v .

(Μονάδες 7)



Εξισώσεις με απόλυτα

1303. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

1308. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$.

(Μονάδες 13)

13169. Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

(Μονάδες 15)

12917. Δίνεται η εξίσωση $(|a - 1| - 3)x = a + 2$ (1) με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $a = 0$ και $a = 5$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a ισχύει $|a - 1| = 3$.

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα β) i.

(Μονάδες 9)

14649. Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) i. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 13)

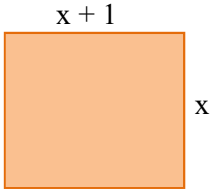
Η εξίσωση $x^y = a$

3^ο Θέμα

- 14052.α)** Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$. (Μονάδες 6)
- β)** Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| + x = 0$. (Μονάδες 9)
- γ)** Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$. (Μονάδες 10)

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

2^ο Θέμα

- 1238.α)** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$ (Μονάδες 15)
- β)** Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$ (Μονάδες 10)
- 1285.** Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.
- α)** Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. (Μονάδες 10)
- β)** Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)
- 
- 1290.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α)** Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 13)
- β)** Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 12)
- 1349.α)** Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$. (Μονάδες 12)
- β)** Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $ax^2 + \beta x + 3 = 0$. (Μονάδες 13)
- 13028.** Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$ με $a \in \mathbb{R}^* (1)$.
- α)** Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3. (Μονάδες 10)
- β)** Για $a=2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 15)

4^ο Θέμα

- 1388.** Δίνεται η εξίσωση $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α)** Να βρείτε τη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού. (Μονάδες 5)
- β)** Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)
- γ)** Για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)
- 1412.** Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$
- α)** Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)
- β)** Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη

μορφή : $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$. (Μονάδες 6)

- γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)
- δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

1440. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$.

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)
- β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:
- i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)
- ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του $\lambda > 0$ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)
- iii) για την τιμή του $\lambda > 0$ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

1459. Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)
- β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)
- γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:
- i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)
- ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ . (Μονάδες 7)

1476. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)
- β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .
- i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$. (Μονάδες 7)
- ii) Να δείξετε ότι: $\rho \neq 0$ και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$. (Μονάδες 4+6=10)

1516.α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2). (Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντιστροφές των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \text{ και } \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4), \text{ με } \alpha \cdot \gamma \neq 0 .$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε:

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)

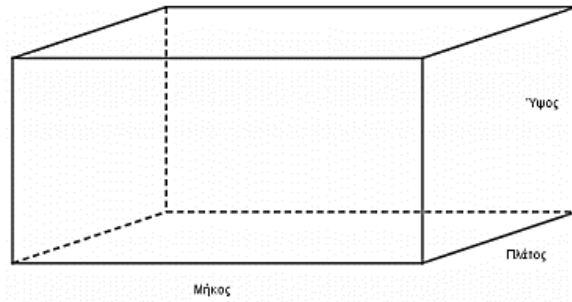
13320. Θεωρούμε τις εξισώσεις $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ (I) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (II) όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha \neq \gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών. (Μονάδες 8)

β) Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (I) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II) . (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (I), (II) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

12683. Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.



α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της. (Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα.

Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m

μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 . (Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή. (Μονάδες 8)

14651. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \text{ με } \lambda > 0.$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

14759. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6ax + 6b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(a) + f(b) \geq b^2 - 36$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(a) + f(b) = b^2 - 36$. (Μονάδες 6)

γ) Αν $a = 2$ και $b = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$. (Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γι), να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$.

(Μονάδες 5)

14406. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί a, b , με $a \neq b$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{a^2 + 1}{b^2 + 1} = \frac{a}{b}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{a^{22}(\beta^3)^8}{a^{-2}(\alpha\beta)^{25}}$. (Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί a και b εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου

παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$ να τους υπολογίσετε. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο a ή στο b , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο. (Μονάδες 5)

3^ο Θέμα

14749.α) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x - |x|}$. (Μονάδες 9)

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A , να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x - |x|} = \frac{3}{2}x + 2$. (Μονάδες 9)

14578. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$ (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$ (Μονάδες 15)

1^ο Θέμα

14782.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι για κάθε τιμή των x, y , συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

ii. Η εξίσωση $x^v = a$ με $a < 0$ και v περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[v]{|a|}$.

iii. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $|a| + |\beta| = |a + \beta|$.

iv. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (a_n) με λόγο $\lambda = 1$, το άθροισμα των n πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_n = n \cdot a_1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ να δείξετε ότι $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$.

(Μονάδες 15)

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

4^ο Θέμα

1448. Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 - 5x + a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|a| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $a = 2$. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$. (Μονάδες 10)

1477.α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$ τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

1482.α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε. (Μονάδες 15)

12912.α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$ και $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

Τύποι Vieta

2^ο Θέμα

1262. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B. (Μονάδες 9)

1269. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 10)

1280. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

1288. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \kappa x - 2 = 0$ (1), τότε:

i) να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1). (Μονάδες 6)

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$. (Μονάδες 9)

1315. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

1316. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

1334. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α , β τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$.

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α , β .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α , β .

(Μονάδες 7)

1337. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

(Μονάδες 13)

1348. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ

ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

(Μονάδες 9)

1359.α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α)ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

14577. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$

(Μονάδες 9)

4^ο Θέμα

1407. Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A , t_B , t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B, \quad t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και} \quad |t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$.

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B .

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

(Μονάδες 5)

1431. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$.

ii) να βρείτε το λ .

(Μονάδες 10)

1439. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Μονάδες 6)

1451. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.

(Μονάδες 10)

1452.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

(Μονάδες 8)

1460. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ (1) με β, γ πραγματικούς αριθμούς. Αν η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (2). Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (2) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

1463. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι: $(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$.

(Μονάδες 7)

1469. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

1475. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 8)

- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)
- γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
- δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1. (Μονάδες 6)

1478.α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.

- i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60$ cm². (Μονάδες 5)
- ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)
- iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)
- β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm² και διαγώνιο 8 cm. (Μονάδες 10)

1491. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:
- i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
 $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$. (Μονάδες 9)
- ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$. (Μονάδες 9)

1493. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0 \text{ με } \lambda \in (0, 2).$$

- α) Να βρείτε:
- i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)
- ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$. (Μονάδες 7)
- γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

1508. Δίνονται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)
- γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$ τότε:
- i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)
- ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 την τιμή του λ . (Μονάδες 8)

1509. Δίνονται η εξίσωση: $ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (a^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $p_1 = a$ και $p_2 = -\frac{1}{a}$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε $|p_1 - p_2| = 2$. (Μονάδες 10)

14490. Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

- α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω . (Μονάδες 5)
- β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- i) Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

- ii) Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες. (Μονάδες 6)
γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii) να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης. (Μονάδες 4)

Askisopolis

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} βαθμού2^ο Θέμα

1357. Δίνονται οι ανισώσεις $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

(Μονάδες 10)

4^ο Θέμα

13312. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$.

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

Ανισώσεις με απόλυτα

2^ο Θέμα

1243.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

(Μονάδες 8)

1284.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x + 4| \geq 3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

1330.α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$

(Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

1331.α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2).

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

1355.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

1365.α) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος. (Μονάδες 7)

1367.α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$. (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

1374. α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

12909. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$. (Μονάδες 7)

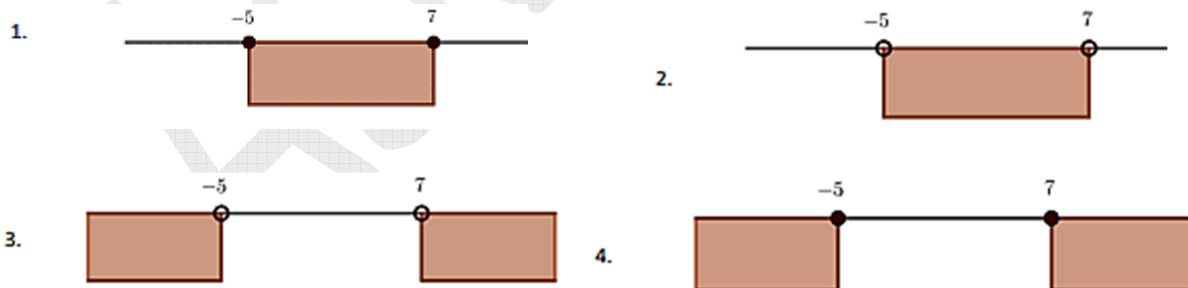
γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους. (Μονάδες 9)

13025.α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x - 1| \leq 23$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 5)

14295.α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα. (Μονάδες 12)
(Μονάδες 13)

14319. Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση. (Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5)$ (Μονάδες 13)

4^ο Θέμα

1406. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - (a+1)x + 4 + a$, $a \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (a-1)^2 - 16$. (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του a το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)
 γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2 , τότε:
 i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 x_2$ των ριζών του συναρτήσει του a (Μονάδες 2)
 ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$ (Μονάδες 8)

1416. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$. (Μονάδες 5)
 β) Έστω $\lambda \neq 0$.
 i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)
 ii) Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$. (Μονάδες 10)

1473.α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)
 ii) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)
 β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
 i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
 ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$. (Μονάδες 6)

1521.α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$. (Μονάδες 10)

- β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.
 i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (Μονάδες 5)
 ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19. (Μονάδες 10)

13474. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| \leq \sqrt{3}$ (1) και $3 - \frac{x+4}{2} < 0$ (2)

- α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 5)
 β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1). (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 7)
 δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους. (Μονάδες 8)

14650. α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1). (Μονάδες 7)

- β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$. (Μονάδες 5)

- γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$. (Μονάδες 5)
- δ) Να βρείτε τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

3^ο Θέμα

14601. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1| < 1$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$. (Μονάδες 12)
- β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1, x , x^2 . (Μονάδες 13)

14753. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x|-2 \leq 0$ (1).

- α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$. (Μονάδες 10)
- β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4. (Μονάδες 5)
- γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση A χωρίς τις απόλυτες τιμές. $A = |2x-3| - |4-3x|$. (Μονάδες 10)

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού2^ο Θέμα

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

1250. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$. (Μονάδες 10)
- β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
- γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K . (Μονάδες 8)

1273. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3}+1)^2$. (Μονάδες 12)
- β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

14474. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

- α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου. (Μονάδες 12)
- β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

Δευτεροβάθμιες ανισώσεις

2^ο Θέμα

1271. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

- α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). (Μονάδες 12)
- β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

1277.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση: $A = |x-3| + |x^2 - 10x + 21|$

- i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $A = -x^2 + 11x - 24$ (Μονάδες 8)
 ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$. (Μονάδες 5)

1279.α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$. (Μονάδες 12)

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

1291.α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

1300.α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$. (Μονάδες 15)

1306. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

1346. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). (Μονάδες 13)

1350.α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

1356. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$. (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$. (Μονάδες 10)

1363.α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες 7)

12722. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$. (Μονάδες 12)

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2f(x) < 0$. (Μονάδες 13)

12976.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x) \leq -1$. (Μονάδες 13)

13321.α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1) (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2). (Μονάδες 8)

14189. α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$. (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$. (Μονάδες 13)

14652.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$. (Μονάδες 7)

4^ο Θέμα

1391. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

1396. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 5)

1397. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$. (Μονάδες 6)

1402. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$ (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές

και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$.

(Μονάδες 8)

1409. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος.

Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m; (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m. (Μονάδες 9)

1425. Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

1426. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$ (Μονάδες 10)

1432.α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο λ .

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί. (Μονάδες 5)

1436.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1 + \alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$. (Μονάδες 7)

1450. Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

1455. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)
- γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

1458. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)
- γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :
- i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ (Μονάδες 4)
- ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$ (Μονάδες 5)

1461. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 5)
- γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:
- i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.
- ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$. (Μονάδες 12)

1462. Δίνεται το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

- α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2a$ και $\beta = -3a$. (Μονάδες 9)
- β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:
- i) να αποδείξετε ότι $a < 0$. (Μονάδες 9)
- ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + a < 0$. (Μονάδες 7)

1465. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)
- β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)
- γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

1480. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) και $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2).

- α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2). (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή. (Μονάδες 10)

1481. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0. (Μονάδες 8)

1483. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

(Μονάδες 10)

β) Αν $k = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $k^2 - 2k - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

1486. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και

$x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την

απάντησή σας. (Μονάδες 7)

1487.α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x . (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$ (Μονάδες 7)

1494.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

1500. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών

και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι

τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

1511. Δίνεται η ανίσωση: $|x+1| < 4$ (1)

- α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)
- γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$. (Μονάδες 15)

1513. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

- α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x . (Μονάδες 10)
- β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2,999) \cdot f(-1,002)$ (Μονάδες 7)
- γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$. (Μονάδες 8)

1517.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ . (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$ (Μονάδες 7)

1518. Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha - 2| < 1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α . (Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$.

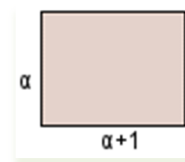
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0$. (Μονάδες 7)

1520.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$ (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha + 1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:



i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

13174. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B ; (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$. (Μονάδες 9)

13176. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$. (Μονάδες 8)

γ) i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι

και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 5)

14615. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των

πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού

$k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$.

(Μονάδες 6)

14653. Δίνεται η ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

(Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιο του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

(Μονάδες 7)

14654. α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$ για

τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.

ii. Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

(Μονάδες 15)

14924. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3,1415\dots$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1, 1)$.

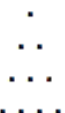
(Μονάδες 8)

Πρόοδοι

Ακολουθίες

4ο θέμα

13056. Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

				...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_v = \frac{v(v+1)}{2}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

- α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό. (Μονάδες 6)
 β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός. (Μονάδες 9)
 γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου. (Μονάδες 10)

Αριθμητική πρόοδος

2ο θέμα

1240. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με όρους $a_2 = 0$, $a_4 = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $a_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και a_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $a_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

1245.α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x + 2$, $(x + 1)^2$, $3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

- β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν
 i) $x = 1$ ii) $x = -1$. (Μονάδες 12)

1247. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

- α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. (Μονάδες 9)
 β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)
 γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

1249. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει ότι: $a_1 = 19$ και $a_{10} - a_6 = 24$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε τον a_{20} . (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

1256. Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (a_n) .

- α) Να βρείτε τη τιμή του x . (Μονάδες 10)

- β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) ,
i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω . (Μονάδες 7)
ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

1266. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$ (Μονάδες 12)
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

1325. Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) ισχύουν: $a_1 = 2$ και $a_{25} = a_{12} + 39$.

- α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

1326. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά ω .

- α) Να δείξετε ότι: $\frac{a_{15} - a_9}{a_{10} - a_7} = 2$ (Μονάδες 13)
β) Αν $a_{15} - a_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

1329. Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $a_6 + a_{11} = 40$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 της προόδου. (Μονάδες 12)
β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

1336. Οι αριθμοί $x + 6, 5x + 2, 11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .

- α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. (Μονάδες 12)
β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

1343. Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_1 = 2$ και $a_5 = 14$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)
(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

1370.α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \dots, n$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

14476. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: $1, 3, 5, 7, \dots$

- α) i) Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου. (Μονάδες 4)
ii) Να βρείτε τον τριακοστό της όρο. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 . (Μονάδες 13)

14512.α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$. (Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος αύξουσα σειρά και στη συνέχεια:

- i) να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (a_n) της οποίας να βρείτε την διαφορά ω . (Μονάδες 9)
ii) να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (a_n) . (Μονάδες 7)

14573. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

14574. Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35. (Μονάδες 13)

14597. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει a καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς. (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά; (Μονάδες 9)

14656. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$. (Μονάδες 13)

4ο θέμα

1387. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων.

Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

1395. Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)

β) Αν για κάθε $n \leq 51$ ο αριθμός a_n εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο n -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

1399. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$, τότε :

- α) να αποδειχθεί ότι $x=3$. (Μονάδες 10)
 β) να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (Μονάδες 8)
 γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S=a_1+a_3+a_5+...+a_{15}$. (Μονάδες 7)

1411. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

- α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το n^o όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)
 β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη; (Μονάδες 6)
 γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.
 i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)
 ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

1417. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

- α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)
 β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)
 γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

1430. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

- α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)
 β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)
 γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
 δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

1471. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $a_2 = \kappa^2$ και $a_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός. (Μονάδες 8)
 β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$, τότε:
 i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. (Μονάδες 8)
 ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

1488. Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

- «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».
 α) Να βρείτε την τιμή του x . (Μονάδες 6)
 β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)
 γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε n ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε

φορά. Να βρείτε την τιμή του n , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

1502. Οι αριθμοί : $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

- α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x . (Μονάδες 6)
- β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:
- i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)
- ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)
- iii) Το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{24}$. (Μονάδες 8)

1503. Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) , ο 3ος όρος είναι $a_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $a_8 = 23$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $a_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της. (Μονάδες 6)
- γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \dots + (a_{31} + 31)$ (Μονάδες 10)

1507. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_{20} = 61$.

- α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)
- β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (a_n) , τέτοιο ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. (Μονάδες 9)

12694. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

- α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 3 + 4)
- β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι. (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι. (Μονάδες 6)
- δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίζει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι; (Μονάδες 6)

13171. Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n = 2n^2 + 3n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq 1.$$

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 . (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1, n \geq 2$. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι $a_n = 4n + 1, n \geq 1$. (Μονάδες 7)
- δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω . (Μονάδες 7)

13089. Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

- α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι

- όροι αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)
- ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)
- β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. (Μονάδες 5)
- δ) Να δείξετε ότι $\alpha_n = \beta_{8-n}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, 7$. (Μονάδες 5)

13173. Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό τύπο $\alpha_n = 10 + 3n$.

- α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 3)
- β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_n) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί; (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. (Μονάδες 8)

12764. Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

- α) Αν α_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω . (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα. (Μονάδες 9)
- γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα. (Μονάδες 7)

12945. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο. (Μονάδες 8)
- γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της $\varepsilon(\alpha_n)$ ίναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n . (Μονάδες 10)

14616. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω για την οποία πρόοδος ισχύει η σχέση $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 40$, ενώ ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 5$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.
- β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 4n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.
- γ) Να βρείτε τον μικρότερο δυνατό όρο της προόδου, ο οποίος είναι μεγαλύτερος του αριθμού 1589.
- δ) Έστω n τυχαίος θετικός ακέραιος και $k = n(n + 1)$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός α_k είναι τετράγωνο θετικού ακέραιου.

14809. Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

- α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή. (Μονάδες 9)

14927. Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (a_n) .

- α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $a_n = 107n + 1210$. (1) (Μονάδες 9)
- β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία
- του αριθμού 1210 στη σχέση (1). (Μονάδες 5)
 - της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 5)
- γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους. (Μονάδες 6)

14758. Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο.

Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

- α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου; (Μονάδες 6)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 6)
- γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια; (Μονάδες 6)
- δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο; (Μονάδες 7)

1ο θέμα

14935. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

ii. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.

iii. Η εξίσωση $x^v = a$, με v περιττό φυσικό και $a < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[v]{a}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3,5)$ ισχύει $f(5) = 3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

(Μονάδες 10 (5 × 2))

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι: $a_n = a_1 + (n-1)\omega$.

(Μονάδες 15)

Γεωμετρική πρόοδος

2ο θέμα

1242. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x, 2x+1, 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$

(Μονάδες 12)

1257. α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x . (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x . (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

1265. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

1311. Οι αριθμοί $k-2, 2k$ και $7k+4, k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $k = 4$ και να βρείτε το λόγο της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 . (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$. (Μονάδες 7)

1321.α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4, 2-x, 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο a_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

1339. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) , για την οποία ισχύει $\frac{a_5}{a_2} = 27$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 . (Μονάδες 15)

1360. Σε γεωμετρική πρόοδο (a_n) με θετικό λόγο, ισχύει: $a_3 = 1$ και $a_5 = 4$.

α) Να βρείτε το λόγο της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι: $a_n = 2^{n-3}$ (Μονάδες 12)

12787.α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k-2, k, 2k+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο. (Μονάδες 15)

4ο θέμα

1392. Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ., στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.; (Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξαπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

1394. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

- α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)
 β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).
 i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες 6)
 ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n . (Μονάδες 6)
 iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

1435. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

- α) i) Να βρείτε το ποσό a_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)
 ii) Να βρείτε το ποσό β_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)
 iii) Να βρείτε το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)
 iv) Να βρείτε το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)
 β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)
 ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

1498. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α , β και εμβαδόν E , τέτοια ώστε οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

- α) Να αποδείξετε ότι $E=1$ (Μονάδες 10)
 β) Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:
 i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α , β (Μονάδες 5)
 ii) Να βρείτε τα μήκη α , β . (Μονάδες 10)

1499. Δίνονται οι αριθμοί 2, x , 8 με $x > 0$.

- α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)
 γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_n) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:
 i) Να βρείτε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) . (Μονάδες 7)
 ii) Να βρείτε την τιμή του n ώστε, για το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) να ισχύει: $2(S_n + 24) = \beta_7$ (Μονάδες 8)

1519. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0.$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον

αντίστροφο του λόγου της (α_n) . (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και (β_n) αντίστοιχα,

να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$ (Μονάδες 8)

12731. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός. (Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda, (\kappa > 0, \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε

τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

12998. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

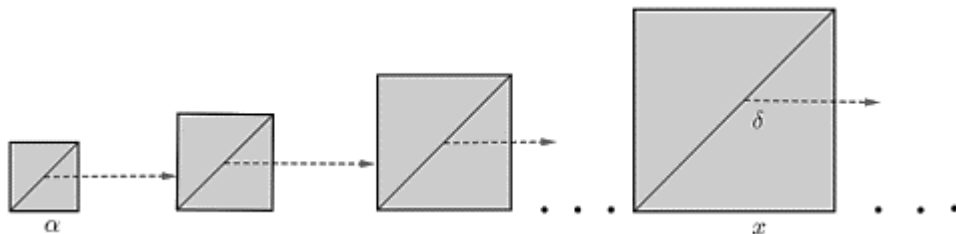
ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$ (Μονάδες 5)

β) Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής

προόδου (α_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$. (Μονάδες 8)

14645. Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς a , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιος του δ έχει

μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$. (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n)

με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = a^2 2^{n-1}$. (Μονάδες 7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. την πλευρά a του αρχικού τετραγώνου. (Μονάδες 8)

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.. (Μονάδες 6)

14375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2), f(1), f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ . (Μονάδες 7)

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης
2ο θέμα

1244. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$ (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$. (Μονάδες 12)

1255. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$. (Μονάδες 10)

1263. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0,8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά; (Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ; (Μονάδες 13)

1278. Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T = 15 + 25 \cdot x$, όταν $0 \leq x \leq 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

1283. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8-x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x+5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι : $f(-5) = f(4)$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$. (Μονάδες 12)

1295. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$. (Μονάδες 10)

1297. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$ (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$. (Μονάδες 15)

1354. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$.

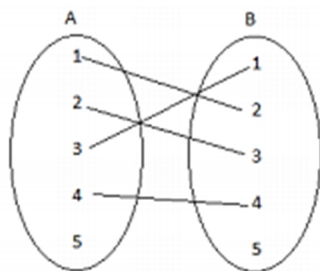
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A . (Μονάδες 5)
 β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$. (Μονάδες 10)
 γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$. (Μονάδες 10)

1385.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$. (Μονάδες 12)

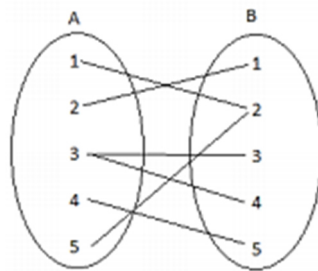
β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)
 ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$. (Μονάδες 8)

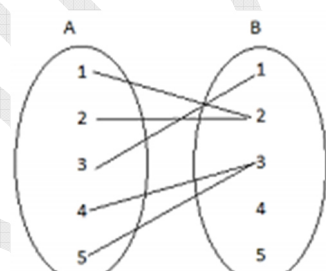
12908. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B . (Μονάδες 9)
 β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,
 i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 4)
 ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f . (Μονάδες 4)
 iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$. (Μονάδες 8)

12997. Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της A' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της A' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της A' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

- α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B . (Μονάδες 10)
 β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή. (Μονάδες 15)

13031. Δίνεται η συνάρτηση G με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x=2$, $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G . (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3. (Μονάδες 9)

13032. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x+5}$.

- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$. (Μονάδες 9)

13026. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 10)
 β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$. (Μονάδες 15)

14781. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

- α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.
 ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
 β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$. (Μονάδες 12)

14681. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(3)$ και $f(-3)$. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$. (Μονάδες 13)

14728. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$. (Μονάδες 12)
 β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$. (Μονάδες 13)

4ο θέμα

1400. Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

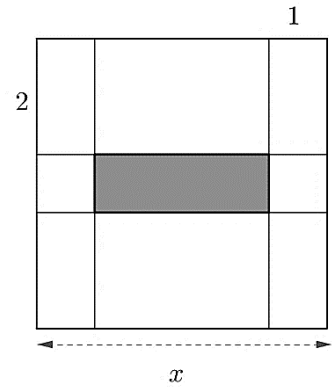
- α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
 β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)
 γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)
 δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

1418. Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

- α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)
- β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
- i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)
- ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

1420. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$ (Μονάδες 8)
- β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 . (Μονάδες 7)
- γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 . (Μονάδες 10)



1422. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς

$$\text{Κέλβιν } (^{\circ}\text{K}) \text{ και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ } (^{\circ}\text{F}) \text{ είναι η: } K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K .

Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

(Μονάδες 10)

1421. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

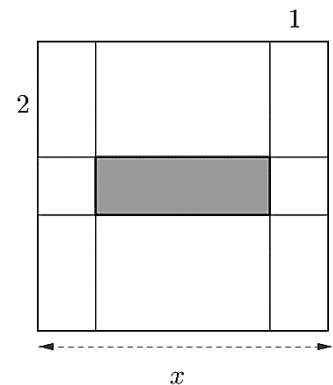
α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = x^2 - 6x + 8$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2 . (Μονάδες 7)

γ) Αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν το πολύ 35 cm^2 , να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει τετραγώνου. (Μονάδες 10)



1437. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$. (Μονάδες 10)

1441. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)

1457. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

1467. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης A καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$.

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη B το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

1484. Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες: Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.

Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο O.

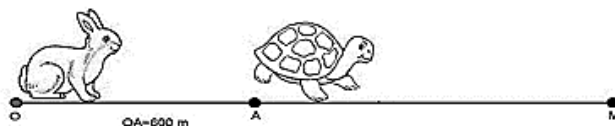
Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο M με $OM > 600$ μέτρα.

Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο A που βρίσκεται μεταξύ του O και του M, με $OA = 600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το O τη χρονική στιγμή t

$\min$ δίνεται από τον τύπο $S_\lambda(t) = 10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το O τη στιγμή $t \min$

δίνεται από τον τύπο $S_x(t) = 600 + 40t$ μέτρα.



α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το O θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα M, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος M από το O είναι $OM = 2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (Μονάδες 5)

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12 \min$ και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. (Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (Μονάδες 5)

1495. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε:
 $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο :

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0, 10) \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

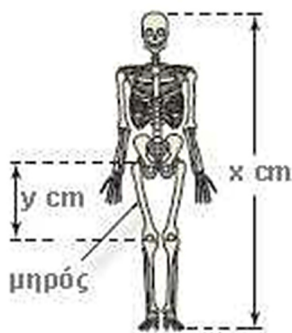
β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$; (Μονάδες 8)

1501. Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Ανδρας: $y = 0,45x - 31$



α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

13114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$. (Μονάδες 9)

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της. (Μονάδες 8)

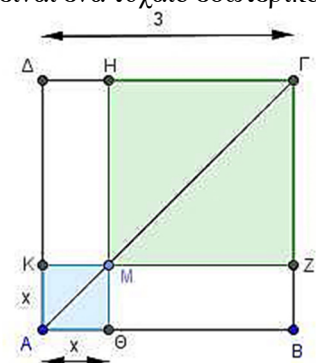
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. (Μονάδες 8)

1497. Στο επόμενο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB=3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου AG . Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του M πάνω στην AG το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



1506. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40$ cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 20x - x^2$. (Μονάδες 8)

- γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)
- δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm. (Μονάδες 7)

1510. Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

- α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)
- β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση
- να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)
 - να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

14629. Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$

της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

- α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$. (Μονάδες 7)
- β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε; (Μονάδες 4)
- γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50; (Μονάδες 8)
- δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί; (Μονάδες 6)

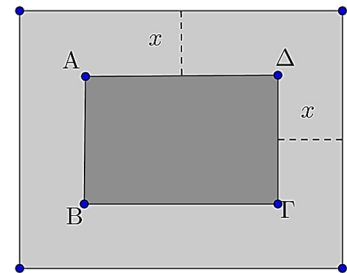
14702. Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

- α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x . (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περιφράξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο. (Μονάδες 10)

12911. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:
 $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500$ m². (Μονάδες 7)

- γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m²; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



14562. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$. (Μονάδες 10)

Γραφική παράσταση συνάρτησης

2ο θέμα

1259. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε το σημείο $M\left(a, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη

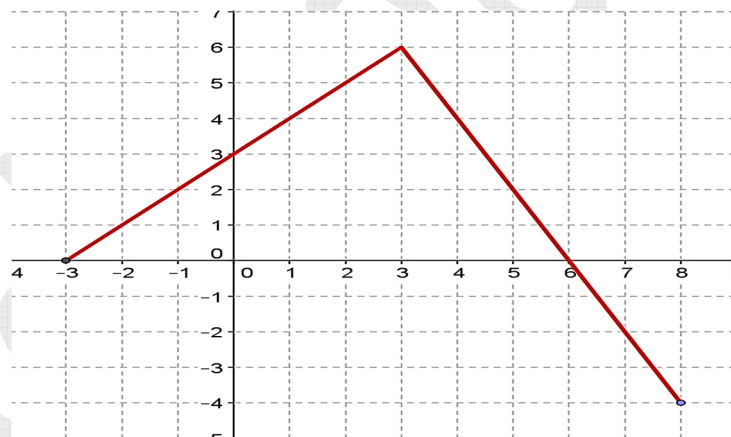
γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

1299.α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$. (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και

$g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$. (Μονάδες 12)

1305.



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 8)

1345. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 9)

1358. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

12680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

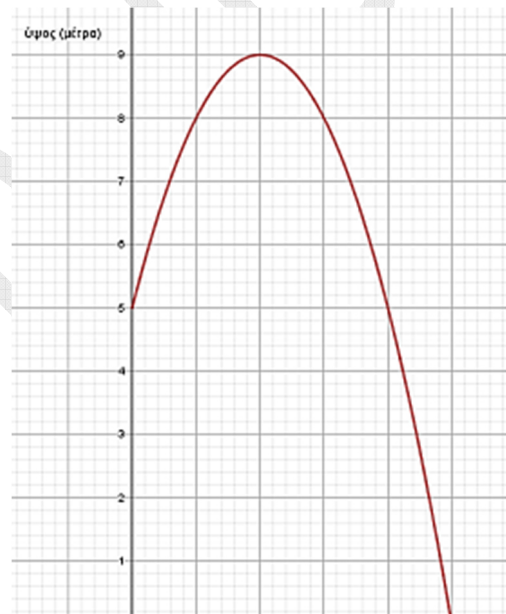
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)
 γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 8)

12686. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 8)

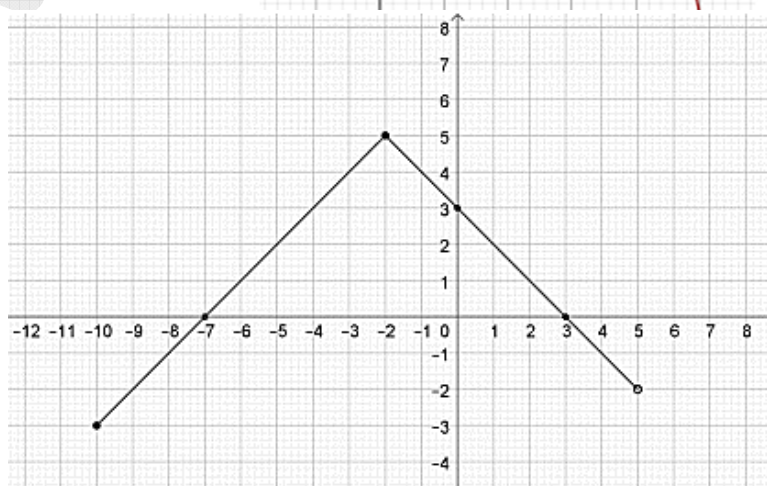
12729. Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή; (Μονάδες 6)
 β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό; (Μονάδες 6)
 γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος. (Μονάδες 7)
 δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος. (Μονάδες 6)



12910. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$. (Μονάδες 6)
 γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$. (Μονάδες 4)
 δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$. (Μονάδες 7)



13322. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2+2} + \sqrt{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$, $x=2$. (Μονάδες 9)

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα; (Μονάδες 8)

14072. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
 β) Ανήκει το σημείο $M(1, 3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ; (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 9)

14306. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 10)
 β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$. (Μονάδες 7)
 γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1, 3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση; (Μονάδες 8)

14596. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ με $x \neq -1$.

- α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$. (Μονάδες 13)
 β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$. (Μονάδες 12)

14603. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 6)
 β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
 γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)

14628. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$. (Μονάδες 7)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f . (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$. (Μονάδες 10)

4ο θέμα

1393. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)
 β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + \alpha$. Να δείξετε ότι:

- i) Αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.
 ii) Αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

1408. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)
 β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)
 γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g ,

να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$ (Μονάδες 9)

1433. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - a + 2$ και $g(x) = x^2 - a + 3$ με $a \in \mathbb{R}$.

- α)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a . (Μονάδες 7)
- β)** Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:
- i)** Να βρείτε την τιμή του a . (Μονάδες 4)
- ii)** Για την τιμή του a που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)
- γ)** Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

1454. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{a}{4}}$.

- α)** Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- β)** Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, τότε
- i)** Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)
- ii)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

1470. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + a$, με $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$.

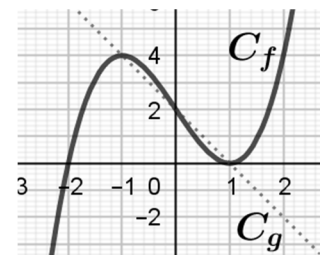
- α)** Για $a = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)
- β)** Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. (Μονάδες 10)
- γ)** Για $a > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες 10)

1485. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

- α)** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- β)** Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)
- γ)** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 12)

1490. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

- α)** τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$. (Μονάδες 6)
- β)** τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)
- γ)** τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 6)



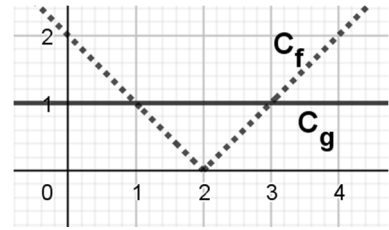
- δ)** τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

1514. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g . (Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα. (Μονάδες 10)



γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$.

(Μονάδες 5)

1523. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$. (Μονάδες 7)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 8)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$. (Μονάδες 5)

1524. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(a+3)x + 3a}{2x - 3}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - a$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του a αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 5)

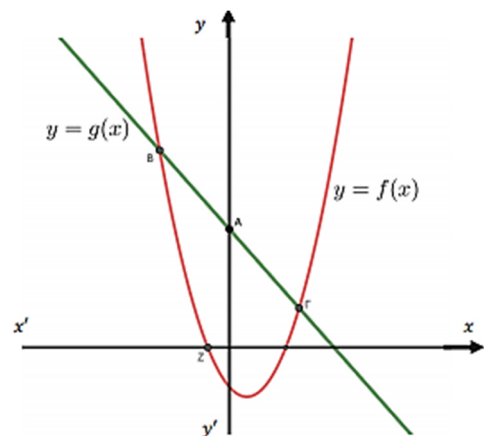
12628. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και

$g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.

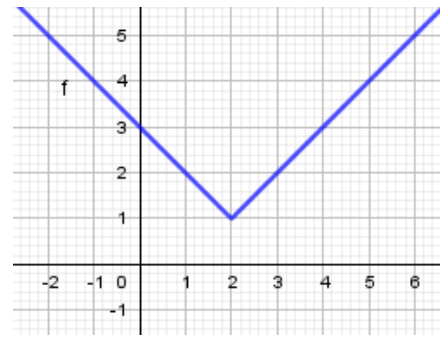
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$. (Μονάδες 6)

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a , η απόσταση των αριθμών $f(a)$ και $-g(a)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1. (Μονάδες 9)



12914. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

(Μονάδες 8)

γ) i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

(Μονάδες 4)

12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}, x \neq \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

(Μονάδες 9)

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

(Μονάδες 9)

12941. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9 - x^2}{3 - |x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

12944. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x \neq 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|a| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

12999. Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

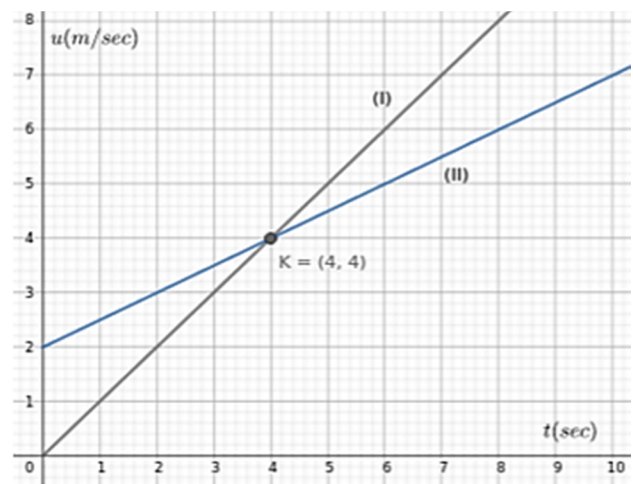
α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

(Μονάδες 6)

β) Ένα όχημα A , που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα B , που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec.

Οι παρακάτω ευθείες (I), (II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

- i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος A και ποια την ταχύτητα του οχήματος B; (Μονάδες 6)
- ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα A, B κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή $t \text{ sec}, t \in [3, 5]$. (Μονάδες 7)
- iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος A, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του. (Μονάδες 6)



13027. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός

αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$. (Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$. (Μονάδες 7)

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

13030. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$. Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g . (Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g . (Μονάδες 8)

13090. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση

της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$.

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

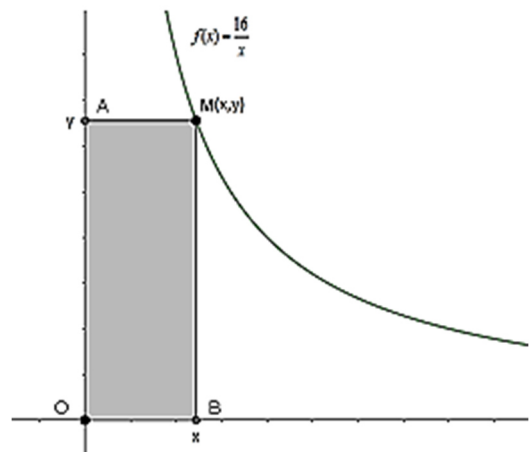
α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια OAMB που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$ όπου x η τετμημένη του M. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο OAMB να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους. (Μονάδες 7)

γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο OAM'B να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4. (Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο OAM'B έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια OAMB,



δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

13120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

13168. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

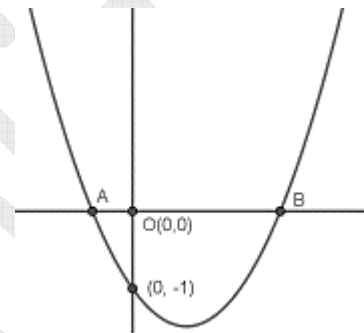
i. $\gamma = -1$ (Μονάδες 5)

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες

$A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)



13313. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο A . (Μονάδες 7)

13479. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

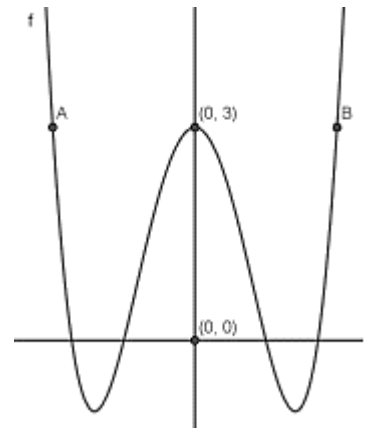
α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές. (Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 8)

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ . (Μονάδες 8)

13454. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

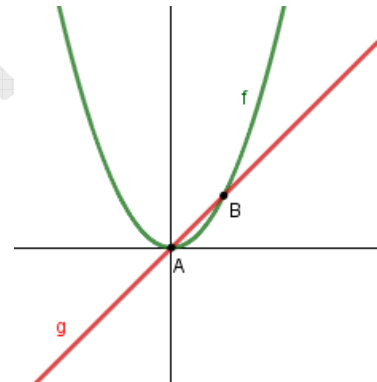


- α)** Να δείξετε ότι $\gamma = 3$. (Μονάδες 6)
- β)** Αν $A(\alpha^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3\alpha, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f . (Μονάδες 7)
- γ)** Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)
- δ)** Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ , να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

13507. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = px^2 + (6-p)x + \left(\frac{5}{2}p - 3\right)$, με παράμετρο $p \in \mathbb{R}$.

- α)** Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης για $p = 0$ και $p = 2$. Για ποια από αυτές τις τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία; (Μονάδες 4)
- β) i.** Για $p = 0$ και $p = 2$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το οποίο και να βρείτε. (Μονάδες 6)
- ii.** Συμβαίνει το ίδιο (δηλαδή να έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα) και για άλλες τιμές της παραμέτρου $p \in \mathbb{R}$; (Μονάδες 6)
- γ)** Για $p \neq 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα. (Μονάδες 9)

13557. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A, B .



- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B . (Μονάδες 7)
- β)** Αν $A(0, 0), B(1, 1)$, τότε:
- i.** Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 5)
- ii.** Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο **i.** ερώτημα. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$,

να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$. (Μονάδες 6)

14184. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 4)
- β)** Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση. (Μονάδες 8)
- γ)** Αν είναι $f(x) = x + 2, x \neq -1$, τότε:
- i.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$. (Μονάδες 7)
- ii.** Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 6)

14185. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$. (Μονάδες 8)

14190. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη. (Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$.

Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $[\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$. (Μονάδες 9)

14225. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A . (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \in A$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)

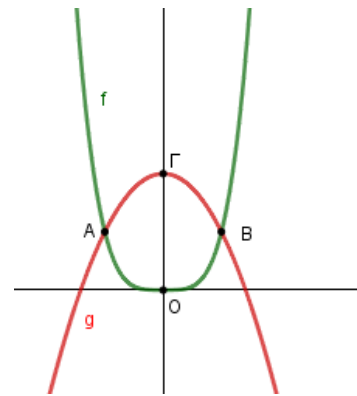
14307. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία AB , είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f , g , ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B , Γ . (Μονάδες 9)

Αν $A(-1,1), B(1,1), \Gamma(0,2)$

β) Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . (Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β). (Μονάδες 10)



14320. Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in [0, 6] \\ 16, & x \in (6, 9) \\ 25 - x, & x \in (9, 12] \end{cases}$ και

μετρίεται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

i. Διατηρείται σταθερή.

ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου. (Μονάδες 4+7=11)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

14459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$.

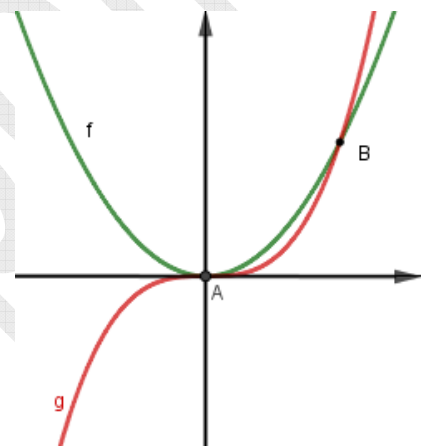
- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < a < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες. (Μονάδες 10)
 γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

14760. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες. (Μονάδες 8)

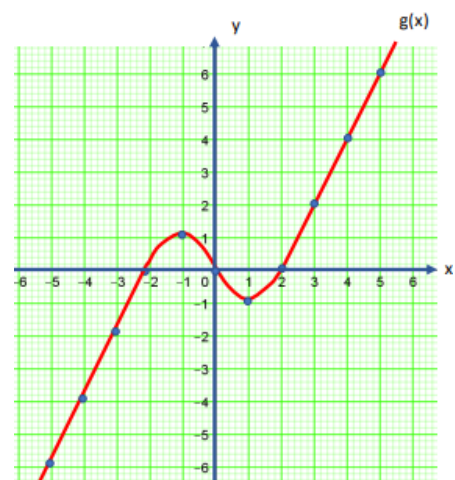
14665. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία Α και Β.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. (Μονάδες 8)
 β) Με βάση το σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει $x^3 < x^2$. (Μονάδες 6)
 γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)
 δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι:
 i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$ (Μονάδες 3)
 ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$ (Μονάδες 5)



14745. δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

- α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)
 β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$. (Μονάδες 7)
 γ) i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$. (Μονάδες 6)
 ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k . (Μονάδες 6)



14810. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$. (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$. (Μονάδες 6)

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

14925. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της

$f(x) = \frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το O είναι το μέσο του AB. (Μονάδες 9)

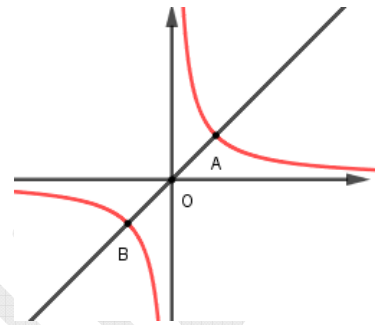
Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$

για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε τότε $(AB) = (MM')$.

(Μονάδες 8)



14926. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις

των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα A, B είναι

τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 10)

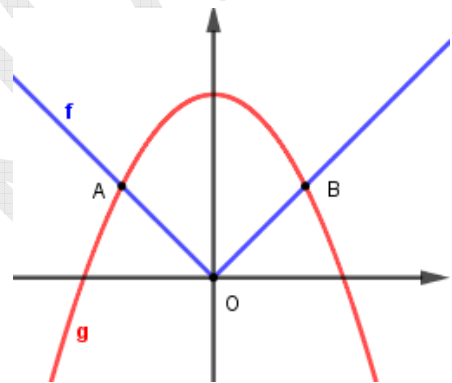
β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι: $f(x) < g(x)$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$

επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βι.

(Μονάδες 9)



14961. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$.

Αν $A(\omega, 0), B(\varphi, 0)$

α) Να δείξετε ότι

i. $\omega + \varphi = 1$

(Μονάδες 4)

ii. $\omega \cdot \varphi = -1$

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

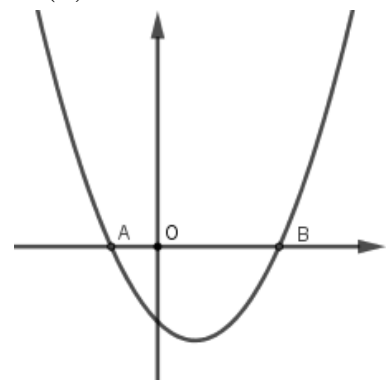
(Μονάδες 6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \varphi$.

(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\varphi < \frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)



3ο θέμα

14752. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$. (Μονάδες 10)

14754. α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A . (Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g , όπου $g(x) = 6x$. (Μονάδες 8)

14604. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 6)

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$. (Μονάδες 7)

Η συνάρτηση $y=ax+\beta$

2ο θέμα

1241. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

- α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των a, β . (Μονάδες 13)
- β) Αν $a=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

1294. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

- α) Να δείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = 5$. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 7)
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 8)

1301. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)
- β) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A, B είναι συμμετρικά ως προς το O . (Μονάδες 12)

12856. Δίνεται ευθεία $\varepsilon: y=ax+5$. Αν η ευθεία $\delta: y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

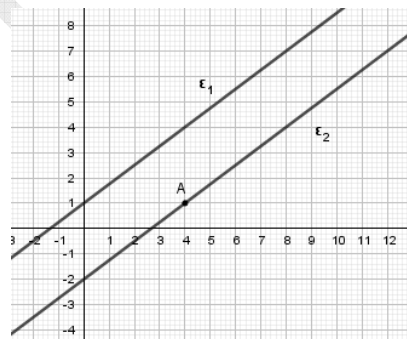
- α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε . (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$; (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

12631. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο

ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που

διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2) . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες. (Μονάδες 9)



12684. Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2)

διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

- α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

12730. Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$.

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$. (Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2. (Μονάδες 12)

12630. Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1,1).

- α) Να βρείτε τις τιμές των a και β . (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 8)
 γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία. (Μονάδες 9)

12939. Εστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = ax + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β . (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 6)
 γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (Μονάδες 6)

13033. Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

- α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε). (Μονάδες 4)
 ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα; (Μονάδες 4)
 β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε). (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε). (Μονάδες 8)

13178. Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$. (Μονάδες 9)
 β) Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .
 i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)
 ii. Αν $N(-3, -4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N , είναι συμμετρικά ως προς το O . (Μονάδες 8)

13054. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3a + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4a)x + 4$, $a \in \mathbb{R}$.

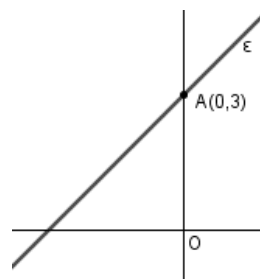
- α) Αν $a=1$, να βρείτε:
 i. Τις εξισώσεις των ευθειών. (Μονάδες 6)
 ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα xx' . (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 13)

13318. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), [f(-\sqrt{2})]^2$. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 13)

14641. Η διπλανή ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε . (Μονάδες 7)
 β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.
 (Δίνεται ότι $\varepsilon\phi 45^\circ = 1$) (Μονάδες 9)



13400. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

- α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. (Μονάδες 9)
 γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (Μονάδες 7)

12913.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

13471. Θεωρούμε τα σημεία $A(2,1), B(-1,-5), \Gamma(27,50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία.

Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

14575. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

4ο θέμα

1398. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = 4x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x' .

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox .

(Μονάδες 7)

1386. Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο.

Στο διπλανό παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

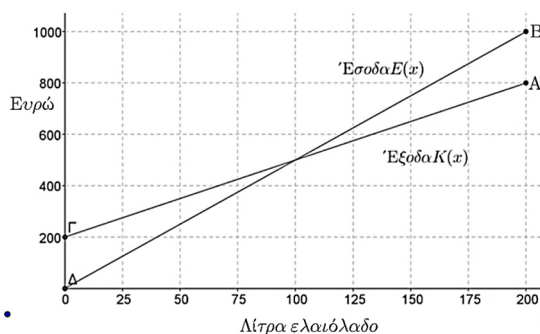
(Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

(Μονάδες 8)



1403. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες

x' και y' αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. (Μονάδες 8)

1410. Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. (Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360

θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 9)

1444. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$. (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x' και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x' . (Μονάδες 10)

1446. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x' . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

1447. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 3)

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

1449. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g . (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 10)

1468. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων

f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και

$$g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g .

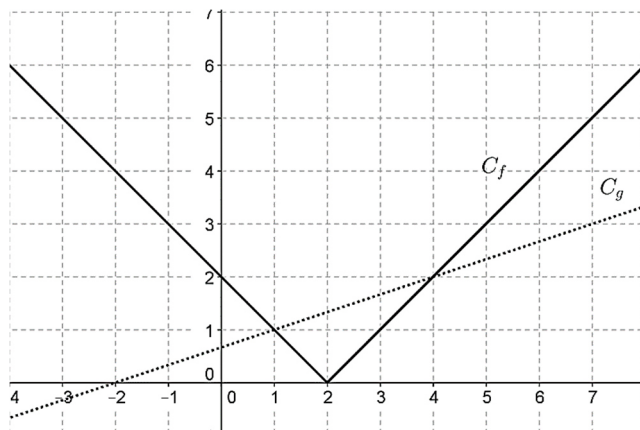
(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f

βρίσκεται πάνω από τη C_g . (Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K = \sqrt{3|2-x|} - (x+2)$ (Μονάδες 5)



1479. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0,20x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km;

(Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$y = 80 + 0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι

το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 5)

1496. Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. (Μονάδες 3)

12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

- α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο; (Μονάδες 6)
 β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικοπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του; (Μονάδες 5)
 γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα. (Μονάδες 6)
 δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικοπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)
 ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικοπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

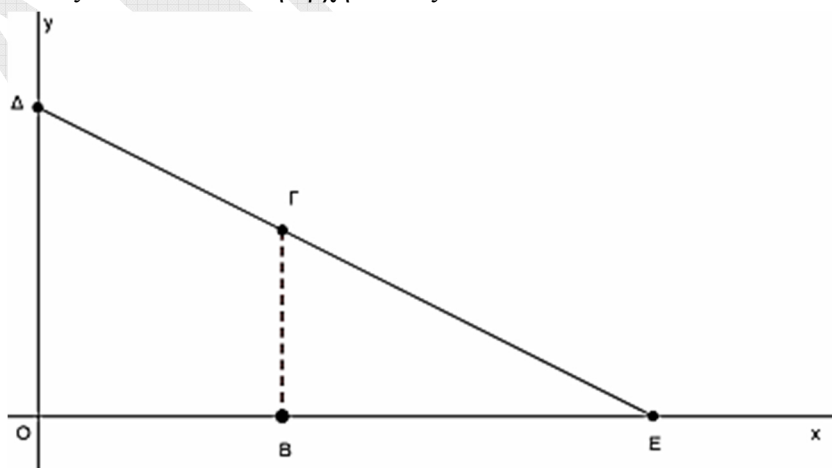
12921. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|x - 2|$ και η ευθεία $\epsilon: y = 2x - \kappa^2, \kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)
 β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ . (Μονάδες 8)
 γ) Για $\kappa = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 5)
 δ) Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (AB). (Μονάδες 7)

12682. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x + 3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g . (Μονάδες 10)
 γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 7)

12728. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔE είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ . (Μονάδες 6)
 Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και B ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε $B\Gamma$ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι

$$y_{\Gamma} = 4 - \frac{1}{2}t.$$

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραpezίου $OB\Gamma\Delta$ και να

γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)

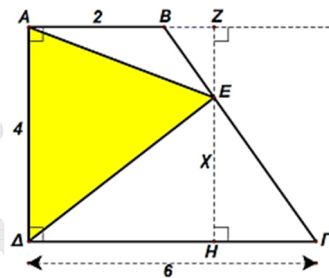
δ) Αν το εμβαδόν του τραpezίου ισούται με 9, 75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ . (Μονάδες 6)

12834. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε $AB=2$, $AD=4$, $\Gamma\Delta=6$, ενώ η AD είναι κάθετη στην AB και επίσης κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Το σημείο E μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ και ονομάζουμε x την απόσταση του E από την $\Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AE\Delta$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης; (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$. (Μονάδες 8)



13055. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$. (Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$. (Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία. (Μονάδες 7)

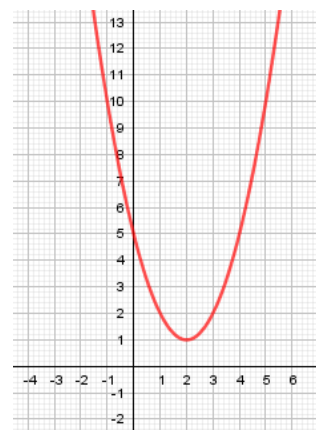
13091. Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) i. (Μονάδες 7)

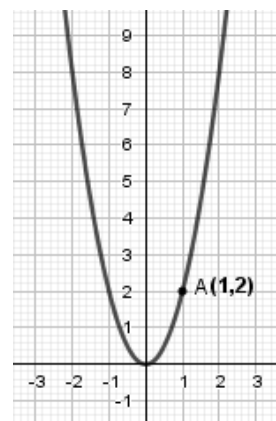
γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.



(Μονάδες 6)

12942. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο a .

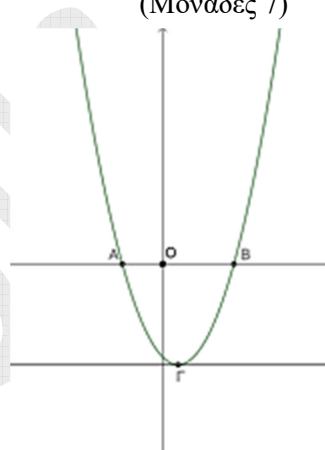
- α) Αν το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a = 2$. (Μονάδες 6)
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1, 6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$. (Μονάδες 4)
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε. (Μονάδες 4)
- γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$. (Μονάδες 4)
- ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.



(Μονάδες 7)

13314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον x' έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (Μονάδες 6)
- β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$. (Μονάδες 6)
- γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (Μονάδες 6)
- δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ . (Μονάδες 7)



13367. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

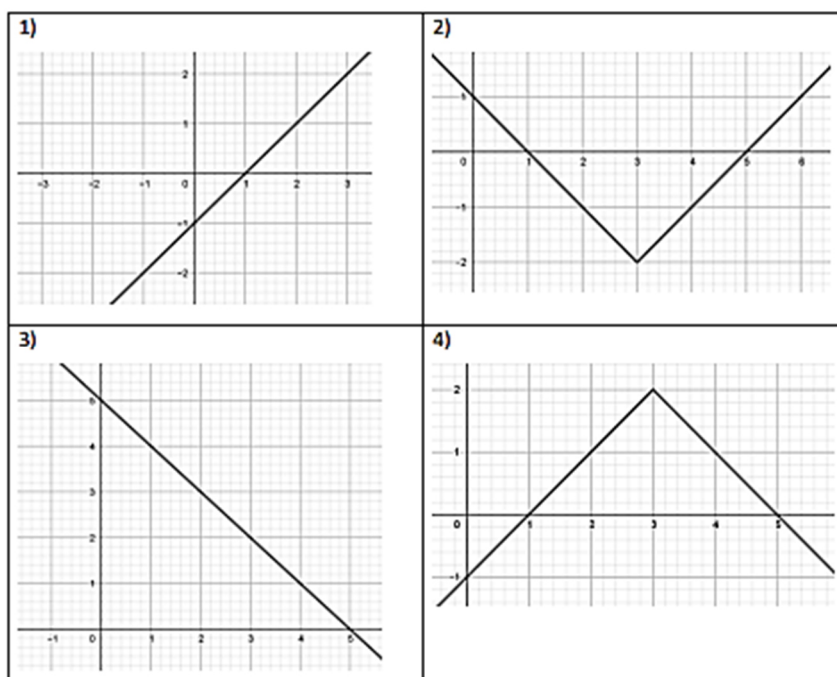
- α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x' . (Μονάδες 9)
- β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x' είναι αμβλεία τότε:
- i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. (Μονάδες 5)
- iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (Μονάδες 5)

13473. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

- α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A . (Μονάδες 6)
- Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.
- β) i. Να δείξετε ότι $A=2$. (Μονάδες 4)
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$. (Μονάδες 5)
- γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3 - x$ και $g(x) = x - 1$ για $1 \leq x \leq 3$. (Μονάδες 6)
- ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)| = 2$. (Μονάδες 4)

12681. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4 - (|6 - 2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x - 3|$. (Μονάδες 5)
- β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 5 - x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Η γραφική παράσταση της f είναι:



(Μονάδες 9)

γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x - 3| > -1$. (Μονάδες 5)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα. (Μονάδες 6)

13298. Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1^{ου} τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B .

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες

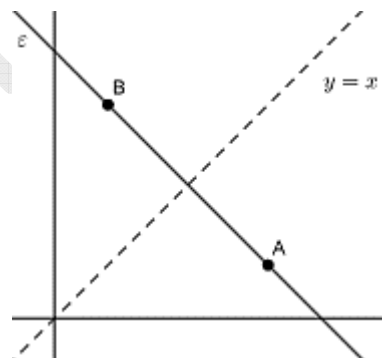
$(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B .

(Μονάδες 8)

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

(Μονάδες 8)



14640. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda^2 - 1$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία ε έχουν κοινά σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία ε έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , τότε:

i. να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. να δείξετε ότι το κοινό σημείο είναι το $A(1, -1)$.

(Μονάδες 7)

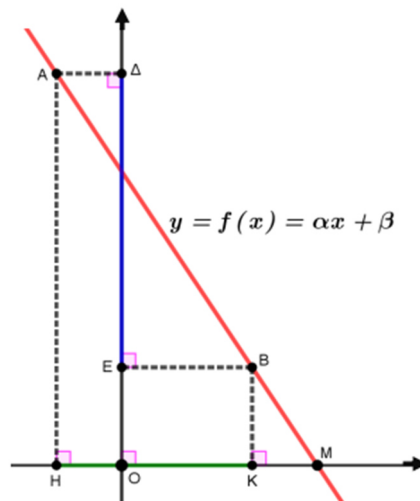
γ) Αν $\lambda \neq 0$, να δείξετε ότι τα σημεία τομής της ευθείας ε και της γραφικής παράστασης της f είναι τα $B(1 - |\lambda|, \lambda^2 - 1)$ και $\Gamma(1 + |\lambda|, \lambda^2 - 1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων B , A και Γ είναι όροι αριθμητικής προόδου για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

14556. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = ax + \beta$, όπου a, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x, y είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $a = -\frac{3}{2}$. (Μονάδες 9)

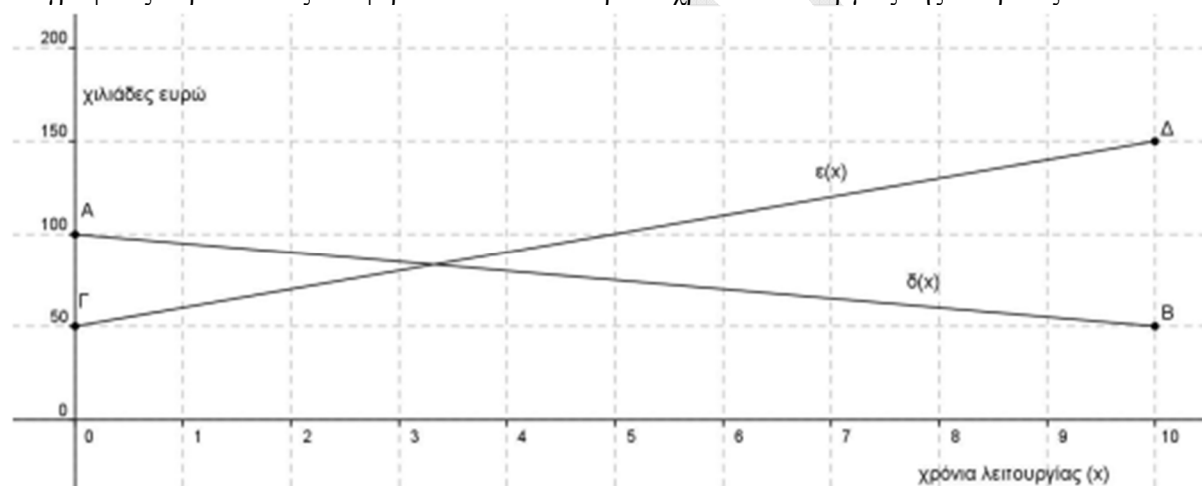
β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$. (Μονάδες 7)

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. (Μονάδες 9)

14477. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μίας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία ΓΔ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\epsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x), \epsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

3ο θέμα

14576. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$. (Μονάδες 5)