**5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ (σελ.132)**

****

****

**ΠΡΟΣΟΧΗ**

**α1**$\ne 0$**, λ**$\ne 0$**(λόγος της προόδου)**



**Βασικές χρήσεις του τύπου αν = α1λν-1**

* Μπορούμε να βρούμε τον νιοστό όρο ( ή γενικό τύπο) μιας γεωμετρικής προόδου κάνοντας αντικατάσταση τον πρώτο όρο α1 και τον λόγο λ (όχι το ν)

****

1. **3, 6, 12,….**

**Έχουμε α1 = 3, με λόγο λ = α2/α1 = 6/3 = 2**

**Ο νιοστός όρος είναι αν = α1λν-1 ⬄ αν = 3\*2ν-1**

**ιι)** α1 = 2/3, α2 = 2 , α3=6, ….

 Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι : λ = α2/α1 = 2/(2/3) = 6/2 = 3

Ο νιοστός της όρος είναι : αν = $\frac{2}{3}$(3)ν-1 = 2\*3ν-1/3 = 2\*3ν-1-1 = 2\*3ν-2 , δλδ **αν = 2\*3ν-2**

**ιν) 1/4, 1/8, 1/16, …**

 Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι : λ = α2/α1 = $\frac{1/8}{1/4}$ = $\frac{4}{8}$ = 1/2

 Ο νιοστός της όρος είναι : αν = **α1λν-1 =** $\frac{1}{4}\*(\frac{1}{2})^{ν-1}$**=** $\frac{1}{2^{2}}\* \frac{1}{2^{ν-1}} $**=** $ \frac{1}{2^{2}2^{ν-1}} $**=** $\frac{1}{2^{2+ν-1}} $**=** $\frac{1}{2^{ν+1}}$ **, άρα** αν = $\frac{1}{2^{ν+1}}$**.**

* Μπορούμε να βρούμε την τιμή κάποιου όρου μιας γωμετρικής προόδου κάνοντας αντικατάσταση τον πρώτο όρο α1 , τον λόγο λ και το ν.



ι) 1/4 , 1/2, 1 , ….

α1 = ¼ και **ο** λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι : λ = α2/α1 = $\frac{1/2}{1/4}$ = $\frac{4}{2}$ = 2

Ο 9ος όρος της προόδου είναι : α9 = α1 λ9-1 = $\frac{1}{4}\*$28 = $\frac{2^{8}}{2^{2}}$ = 26 = 64

ιι) 2,6,18,…..

 α1 = 2 και λ =α2/α1 = 6/2 = 3

α7 = **α1λ7-1 ⬄ α7 = 2\*36 = 2\*729 = 1458**



* Μπορούμε να βρούμε ποιος όρος της προόδου ισούται με κάποια τιμή, κάνοντας αντικατάσταση τον πρώτο όρο α1 , τον λόγο λ και λύνοντας ως προς το ν. (εκτός ύλης όπως και η ασκ.6 σελ.136)



Ισχύει λ =2, και α5 = 32/3 ⬄ α1λ5-1 = 32/3 ⬄ α124 = 32/3 ⬄ 16α1 = 32/3 ⬄ α1 = $\frac{32}{3∙16}$ ⬄ α1 = $\frac{2}{3}$



Ισχύει α6 =96 ⬄ α1λ6-1 = 96 ⬄ α1λ5 = 96

 α3 = 12 ⬄ α1λ3-1 = 12 ⬄ α1λ2 = 12 Διαιρούμε κατά μέλη

 και έχουμε $\frac{α\_{1}λ^{5}}{α\_{1}λ^{2}}= \frac{96}{12}$ ⬄ λ5-2= 8 ⬄ λ3 = 8 ⬄ λ3 =23

ή ⬄ λ = $\sqrt[3]{8}$ ⬄ λ =2

τότε α1λ2 = 12 ⬄ α122 = 12 ⬄ 4α1 = 12 ⬄ α1 = 3

****

**ι) α10 = 125/64 ⬄ α1 λ 10-1 = 125/64 ⬄ α1 λ 9 = 125/64**

 **α4 = 125 ⬄ α1 λ 4-1 = 125 ⬄ α1 λ 3 = 125 διαιρούμε κατά μέλη**

 **λ6 =** $\frac{\frac{125}{64}}{125}$ **⬄ λ6 =** $\frac{125}{125∙64}$ **⬄ λ6 =** $\frac{1}{64}$ **⬄ λ6 = (1/2) 6 ⬄ λ = ½ ή -1/2**

* **αν λ =1/2 τότε α1 λ 3 = 125** ⬄ **α1 (1/2) 3 = 125** ⬄ **α1/8 = 125** ⬄ **α1 = 8\*125** ⬄ **α1 = 1000**

**και α14 = α1 λ 14-1 = 1000\*(1/2) 13 = 1000/8192**

* **αν λ = -1/2 τότε α1 λ 3 = 125** ⬄ **α1 (-1/2) 3 = 125** ⬄ **-α1/8 = 125** ⬄ **α1 = -8\*125** ⬄ **α1 = -1000**

**και α14 = α1 λ 14-1 = -1000\*(-1/2) 13 =- 1000/8192**

**ιι) α23 = 32**$\sqrt{2}$ **⬄ α1 λ 23-1 = 32/**$\sqrt{2}$ **⬄ α1 λ 22 = 32**$\sqrt{2}$

 **α13 =** $\sqrt{2}$ **⬄ α1 λ 13-1 =** $\sqrt{2}$ **⬄ α1 λ 12 =** $\sqrt{2}$ **διαιρούμε κατά μέλη**

**και προκύπτει :** $\frac{λ^{22}}{λ^{12}}$ **= 32 ⬄ λ10 = 32 ⬄** λ = $\pm \sqrt[10]{32}$ **ή λ10 = 25 ⬄ ή λ10 =** $[\sqrt{2}$**2 ]5 ⬄**

 **⬄ λ10 =** $(\sqrt{2}$**)10  τότε λ =** $\sqrt{2}$ **ή λ= -**$\sqrt{2}$

****

**(σελ. 87)**

**Υπάρχουν δύο γεωμ. πρόοδοι με αυτούς τους όρους.**

**Αν λ =** $\sqrt{2}$ **τότε α1 λ 12 =** $\sqrt{2}$ **⬄ α1** $\sqrt{2}$ **12 =** $\sqrt{2}$ **⬄ α1 =** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{12}}$ **⬄ α1 =** $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}^{2})^{6}}$ **⬄ α1 =** $\frac{\sqrt{2}}{2^{6}}$ **και**

 **α21 = α1 λ 21-1 =** $\frac{\sqrt{2}}{2^{6}}$$\sqrt{2}$**10 =** $\frac{\sqrt{2}}{2^{6}}$ **25 =** $\frac{\sqrt{2}}{2}$**, δηλαδή α21 =** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**αν λ =** $-\sqrt{2}$ **τότε α1 λ 12 =** $\sqrt{2}$ **⬄ α1** $(-\sqrt{2}$**) 12 =** $\sqrt{2}$ **⬄ α1 =** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{12}}$ **⬄ α1 =** $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}^{2})^{6}}$ **⬄ α1 =** $\frac{\sqrt{2}}{2^{6}}$ **και**

 **α21 = α1 λ 21-1 =** $\frac{\sqrt{2}}{2^{6}}$$(-\sqrt{2}$**)10 =** $\frac{\sqrt{2}}{2^{6}}$ **25 =** $\frac{\sqrt{2}}{2}$**, δηλαδή α21 =** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

****

****

****

1. **-4, 8, -16 , ….**

**α1 = -4 και λ = α2/α1 = 8/ (-4) = -2, δλδ λ = -2**

**άρα S10= α1**$\frac{λ^{10}-1}{λ-1}$ **= -4**$\frac{(-2)^{10}-1}{-2-1}$ **= -4**$\frac{1024-1}{-3}$ **= -4**$\frac{1023}{-3}$ **= 4\*341=1364**

**ιν) 8, 4, 2,…..**

 **α1 = 8 και λ = α2/α1 = 8/2 = 1/2, δλδ λ = 1/2**

**άρα S10= α1**$\frac{λ^{10}-1}{λ-1}$ **= 8**$\frac{(1/2)^{10}-1}{1/2-1}$**= 8**$ \frac{\frac{1}{2^{10}}-1}{\frac{1}{2}-1}$**= 8**$ \frac{\frac{1}{2^{10}}-\frac{2^{10}}{2^{10}}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}$**= 8**$ \frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{\frac{-1}{2}}$**= 8** $\frac{2(1-2^{10})}{-2^{10}}$ **= -** $\frac{2^{4}(1-2^{10})}{2^{10}}$ **=**

 **= -** $\frac{1-1024}{2^{6}}$ **= 1023/64**

****

**H σκακιέρα αποτελείται από 64 τετραγωνα.**

**α1 =1 πλήθος κόκκων ρυζιού στο 1ο τετράγωνο**

**α2 = 2 πλήθος κόκκων ρυζιού στο 2ο τετράγωνο**

**α3 = 4 πλήθος κόκκων ρυζιού στο 3ο τετράγωνο**

**α4 = 8 πλήθος κόκκων ρυζιού στο 4ο τετράγωνο**

**Οι κόκκοι ρυζιού που αντιστοιχούν σε κάθε τετράγωνο, μπορούν να θεωρηθούν ως όροι γεωμετρικής προόδου με α1 = 1 και λόγο λ = 2**

**Ο βασιλιάς θα πρέπει να δώσει στον εφευρέτη συνολικά S64 κόκκους ρυζιού.**

**S64 = α1**$\frac{λ^{64}-1}{λ-1}$ **= 1**$\frac{2^{64}-1}{2-1}$ **= 264-1 =** 18.446.744.073.709.552.000 – 1

ΑΣΚΗΣΗ

Ένα παιδί πρότεινε στους γονείς του να πάρει ως χαρτζηλίκη 1 λεπτό του ευρώ την πρώτη μέρα, 2 λεπτά την δεύτερη, 4 λεπτά την Τρίτη μέρα ….. .Πόσα ευρώ θα πάρει το παιδί ως χαρτζιλίκι στο τέλος του μήνα;

α1 = 1/100 λ=2

α2 = 2/100

α3 =4/100 S30 = 1/100($\frac{2^{30}-1}{2-1}$ **) = 1/100 (230-1) = 1/100\*(**1.073.741.824-1) = 1073741823/100 = 10.737.418,23 ευρώ



α1 =3 αρχικός αριθμός των βακτηριδίων

α2 = 6 αριθμός των βακτηριδίων στο τέλος της 1ης ώρας

α3= 12 αριθμός των βακτηριδίων στο τέλος της 2ης ώρας

έστω η γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο το 3 και λ =2 , τότε

α13 αριθμός των βακτηριδίων στο τέλος της 12ης ώρας

α13= α1λ13-1 = 3\*212 = 3\* 4096 = 12288 βακτηρίδια



****

1. **Ο γεωμ. Μέσος των α= 5 και γ=20 είναι**

 **β 2 = 5\*20 ⬄ β2 = 100 ⬄ β =** $\pm \sqrt{100}$ **⬄ β =** $\pm 10$

**Ο γεωμ. Μέσος των α=1/**$\sqrt{3}$ **και γ=**$\sqrt{3}$ **είναι**

**β 2 = 1/**$\sqrt{3}$**\***$\sqrt{3} $**⬄ β2= 1 ⬄ β =** $\pm 1$

**ιι) οι αριθμοί χ-4, χ+1 και χ-19 αποτελούν διαδοχικοί όροι γεωμ. Προόδου άρα**

 **β= χ+1 είναι γεωμ. Μέσος των α= χ-4 και γ=χ-19 οπότε**

 **β2 =α\*γ ⬄ (χ+1)2 = (χ-4)(χ-19) ⬄ χ2 +2χ+1 = χ2-19χ-4χ+76 ⬄**

 **2χ+19χ+4χ = 76-1 ⬄ 25χ = 75 ⬄ χ =3**

**3-4 =-1, 3+1 = 4, 3 -19 = -16 (λ = 4/(-1)= -4)**

**ΘΕΜΑ 4ο (2000)**

Ένας πληθυσμός βακτηριδίων **τριπλασιάζεται** σε αριθμό κάθε μια ώρα.

**A.** Αν αρχικά υπάρχουν **10 βακτηρίδια**, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από **6 ώρες.**

Μονάδες 9

Έστω η γεωμ. Πρόοδος με α1 = 10 και λόγο λ = 3,

α2 = 10\*3 = 30 πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από **1 ώρα**

τότε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από **7 ώρες είναι**

α7 = α1λ7-1 = 10\*36= 10\*729 = 7290 βακτηρίδια.

**B.** Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων **ψεκάζεται** με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την **καταστροφή 33⋅10** βακτηριδίων κάθε ώρα.

**B.1.** Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν **20 ώρες** μετά τον ψεκασμό.

Μονάδες 8

Έστω η αριθμητική πρόοδος με **α1=7290** και ω =**33⋅10 = -270** τότε

α2= α1-270 = 7290-270 = 2160 αριθμός των βακτηριδίων **1 ώρα** μετά τον ψεκασμό.

α3= α2-270 = 7290-270 = 1890 αριθμός των βακτηριδίων **2 ώρες** μετά τον ψεκασμό.

 Άρα

α21= α1 + (21-1) ω = 7290 +20\*(-270) =

 = 7290-5400 = 1890 αριθμός των βακτηριδίων **20 ώρες** μετά τον ψεκασμό.

**B.2.**Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια; Μονάδες 8

Πρέπει να βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος του μηδενός .

αν $=$ 0 ⬄ 7290 + (ν-1)(-270) $=$ 0 ⬄ 7290 -270ν +270 $=$0 ⬄

 7020 $=$ 270ν ⬄ ν$=$ 7020/270 ⬄ ν$=$ 702/27 ⬄ ν$=$ 26

Άρα α26 = 0 μετά από 25 ώρες έχουν εξοντωθεί όλα τα βακτηρίδια.

ΘΕΜΑ 4ο (1999)

Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δραχμές και μικρότερη από 640 χιλιάδες δραχμές.

Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής :

* Να δοθεί προκαταβολή 120 χιλιάδες δραχμές.
* Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
* Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω χιλιάδες δραχμές, όπου ω θετικός ακέραιος.
* Η τέταρτη δόση να είναι 48 χιλιάδες δραχμές.

α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω. Μονάδες 5

β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω. Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την τιμή του ω. Μονάδες 5

δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

Μονάδες 5

ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Μονάδες 5