

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι το γινόμενο των ριζών, ισούται με:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Να συμπληρώσετε την παρακάτω ισότητα (χωρίς απόδειξη) και να τη μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

Το άθροισμα των ριζών x_1, x_2 είναι ίσο με:

$$S = x_1 + x_2 = \dots$$

15 μονάδες

A.2. Να απαντήσετε αν η κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να μεταφέρετε τις απαντήσεις στο τετράδιό σας.

1. Η εξίσωση $|x - 1| = -a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι αδύνατη.
2. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$.
3. Αν ισχύει $a \cdot \gamma < 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.
4. Η γραφική παράσταση C_f μίας συνάρτησης f , τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα το πολύ σημείο.
5. Αν για τους $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $a < \beta$, τότε θα ισχύει $a^2 < \beta^2$.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

B.1. Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

(Μονάδες 9)

B.2. Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

- i. Να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

(Μονάδες 9)

ii. Να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (a_n) .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ η οποία έχει δύο ρίζες πραγματικές τις x_1, x_2 .

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda \leq 4$, (6 μονάδες)

Γ2. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - (x_1 \cdot x_2)^2 \leq 1 \quad (10 \text{ μονάδες})$$

Γ3. Για την μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα Γ2 να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης A , όπου:

$$A = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2} \quad (9 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}$$

Δ.1. Για $\alpha = 1$ να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

Δ.2. Να βρείτε για ποιες τιμές του α , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

Δ.3. Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

Ματσάγκος Ιωάννης

Αρκάς Ροδόλφος

Μαντζαβίνος Αναστάσιος

Σταχτέας Χαράλαμπος

