|  |  |
| --- | --- |
| *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*  ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ  **3ο ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ** | Ορισμοί  και  Τυπολόγιο |

**Ενότητα 1.1. Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα**

**Πείραμα τύχης** λέγεται κάθε πείραμα που εάν επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες

συνθήκες είναι αδύνατο να προβλεφθεί το αποτέλεσμα.

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης **λέγονται δυνατά**

**αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος**.

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος (sample space)** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.

Αν δηλαδή ω1,ω2 ,...,ωκ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: Ω = {ω1 , ω2 ,..., ωκ }.

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται

**ενδεχόμενο (event)** ή γεγονός.

Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και

**σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.

Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός

ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται ή συμβαίνει.**

Γι’ αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα

πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω.

Γι’ αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.

Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ∅ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης.

Γι’ αυτό λέμε ότι το ∅ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

**Πράξεις με Ενδεχόμενα**

• Το ενδεχόμενο A ∩ B , που διαβάζεται “Α τομή Β” ή “Α και Β” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.

• Το ενδεχόμενο A ∪ B , που διαβάζεται “Α ένωση Β” ή “Α ή Β” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.

• Το ενδεχόμενο A′ , που διαβάζεται “όχι Α” ή “συμπληρωματικό του Α” και πραγματο-ποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το Α. Το A′ λέγεται και “αντίθετο του Α”.

• Το ενδεχόμενο A − B , που διαβάζεται “διαφορά του Β από το Α” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β. Είναι εύκολο να δούμε ότι A − B = A ∩ B′ .

|  |  |
| --- | --- |
| Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται | ω∈ A |
| Το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται | ω∈ A′ (ή ω∉ A ) |
| Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται | ω∈ A ∪ B |
| Πραγματοποιούνται αμφότερα τα Α και Β | ω∈ A ∩ B |
| Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β | ω∈(A ∪ B )΄ |
| Πραγματοποιείται μόνο το Α | ω∈ A − B (ή ω∈ A ∩ B ΄) |
| Η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται  την πραγματοποίηση του Β | A ⊆ B |

Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται **ασυμβίβαστα**, όταν A ∩ B = ∅ .

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

**Ενότητα 1.2. Πιθανότητες: Ορισμοί και εφαρμογές**

**Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας**

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και

παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα

καθενός από τα απλά ενδεχόμενα {K}, {Γ} τείνει στον αριθμό 1/2 . Ομοίως θα μπορούσαμε να

διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά

ενδεχόμενα {1},{2},{3},{4},{5} και {6} τείνει στον αριθμό 1/6 . Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε

ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα

Ως πιθανότητα ενός ενδεχόμενου Α ορίζουμε τον αριθμό:

**Ρ(Α)= =**

Έτσι, έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι

1. **Ρ(Ω)= ==1**

2. **Ρ(Ǿ)= ==0**

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει **0 ≤ P(A) ≤ 1**, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

**Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας**

Έστω Ω = {ω1 ,ω2 ,...,ων } ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε

απλό ενδεχόμενο {ωi } αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με P(ωi ) ,

έτσι ώστε να ισχύουν:

• 0 ≤ P(ωi ) ≤ 1

• P(ω1 ) + P(ω2 ) + ... + P(ων ) = 1.

Τον αριθμό P(ωi ) ονομάζουμε **πιθανότητα του ενδεχομένου {ωi }**.

Ως **πιθανότητα P(A) ενός ενδεχομένου** A = {α1,α2 ,...,ακ } ≠ ∅ ορίζουμε το άθροισμα

P(α1 ) + P(α2 ) + ... + P(ακ ) , ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου ∅ ορίζουμε τον αριθμό

P(∅) = 0 .

**Ενότητα 1.3. Πιθανότητες και πράξεις με ενδεχόμενα**

**Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων**

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες,

γνωστές ως “κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων”. Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

**1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:**

**P(A ∪ B) = P(A) + P(B)**

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως απλός προσθετικός νόμος (simply additive law) και ισχύει και για

περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα

έχουμε P(A ∪ B ∪ Γ) = P(A) + P(B) + P(Γ) .

**2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A′ ισχύει:**

**P(A′) = 1− P(A)**

**3. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:**

**P(A ∪ B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B)**

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως προσθετικός νόμος (additive law).

**4. Αν A ⊆ B , τότε P(A) ≤ P(B)**

**5. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει**

**P(A − B) = P(A) − P(A ∩ B) .**

**Ενότητα 1.4. Συνδυαστική & Πιθανότητες**

**Βασική αρχή απαρίθμησης.**

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις M**1**, M2, ..., Μν. Αν η φάση M1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με k1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση M2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με k2 τρόπους , ..., και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση Μν μπορεί να πραγματοποιηθεί με κν τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με το γινόμενό τους δηλαδή

**Τρόποι = ν1·ν2···νκ**

**Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ,** με κν≤, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κδιαφορετικά στοιχεία του Α και να τα βάλουμε σε μια σειρά.Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ συμβολίζεται με ∆κν

∆κν = ν(νω-1)(ν-2)….(ν-κ+1)

Στην περίπτωση που πάρουμε και τα ν στοιχεία ενός συνόλου Α και τα βάλουμε σε μια σειρά, τότε έχουμε μια διάταξη των ν στοιχείων ανά ν η οποία λέγεται **μετάθεση των ν στοιχείων**. Το πλήθος ∆νν των μεταθέσεων των ν στοιχείων συμβολίζεται με Μν και είναι

**Μν= ν! και διαβάζεται ν παραγοντικό.**

Γενικά:

**Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ** λέγεται κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζεται με Δνκ και αν εργαστούμε όπως πρίν

βρίσκουμε Δνκ =

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο συνδυασμοί των ν ανά κ είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον.