|  |  |
| --- | --- |
| *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ **1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ**  | MAΘΗΜΑ 9ΟΑναγωγή στο 1Ο τεταρτημόριο  |

Το

 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

* ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
* ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
* ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

**1. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ΓΩΝΙΕΣ **ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ****x, – x**  **συν ( – x )** = συνx **ημ ( – x )** = – ημx **εφ ( – x )** = – εφx **σφ ( – x )** = – σφx |  | ΓΩΝΙΕΣ**ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ****x,  – x** **συν (– x)** = ημx **ημ (– x)** = συνx **εφ (– x)** = σφx **σφ (– x)** = εφx |
|  |  |
| ΓΩΝΙΕΣ**ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ****x, π – x** **συν ( π – x )** = – συνx **ημ ( π – x )** = ημx **εφ ( π – x )** = – εφx **σφ ( π – x )** = – σφx |  |
|  |  |  |
| ΓΩΝΙΕΣ**ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ π****x, π + x** **συν ( π + x )** = – συνx **ημ ( π + x )** = – ημx **εφ ( π + x )** = εφx **σφ ( π + x )** = σφx |

**Ένας μνημονικός κανόνας**

**Πολλαπλάσια του π**

Όταν δυο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π, 3π και γενικά πολλαπλάσια του π τότε έχουν ομώνυμους (ίδιους) τριγωνομετρικούς αριθμούς. Για τον υπολογισμό του προσήμου χρειάζεται να γνωρίζουμε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο. Σκεφτόμαστε ειδικότερα:

**α.** Τα **περιττά** πολλαπλάσια του π καταλήγουν πάντα στο π του τριγωνομετρικού κύκλου, συνεπώς χρησιμοποιούμε τη θέση αυτή για σημείο αναφοράς.

**β.** Τα **άρτια** πολλαπλάσια του π είναι απλά πολλαπλάσια ολόκληρων κύκλων, συνεπώς απλά τα αγνοούμε.

**Πολλαπλάσια του π/2**

Όταν δύο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά π/2, 3π/2 και γενικά (περιττά) πολλαπλάσια του π/2 τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εναλλάσσονται (ημ με συν και εφ με σφ). Για να βρούμε το πρόσημο, διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος, που μας δίνεται, με το 4 (έτσι βρίσκουμε και απορρίπτουμε τους παραπανίσιους κύκλους) και κρατάμε το υπόλοιπο. Αν το τελευταίο είναι 1 τότε πηγαίνουμε στο π/2, αν είναι 3 στο 3π/2.

**Παρατήρηση:** Για **άρτια** πολλαπλάσια του π/2 εκτελούμε απλά τη διαίρεση με το 2 και αναγόμαστε σε πολλαπλάσιο του π.

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ**

Μ1: Για να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς που περιέχουν αρνητικές γωνίες πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:

* ημ(-ω)=-ημω
* εφ(-ω)=-εφω
* συν(-ω)=συνω
* σφ(-ω)=-σφω

Μ2: Για να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς που περιέχουν παραπληρωματικές γωνίες πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:

* ημ(180ο-ω)=ημω
* εφ(180ο-ω)=-εφω
* συν(180ο-ω)=-συνω
* σφ(180ο-ω)=-σφω

Μ3: Για να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς που περιέχουν γωνίες που διαφέρουν κατά 180ο πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:

* ημ(180ο+ω)=-ημω
* εφ(180ο+ω)=εφω
* συν(180ο+ω)=-συνω
* σφ(180ο+ω)=σφω

Μ4: Για να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς που περιέχουν συμπληρωματικές γωνίες πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:

* ημ(90ο-ω)=συνω
* εφ(90ο-ω)=σφω
* συν(90ο-ω)=ημω
* σφ(90ο-ω)=εφω

Μ5: Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική παράσταση που περιέχει διάφορες γωνίες:

α) Υπολογίζουμε τον κάθε τριγωνομετρικό αριθμό χωριστά.

β) Αντικαθιστούμε την τιμή που βρίσκουμε στην παράσταση.

γ) Καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

Μ6: Για να αποδείξουμε μια ανισότητα που περιέχει διάφορες γωνίες:

α) Υπολογίζουμε τον κάθε τριγωνομετρικό αριθμό χωριστά.

β) Αντικαθιστούμε την τιμή που βρίσκουμε στην παράσταση.

γ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα έχοντας υπόψη ότι:

* -1συνx1
* -1ημx1
* Τον πίνακα προσήμων των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω.

**ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

ΑΛΓΕΒΡΑ B’ ΕΠΑΛ

**ΓΩΝΙΕΣ ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ**



 **γωνία ω**

**γωνία -ω**

 **ημ(-ω) = - ημω**

 **συν(-ω) = συνω**

 **εφ(-ω) = - εφω**

 **σφ(-ω) = - σφω**

⚫ **Ίδιο συνημίτονο**, αντίθετους όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

**ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ 1800**



 **ημ(π- ω) = ημω**

 **συν(π- ω) = - συνω**

 **εφ(π- ω) = - εφω**

 **σφ(π- ω) = - σφω**

**γωνία π-ω**

**γωνία ω**

⚫ **Ίδιο ημίτονο**, αντίθετους όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

**ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΑ 1800**



 **ημ(π+ω) = -ημω**

 **συν(π+ω) = - συνω**

 **εφ(π+ω) = εφω**

 **σφ(π+ω) = σφω**

**γωνία π+ω**

**γωνία ω**

⚫ **Ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη**, αντίθετα **ημίτονο** και **συνημίτονο**

**ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ 900**



**γωνία - ω**

**γωνία ω**

 **ημ(- ω) = συνω**

 **συν(- ω) = ημω**

 **εφ(- ω) = σφω**

 **σφ(- ω) = εφω**

⚫ **Το ημίτονο της μίας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και**

 **η εφαπτομένη της μίας ισούται με την συνεφαπτομένη της άλλης**.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1.** Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας .

Απάντηση:

Τα  γράφονται : 

Άρα 

και 

και 

και 

**2.** Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας .

Απάντηση:

Τα  γράφονται : …………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

**3.** Να απλοποιήσετε την παράσταση : .

Απάντηση:

αντικαθιστούμε το:

   

και έχουμε: 

**4.** Να δείξετε ότι : .

Απάντηση:

αντικαθιστούμε το:

  

  

και έχουμε: 

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

**5.** Σε κάθε τρίγωνο να δείξετε ότι : .

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι:  επομένως 

Άρα 

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

1. Να αποδείξετε ότι : 
2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

Α = συν2 0° + συν2 30° + συν2 45° + συν2 60° + συν2 90°

Β = 

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 210°, 135°, 330°
2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 150°, 120°
3. Αν 0° < x < 180°, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

Α = ημx∙συν(180° − x) + συνx∙ημ(180° − x)

1. Αν 0° < x < 180°, να λύσετε τις εξισώσεις:

2∙ημ2x − 2ημx + 1 = 0 και 2∙συν2x − 3∙συνx − 2 = 0

1. Να εξηγήσετε γιατί είναι:

ημ(90° + x) = συνx και συν(90° + x) = − ημx

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α = 

Β = 

1. Να αποδείξετε ότι:

**●** ημ2 27° + συν2 153° = 1

**●** συν2 16° + συν2 74° = 1

1. Αν 2∙συν2x + 3∙συνx − 2 = 0 και 0° < x < 360° να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.