|  |  |
| --- | --- |
| *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ **1ο ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ**  | MAΘΗΜΑ 4ΟΕξισώσεις και ανισώσειςπου ανάγονται σε Πολυωνυμικές  |

Το

 20o ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

* ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
* ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
* ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

**3. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές**

Πολλές εξισώσεις, με μια πρώτη ματιά, δεν έχουν πολυωνυμική μορφή. Πολλές ούτε με τη δεύτερη ματιά! Ωστόσο, με απλές αλγεβρικές μεθόδους μπορούμε να τις ανάγουμε σε ισοδύναμες πολυωνυμικές, τις οποίες κατόπιν επιλύουμε σχεδόν με κλειστά τα μάτια, έπειτα από τόσες, απίστευτες ώρες εξάσκησης που έχουμε περάσει για να φτάσουμε σε αυτό το σημείο μαθηματικής ωριμότητας. Τέτοιες εξισώσεις, μπορεί να είναι: κλασματικές, άρρητες, τριγωνομετρικές, κλπ. Ας τις δούμε μία-μία:

![MC900441343[1]]()

Όπως καλά θυμόμαστε, εξισώσεις στις οποίες εμφανίζουν άγνωστο σε παρονομαστή ονομάζονται κλασματικές. Για παράδειγμα:



![MC900013375[1]]()

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π.

Στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

**1.** Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

**2.** Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.

**3.** Βρίσκουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, ώστε Ε.Κ.Π. ≠ 0.

**4.** Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.

**5.** Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Σύμφωνα με τους περιορισμούς.

**6.** Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

**7.** Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως έχουμε προαναφέρει.

**8.** Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.

![MC900441343[1]]()

Πρόκειται για εξισώσεις που περιλαμβάνουν τον άγνωστο σε υπόρριζη ποσότητα. Για παράδειγμα:



Τότε, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

**1**. Βρίσκουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, ώστε οι υπόριζες ποσότητες να είναι μη-αρνητικές (δηλ. ≥ 0).

**2**. Επειδή, συνήθως, καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε τετραγωνικές ρίζες, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, ώστε να απαλοιφούν οι ρίζες. Αν για διάφορους λόγους, κάποιες ρίζες εξακολουθούν να ![MC900013375[1]]()«αντιστέκονται», αφού εκτελέσουμε όσες πράξεις είναι δυνατόν να γίνουν, υψώνουμε και πάλι στο τετράγωνο.

**3.** Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Σύμφωνα με τους περιορισμούς.

**4.** Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

**5.** Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως έχουμε προαναφέρει.

**6.** Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.

**ΠΡΟΣΟΧΗ!!!**

**7.** Απαιτείται, οπωσδήποτε, να **επαληθεύουμε** επιπλέον και την αρχική εξίσωση, για καθεμία από τις **δεκτές** ρίζες που βρήκαμε, γιατί συμβαίνει συχνά – εξαιτίας της ύψωσης στο τετράγωνο – να δημιουργούνται λύσεις, που δεν αντιστοιχούν στην αρχική εξίσωση. Έτσι, αν χρειαστεί απορρίπτουμε ακόμα και κάποιες από τις δεκτές ρίζες.

![MC900441343[1]]()

Αν συναντήσουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις, οι οποίες κατά τ’ άλλα μας θυμίζουν πολυώνυμα, όπως για παράδειγμα:

ημ4x – 2 ημ3x – 7 ημ2x + 8 x + 12 = 0

τότε, αρκεί να κάνουμε τα εξής:

**1.** Θέτουμε τον άγνωστο τριγωνομετρικό αριθμό ίσο μια νέα μεταβλητή, έστω y, και κατόπιν λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση, που προκύπτει.

![MC900013375[1]]()**2.** Αν ο τριγωνομετρικός αριθμός που αντικαθιστούμε είναι ημίτονο ή συνημίτονο, δεν ξεχνάμε να θέσουμε τους ανάλογους περιορισμούς, εφόσον:

–1 ημx 1 και –1 συνx 1

 Αν πρόκειται για εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, συνx ≠ 0 ή ημx ≠ 0, αντίστοιχα.

**3.** Λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.

**4.** Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται, σύμφωνα με τους περιορισμούς.

**5.** Ξε–θέτουμε και λύνουμε τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές εξισώσεις που προκύπτουν, από τις δεκτές λύσεις της πολυωνυμικής.

![MC900441343[1]]()

Εξισώσεις της μορφής **α x4 + β x3 + γ x2 + β x + α = 0** (α ≠ 0) ανήκουν σε μια ειδική κατηγορία πολυωνυμικών εξισώσεων, που ονομάζονται **αντίστροφες**. Για παράδειγμα:

x4 – 4 x3 + 6 x2 – 4 x + 1 = 0

Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, άρα:

![MC900013375[1]]()

**1.** Διαιρούμε όλους τους όρους με x 2.

**2.** Ομαδοποιούμε τα ζεύγη με x ,  και x 2 ,  .

**3.** Βγάζουμε κοινό παράγοντα, αν υπάρχει, από κάθε ζεύγος.

**4.** Θέτουμε  = y και  = y2 – 2 .

 Γιατί: = x2 + 2 x +   y2 = x2 + 2 +  ⇔ y2 – 2 = x2 + 

**5.** Λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.

**6.** Αντικαθιστούμε στην εξίσωση  = y, όπου είχαμε θέσει αρχικά, και για κάθε λύση της πολυωνυμικής βρίσκουμε και μια αντίστοιχη λύση για το x.

**5. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές**

**1.** Να λύσετε τις εξισώσεις και ανισώσεις:

**\***

 **α.** x 4 – 12x 2 + 27 = 0 **β.** 2y 4 – 7y 2 – 4 ≥ 0

 **γ.** 3t 4 + 5t 2 + 2 = 0 **δ.**  φ 4+ 9φ 2 + 24 = 0

**2.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

 **α.** x 6 – 9x 3 + 8 = 0

 **β.** (x 2 + 3x – 2) 6 – 9 (x 2 + 3x – 2) 3 + 8 = 0

 **γ.** (ω 2 – 3ω + 1) 2 – 10 (ω 2 – 3ω – 3) – 51 = 0

 **δ.**  (x + 2) 8 – 3 (x + 2) 4 – 4 = 0

 **ε.** (x 3 – 11x + 12) 4 – 3(x 3 – 11x + 12) 2 – 4 = 0

 **στ.**  

**3.** Δίνεται η εξίσωση: x 5 + x 4 + κx + λ = 0 . Να προσδιοριστούν οι κ, λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το –1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

**4.** Να δειχθεί ότι η εξίσωση: x 3 – 12x + 1 = 0 έχει 3 διαφορετικές ρίζες, ακριβώς μία σε καθένα από τα διαστήματα: (–4, –3), (0, 1), (3, 4).

**5.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

 **α.**  **β.** 

 **γ.  δ.** 

**6.** Να λυθούν οι εξισώσεις και ανισώσεις:

 **α.**  **β.** 

 **γ.**  **δ.** 

**7.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

 **α.**  (2ημx – 1) 4 + 6 (2ημx – 1) 2 – 7 = 0

 **β.**  2 ημ3 x + 5 ημ2 x + 5 ημx + 2 = 0

 **γ.**  2 συν4 x – 5 συν3 x + 5 συνx – 2 = 0

 **δ.** 2 συν4 x +17 συν2 x – 9 = 0

 **ε.**  2 ημ3 x – 3 ημ2 x – 3 ημx + 2 = 0

**8.** Να βρείτε το α∈[0, ) ώστε το x + 1 να είναι παράγοντας του:

P(x) = x 4 – (ημ3α) x 3 + (2ημ2α) x 2 – (ημα) x – 1 .

 Στη συνέχεια για την τιμή του α που θα βρείτε υπολογίστε το πηλίκο της διαίρεσης: P(x) : (x + 1) .

**\***

**9.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

 **α.**  **β.** 

 **γ.**  **δ.** 

**10.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

 **α.**   **β.**  

 **γ.**   **δ.**  

 **ε.**  

**11.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

 **α.  β. **

 **γ.  δ. **

 **ε. **

**11.** Να λυθεί η εξίσωση: 

**12.** Να λυθούν οι ανισώσεις:

 **α.**   **β.**  

 **γ.**  

**13.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

 **α.** x 4 – 4x 3 + 6x 2 – 4x + 1 = 0

 **β.** 6x 4 + 25x 3 +12x 2 – 25x + 6 = 0

 **γ.** 2x 4 – 3x 3 – 4x 2 + 3x + 2 = 0

 **δ.** 2x 5 – 13x 4 – 61x 3 – 61x 2 – 13x + 2 = 0