|  |  |
| --- | --- |
| *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ **1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ**  | MAΘΗΜΑ 10ΟΤριγωνομετρικές συναρτήσεις |

Το

 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

* ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
* ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
* ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

|  |  |
| --- | --- |
| ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ | Νο 1 |
| Τάξη : Β΄ ΛυκείουΜάθημα : ΆλγεβραΚεφάλαιο : 1οΔιδακτική ενότητα : 1ηΗμερομηνία : 25-10-2018Διδάσκων καθηγητής : Ηλίας Ράιδος |

ΕΝΟΤΗΤΑ 1Η

οι

τριγωνομετρικές

συναρτήσεις.

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

**α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας**

**ΕΡΩΤΗΣΗ 1η:**Τι λέγεται τριγωνομετρική συνάρτηση;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 2η:** Ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 3η:** Τι λέγεται πρωτεύουσα ή βασική περίοδος μιας συνάρτησης f;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 4η:** Πως ορίζεται η συνάρτηση ημίτονο και πως συμβολίζεται;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 5η:** Πως ορίζεται η συνάρτηση συνημίτονο και πως συμβολίζεται;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 6η:** Πως ορίζεται η συνάρτηση εφαπτομένη και πως συμβολίζεται;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 7η:** Πως ορίζεται η συνάρτηση συνεφαπτομένη και πως συμβολίζεται;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 8η:** Ποια είναι η περίοδος των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 9η:** Ποια είναι η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)=σφχ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 10η:** Ποια είναι τα ακρότατα και η περίοδος της συνάρτησης f(χ)=ρ.ημωχ,

όπου ω ,ρ > 0;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 11η:** Ποια είναι τα ακρότατα και η περίοδος της συνάρτησης f(χ)=ρ.συνωχ,

όπου ω ,ρ > 0;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 12η:** Ποια είναι η περίοδος των συναρτήσεων f(χ)=ρ.εφωχ, g(χ)=ρ.σφωχ

όπου ω ,ρ > 0;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 13η:** Τι λέγεται ημιτονοειδής καμπύλη;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 14η:**Πως γίνεται ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

f(χ)=ημχ + κ , κε;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 15η:** Πως γίνεται ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

f(χ)=α.ημωχ, α0 , ω>0;

**β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης**

**ΕΡΩΤΗΣΗ 16η:** Τι λέγεταιπεριοδική συνάρτηση;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 17η:** Τι λέγεται περίοδος της συνάρτησης f;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 18η:** Ποια είναι η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

 f(χ)=ημχ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 19η:** Ποια είναι η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

 f(χ)=συνχ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 20η:** Ποια είναι η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

 f(χ)=εφχ;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μ1: Για να βρούμε την περίοδο μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης f πρέπει να

 έχουμε υπόψην τα παρακάτω:

 1η μορφή : Αν f(χ)= ρ ημ(ωχ) ή f(χ)= ρ συν(ωχ) τότε Τ = 

 2η μορφή : Αν f(χ)= ρ εφ(ωχ) ή f(χ)= ρ σφ(ωχ) τότε Τ = 

**Παράδειγμα**

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

Μ2: Για να βρούμε τα ακρότατα μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης έχουμε

 1η μορφή : Αν f(χ)= ρ ημ(ωχ) ή f(χ)= ρ συν(ωχ)

 τότε max f =  και min f = - 

 2η μορφή : Αν f(χ)= ρ ημ(ωχ) + κ ή f(χ)= ρ συν(ωχ)+ κ

 τότε max f =  + κ και min f = - + κ .

 Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις εφαπτομένη και συνεφαπτομένη δεν έχουν

 ακρότατα.

**Παράδειγμα**

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

Μ3: Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)= ρ ημ(ωχ) + κ

Α) Βρίσκουμε την περίοδό της Τ= =  οπότε εργαζόμαστε στο [ 0, =  ]

Β) Κάνουμε πίνακα μεταβολών.

 Στην 1η γραμμή , σε διάστημα πλάτους Τα παίρνουμε τιμές που αυξάνουν ανά 

 ενώ στις επόμενες γραμμές διαδοχικά τις ωχ, ημ(ωχ), ρ ημ(ωχ) και ρ ημ(ωχ) +κ

 και τις αντίστοιχες τιμές τους δηλαδή τον πίνακα

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| χ | 0 |  | = |  | =Τ |
| ωχ | 0 |  | π |  | 2π |
| ημ(ωχ) | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| ρ.ημ(ωχ) | 0 | ρ | 0 | -ρ | 0 |
| f(χ)=ρ.ημ(ωχ)+κ  | κ | ρ+κ | κ | -ρ+κ | κ |

Γ) Σημειώνουμε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα ζεύγη ( χ , f(χ))

Δ) Σχεδιάζουμε την ημιτονοειδή γραμμή που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

**Παράδειγμα**

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

Μ4: Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)= ρ συν(ωχ) + κ

 εργαζόμαστε παρόμοια με εκείνη της συνάρτησης f(χ)= ρ ημ(ωχ) + κ

**Παράδειγμα**

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

Μ5: Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)= ρ εφ(ωχ) + κ

Α) Βρίσκουμε την περίοδό της Τ=  οπότε εργαζόμαστε στο (- , )

Β) Κάνουμε πίνακα μεταβολών.

 Στην 1η γραμμή , σε διάστημα πλάτους Τα παίρνουμε τιμές που αυξάνουν ανά 

 ενώ στις επόμενες γραμμές διαδοχικά τις ωχ, εφ(ωχ), ρ εφ(ωχ) και ρ εφ(ωχ) +κ

 και τις αντίστοιχες τιμές τους δηλαδή τον πίνακα

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| χ | -  | - + | 0 | -+ |  |
| ωχ | - | - | 0 |  |  |
| εφ(ωχ) | -------- | -1 | 0 | 1 | ------------ |
| ρ.εφ(ωχ) | --------- | -ρ | 0 | ρ | ----------- |
| f(χ)=ρ.εφ(ωχ)+κ  | --------- | -ρ+κ | κ | ρ+κ | ---------- |

Γ) Σημειώνουμε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα ζεύγη ( χ , f(χ))

Δ) Σχεδιάζουμε την γραμμή που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

**Παράδειγμα**

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

Μ6: Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)= ρ σφ(ωχ) + κ

Α) Βρίσκουμε την περίοδό της Τ=  οπότε εργαζόμαστε στο ( 0, )

Β) Κάνουμε πίνακα μεταβολών.

 Στην 1η γραμμή , σε διάστημα πλάτους Τα παίρνουμε τιμές που αυξάνουν ανά 

 ενώ στις επόμενες γραμμές διαδοχικά τις ωχ, σφ(ωχ), ρ σφ(ωχ) και ρ σφ(ωχ) +κ

 και τις αντίστοιχες τιμές τους δηλαδή τον πίνακα

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| χ | 0 |  |  |  |  |
| ωχ | 0 |  |  |  | π |
| σφ(ωχ) | -------- | 1 | 0 | -1 | ------------ |
| ρ.σφ(ωχ) | --------- | ρ | 0 | -ρ | ----------- |
| f(χ)=ρ.σφ(ωχ)+κ  | --------- | ρ+κ | κ | -ρ+κ | ---------- |

Γ) Σημειώνουμε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα ζεύγη ( χ , f(χ))

Δ) Σχεδιάζουμε την γραμμή που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

**Παράδειγμα**

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

Β. Παραδεγματα και εφαρμογεσ στην ενοτητα

**α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου**

1.Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(χ)=2ημχ, g(χ)=0,5ημχ, h(χ)=-2ημχ , 02π.

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(χ)=ημχ, g(χ)=ημ3χ, 02π.

3.Να δειχθεί ότι είναι περιττές οι συναρτήσεις

 f(χ)= +εφχ και g(χ)= χ3+ημχ.

4.Εστω η συνάρτηση f(χ)=2ημ.Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδός της; Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

5.Ενα παιχνίδι κρέμεται από το ταβάνι με ένα ελατήριο και απέχει από το πάτωμα 1m.Όταν το παιχνίδι ανεβοκατεβαίνει το ύψος του από το πάτωμα είναι h=1+συν3t,όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

Ι) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.

ΙΙ) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

ΙΙΙ) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης για 0t2π.

**β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.**

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(χ)=συν2χ , h(χ)=3συν2χ , 02π.

1. Έστω η συνάρτηση f(χ)=4ημ.Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδός της; Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

3.Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

 f(χ)=ημ4χ,

 g(χ)=3συν-1

 h(χ)=εφ(χ-)+1

4.Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f(χ)=3ημ4χ -2

και g(x)=3f(x) στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5.Η απόσταση χ του πιστονιού από το ένα άκρο του κυλίνδρου δίνεται από τη συνάρτηση χ(t)=ημ3t, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

Ι) Να υπολογίσετε το πλάτος της κίνησης του πιστονιού.

ΙΙ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για 0t12.

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος,

δικαιολογώντας την απάντησή σας.

**ΕΡΩΤΗΣΗ 1η**

Μπορεί η περίοδος Τ μιας συνάρτησης f να είναι αρνητικός αριθμός;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 2η**

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Η συνάρτηση f(χ)=ημχ είναι περιττή.

**ΕΡΩΤΗΣΗ 3η**

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Οι συναρτήσεις f(χ)=εφχ και g(χ)=σφχ δεν είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

**ΕΡΩΤΗΣΗ 4η**

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Η μελέτη μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης μπορεί να περιοριστεί στη μελέτη της στην αντίστοιχη της περίοδο Τ.

**ΕΡΩΤΗΣΗ 5η**

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Η συνάρτηση f(χ) = ρ. ημ(ω .χ) με ρ ,ω>0 έχει μέγιστη τιμή το ρ, ελάχιστη το -ρ και η περίοδός της είναι Τ = 

**2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ**

**Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β).**

**Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.**

|  |  |
| --- | --- |
|  Στήλη (Α) |  Στήλη (Β) |
| f(χ)=ημχεφχημχ ,συνχεφχ ,σφχf(χ)=συνχσφχ | \* [0,π] γνησίως φθίνουσα\* παρουσιάζουν ακρότατα\* δέχονται κατακόρυφες ασύμπτωτες\* Τ=2π\* R1= {χεR| συνχ  0 }.\* R1= {χεR| ημχ  0 }. |

**Συμπληρώστε τις προτάσεις που ακολουθούν:**

Αν f(χ)= α. ημωχ , αεR, ω>0 τότε

α) Μέγιστη τιμή ..................Ελάχιστη τιμή.........................

β) Περίοδος Τ = ............................

Αν f(χ)= α . εφωχ , αεR, ωεR\* , τότε

α) Μέγιστη τιμή ..................Ελάχιστη τιμή.........................

β) Περίοδος Τ = ............................

**Διατάξτε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που ακολουθούν.**

α) ημ0 , ημ, ημ , ημ

β) συν0, συν, συν,συν

γ) εφ0, εφ, εφ, εφ

**3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ**

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Η περίοδος Τ μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης είναι

|  |  |
| --- | --- |
| Α |  |

συνάρτηση του χ.

|  |  |
| --- | --- |
| Β |  |

πραγματικός αριθμός Τ>0.

|  |  |
| --- | --- |
| Γ |  |

πραγματικός αριθμός.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Η συνάρτηση f(χ)=ημχ είναι περιοδική με περίοδο

|  |  |
| --- | --- |
| Α |  |

Τ=2π

|  |  |
| --- | --- |
| Β |  |

Τ = π

|  |  |
| --- | --- |
| Γ |  |

Τ=π/2

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(χ)=εφχ ;

|  |  |
| --- | --- |
| Α |  |

Α=R

|  |  |
| --- | --- |
| Β |  |

A=R1= {χεR| συνχ  0 }.

|  |  |
| --- | --- |
| Γ |  |

A=R1= {χεR| ημχ  0 }.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στα [0,π/2],[3π/2,2π] και γνησίως φθίνουσα στο [π/2,3π/2]

|  |  |
| --- | --- |
| Α |  |

τότε f(χ)=ημχ

|  |  |
| --- | --- |
| Β |  |

τότε f(χ)=συνχ

|  |  |
| --- | --- |
| Γ |  |

τότε f(χ)=εφχ

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Ποιες συναρτήσεις παρουσιάζουν κατακόρυφες ασύμπτωτες

|  |  |
| --- | --- |
| Α |  |

Η f(χ)=ημχ

|  |  |
| --- | --- |
| Β |  |

Η f(χ)=συνχ

|  |  |
| --- | --- |
| Γ |  |

Οι f (χ)= εφχ και g(χ)=σφχ.

**4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ...........ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: ΟΤΑΝ.........**

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις

Πότε...... με όταν....

**Ερώτηση α)**

.......... μία τριγωνομετρική συνάρτηση δέχεται κατακόρυφη ασύμπτωτη;

**Ερώτηση β)**

.......... μία συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο ΤεR\* ;

**Ερώτηση γ)**

.......... ορίζεται η συνάρτηση f(χ)=εφχ ;

**Ερώτηση δ)**

.......... μία τριγωνομετρική συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατα;

**Ερώτηση ε)**

.......... μία καμπύλη είναι ημιτονοειδής;

**5. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ**

11.Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(χ)=2συνχ, g(χ)=0,5συνχ, h(χ)=-2συνχ , 02π.

12. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(χ)=συνχ, g(χ)=συν3χ, 02π.

13.Εστω η συνάρτηση f(χ)=2ημ.Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδός της; Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

14.Η παλίρροια σε μία θαλάσσια περιοχή περιγράφεται από την συνάρτηση

y=3ημ(-t), όπου y η στάθμη του ύψους των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

Ι) Να βρείτε τη υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη μικρότερη άμπωτη.

ΙΙ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για 0t12.

15.Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)=ημ2χ.

Να βρείτε τον τύπο της αντίθετης συνάρτησης της f.

Να γίνει ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της αντίθετης της f στο ίδιο σύστημα αξόνων με την f.

3.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16. Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f(χ)=ημχ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g(χ)=1+ημχ και h(χ)=-1+ημχ , όπου χε[0,2π].

17. Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f(χ)=ημχ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g(χ)=ημ3χ και

 h(χ)=ημ  , όπου χε[0,2π].

18. Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=2ημ .

 α) Ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;

 β) Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης;

 γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας

 περιόδου.

19. Να κάνετε μελέτη και γραφική παράσταση την συνάρτηση f(χ)=εφ

20. Ένα παιχνίδι κρέμεται από το ταβάνι με ένα ελατήριο. Η απόσταση του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 1,5m.Οταν το παιχνίδι ανεβοκατεβαίνει ,τότε το ύψους του από το πάτωμα δίνεται από τον τύπο h=1,5+συν3t ,όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

α) Να υπολογίσετε την διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψους.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h(t) για tε[0,6π]