

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ



Αναλυτική Θεωρία

850 Ασκήσεις

► 630 ασκήσεις σε όλη την ύλη

► 220 ενδοσχολικά θέματα εξετάσεων

ΝΙΚΟΣ Κ. ΡΑΠΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Συστήματα

1. Γραμμικά Συστήματα

1. Γραμμική Εξίσωση

■ Κάθε εξίσωση 1ου βαθμού με 2 αγνώστους ονομάζεται γραμμική.

■ Η γενική της μορφή είναι $\alpha x + \beta y = \gamma$ με :

Τα x και y είναι οι άγνωστοι της εξίσωσης

Οι πραγματικοί αριθμοί α και β λέγονται συντελεστές των αγνώντων

Ο πραγματικός αριθμός γ λέγεται σταθερός όρος

■ Κάθε ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) που έχει την ιδιότητα να επαληθεύει την εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης.

► Μια γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατη.

► Για να βρούμε μερικές από αυτές, θέτουμε τυχαίες τιμές στη μεταβλητή x κι αφού εκτελέσουμε όλες τις δυνατές πράξεις βρίσκουμε μια αντίστοιχη τιμή για τη μεταβλητή y .

► Επειδή δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε όλες από τις άπειρες αυτές λύσεις, αρκεί να σημειώνουμε τη μορφή που θα έχουν, ώστε να μπορεί κανείς να υπολογίσει όσες θέλει, ανά πάσα ώρα και στιγμή.

■ Η γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία γραμμή.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

α) Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση γίνεται :

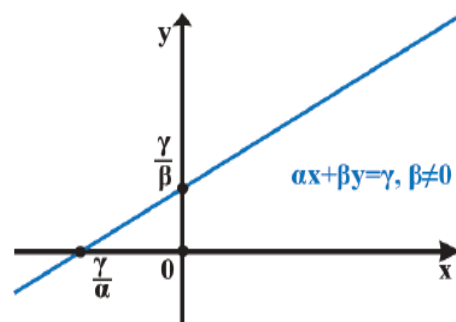
$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \beta y = -\alpha x + \gamma \Leftrightarrow y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία η οποία :

► έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$

► τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \frac{\gamma}{\beta})$

► τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$

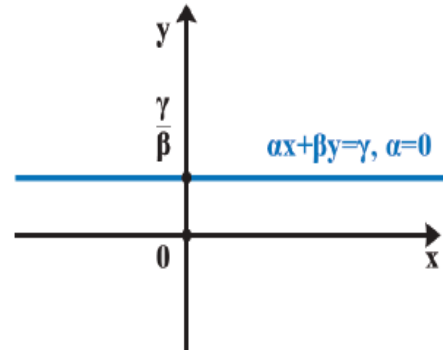


β) Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση γίνεται :

$$0x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \beta y = \gamma \Leftrightarrow y = \frac{\gamma}{\beta}$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία η οποία :

- ▶ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$
- ▶ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \frac{\gamma}{\beta})$
- ▶ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

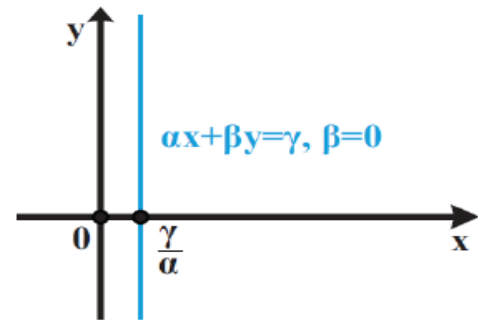


γ) Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται :

$$\alpha x + 0y = \gamma \Leftrightarrow \alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία η οποία :

- ▶ δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης
- ▶ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$
- ▶ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$



2. Γραμμικό Σύστημα 2x2

■ Δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x και y : $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ λέγεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή πιο απλά γραμμικό σύστημα 2x2 .

Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 :

- ▶ ονομάζουμε λύση κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις του.
- ▶ επίλυση ονομάζουμε την διαδικασία που ακολουθούμε να βρούμε τις λύσεις του. Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω μεθόδους :

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο (όποιον επιθυμούμε, άρα όποιον μας συμφέρει) και αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο.

β) Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε και τις 2 εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές μπροστά από κάποιον άγνωστο (πάλι επιλέγουμε αυθαίρετα όποιον μας συμφέρει). Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις κατά μέλη. Έτσι προκύπτει και πάλι μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο.

γ) Γραφική Επίλυση

Σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και βρίσκουμε το κοινό τους σημείο.

δ) Μέθοδος των Οριζουσών

Στο γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ αντιστοιχίζουμε τρεις ορίζουσες :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta' - \beta \cdot \alpha' \quad , \quad D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma \cdot \beta' - \beta \cdot \gamma' \quad , \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \gamma' - \gamma \cdot \alpha'$$

Ισχύουν τα παρακάτω :

1) Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, τη : $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$

2) Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

3) Αν $D = 0$ και $D_x = D_y = 0$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

3. Γραμμικό Σύστημα 3x3

■ Μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ με έναν τουλάχιστον από τους συντελεστές των x, y, z διάφορο του μηδενός λέγεται **γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους** .

► Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης με τρεις αγνώστους λέγεται κάθε τριάδα αριθμών που την επαληθεύει

► Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους** ,

δηλαδή ένα **γραμμικό σύστημα 3x3** :
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

► Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 3x3 χρησιμοποιούμε την μέθοδο της αντικατάστασης ή την μέθοδο της απαλοιφής .

► Σε ένα γραμμικό σύστημα 3x3 μπορεί να ισχύει μια μόνο από τις περιπτώσεις :

α) να έχει μοναδική λύση

β) να είναι αδύνατο

γ) να έχει άπειρες λύσεις.

Ασκήσεις

1.1 Δίνεται η γραμμική εξίσωση $3x + 4y = -10$. Να εξετάσετε ποιο από τα ζεύγη $(-1, 3)$, $(2, -4)$ είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης.

1.2 Δίνεται η γραμμική εξίσωση $3x - 5y = -16$. Να βρείτε τον αριθμό μ , ώστε το ζεύγος $(\mu, \mu + 2)$ να είναι λύση της εξίσωσης. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

1.3 Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης και να σχεδιάσετε τις παρακάτω ευθείες:

α) $3x - y + 6 = 0$ β) $6x + 2y + 1 = 0$ γ) $2x - 6 = 0$ δ) $-3y + 12 = 0$

1.4 Δίνεται η γραμμική εξίσωση $ax + (a - 5)y = 6$. Αν το ζεύγος $(6, 2)$ είναι λύση της εξίσωσης:

α) να βρείτε τον αριθμό a

β) να σχεδιάσετε την ευθεία που παριστάνει η εξίσωση

1.5 Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 9 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$

1.6 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 4y = 3$ και $\varepsilon_2: x + 2y = \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

β) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;

γ) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α οι ευθείες τέμνονται; (Σχολικό)

1.7 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 7x + 2y = 24 \\ 4x + y = 15 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} -4x + 2y = -2 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$

1.8 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -3x + 5y = -6 \end{cases}$

1.9 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} -8x + 5y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x + 7y = 2 \\ 6x + 7y = -10 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 5x - 2y = -20 \end{cases}$

1.10 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y = 5$, $\varepsilon_2: -2x + 3y = 0$ και $\varepsilon_3: 3x + 2y = 7$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

β) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_3$

γ) Με τη βοήθεια των προηγούμενων ερωτημάτων, να αποδείξετε ότι το κοινό σημείο των $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι σημείο της ε_1

1.11 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} -3(x+1) + y = -2 \\ 5x - 2y = -4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2(4-x) - 5(y+2) = -3 \\ 6x + 7y = -10 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -4 \\ y - \frac{x}{6} = 5 \end{cases}$$

1.12 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{x}{2} - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

1.13 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} (x+1)^2 + (3y-1)^2 = x^2 + 9y^2 \\ (x-1)^3 + 3x^2 + 5y = x^3 - 2 \end{cases}$$

1.14 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \frac{x+y-5}{2} - \frac{y-x}{3} = 0 \\ 3(x-y-7) + 2(x+y-2) = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 3(x-y) - 2(x-2y) = 2 \\ 3y - (x+4)(x-4) = 3 - (x-1)^2 \end{cases}$$

1.15 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

1.16 Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm, πλάτος y cm, περίμετρο ίση με 38 cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού. Να βρείτε τα x, y .

1.17 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -3$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

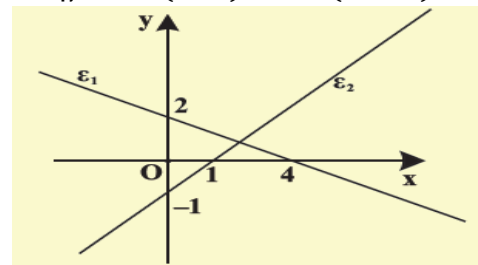
β) Να βρείτε για ποια τιμή του α η ευθεία $3x + \alpha y = \alpha + 5$ διέρχεται από το M

1.18 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 7)$ και $B(1, -2)$

1.19 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(2, -1)$

1.20 α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του διπλανού σχήματος

β) Ποιο σύστημα ορίζουν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ποια η λύση του συστήματος; (Σχολικό)



1.21 Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε το σύστημα $\begin{cases} (\alpha - 3)x - (\beta + 1)y = 1 \\ \beta x + (2\alpha + 1)y = 7 \end{cases}$ να έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (2, -3)$

1.22 Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε το σύστημα $\begin{cases} (\alpha - 1)x + \beta y = \alpha + 3 \\ \alpha x + (2\beta - 1)y = 3\beta + 5 \end{cases}$ να έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (3, 2)$

1.23 Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ ώστε τα συστήματα $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$ και $\begin{cases} (\lambda + 1)x + (2\mu - 1)y = 1 \\ 2\lambda x + (\mu + 4)y = 53 \end{cases}$ να έχουν κοινή λύση.

1.24 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ 6 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \beta) \begin{vmatrix} x+2 & 3x-2 \\ 2x-3 & 1 \end{vmatrix} = 3x-1 \quad \gamma) \begin{vmatrix} 2x & x+2 \\ 4 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & x-6 \\ 3 & x+4 \end{vmatrix}$$

1.25 Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

1.26 Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -3x + 5y = -2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x - 7y = 3 \\ 2x - 10y = -4 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$$

1.27 Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 6 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} -4x + 2y = 5 \\ 6x - 3y = -2 \end{cases}$$

1.28 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3} + 1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + 4y = 7 \\ \frac{1}{2}x + (\sqrt{3} - 1)y = 1 \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

1.29 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + 2\sqrt{2}y = -2 \\ \sqrt{2}x + (\sqrt{2} + 1)y = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = -1 \\ x + (2 + \sqrt{3})y = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

1.30 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y = -1$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x - y = 6$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία οι ευθείες είναι παράλληλες

β) Να παραστήσετε γραφικά τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ για $\lambda = 3$

γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.31 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x + \lambda y = 2$ και $\varepsilon_2: \lambda x + 9y = 2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι δύο ευθείες τέμνονται

1.32 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + \lambda^2 y = 4$ και $\varepsilon_2: x + \lambda y = \lambda + 2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες είναι παράλληλες

1.33 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x + (\lambda + 2)y = 3$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 2)x + 5y = 3$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται, να βρείτε το σημείο τομής τους A

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το A ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x + 2y = 3$

1.34 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + y = 1$ και $\varepsilon_2: x + \lambda y = \lambda^2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του λ

β) Για ποια τιμή του λ οι ευθείες είναι παράλληλες ;

γ) Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3$ και $2x + 2\lambda y = \lambda^2 - 1$ είναι παράλληλες.

1.35 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 2x - 5y - 2\omega = 3 \\ 5x + y - 2\omega = 33 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 5x - y + 3\omega = 4 \\ x - 3y + \omega = 2 \\ 3x - 2y + 2\omega = 2 \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

1.36 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x - y + \omega = -1 \\ x + y + 3\omega = 5 \\ x + 2y + 4\omega = 8 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + 2y - \omega = 1 \\ x + y - 2\omega = 0 \\ -2x - y + \omega = 1 \end{cases}$$

2. Μη Γραμμικά Συστήματα

■ Όταν σε ένα σύστημα εξισώσεων υπάρχουν εξισώσεις που δεν είναι γραμμικές, τότε το σύστημα λέγεται **μη γραμμικό σύστημα**.

Ασκήσεις

2.1 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

2.2 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$$

2.3 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x \cdot y = 8 \\ x + y = -6 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -5 \\ \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} (y - 2x)(x + y) = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

2.4 Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 12 cm^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου όταν η περίμετρός του είναι 14 cm .

2.5 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 5 cm και εμβαδόν του 6 cm^2 . Να βρείτε τις κάθετες πλευρές του τριγώνου

2.6 Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = 3x^2$ και της ευθείας $2x - y = -1$

2.7 Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με εξίσωση $x + y = 2$ και του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

2.8 Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος $x \text{ cm}$, πλάτος $y \text{ cm}$, περίμετρο ίση με 24 cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 2 cm , θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού. Να βρείτε τα x, y .

3. Ενδοσχολικά Θέματα Εξετάσεων στα Συστήματα

3.1 Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 - \lambda \\ 8x + 3y = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D, D_x, D_y

β) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) η οποία και να βρεθεί.

γ) Για ποιες τιμές του λ ισχύει ότι $x_0 - y_0 = 5$ (ΓΕΛ 2013)

3.2 Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda x + 4y = -1 \\ 5x + (\lambda + 1)y = 1 \end{cases}$$
 όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω ότι $(x, y) = (\alpha, \beta)$ είναι η λύση του συστήματος για $\lambda = 2$

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ

β) Να αποδείξετε ότι $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε $\eta\mu\varphi = \alpha$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = \beta$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\alpha e^{2x} - \beta e^x - 3 \geq 0$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha \sin t = \beta + \eta\mu^2 t$, $t \in (0, \pi)$ (7ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

3.3 Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda + 2)y = 5 \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D, D_x, D_y

β) Να λύσετε το σύστημα.

γ) Αν $A(x_0, y_0)$ η μοναδική λύση του συστήματος, να δείξετε ότι το A ανήκει στην ευθεία $y = x$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

3.4 α) Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x και y έχει μοναδική λύση, τη $(x_0, y_0) = (\alpha + 1, 3)$. Αν επιπλέον ισχύει $2D_x - \alpha D_y = 3D$, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $(\sin x - 2)^2 = \eta\mu^2 x + \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$

(ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 2014)

3.5 Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} \kappa^3 x + y = \kappa - 5 \\ -x + \kappa y = 17 - 3\kappa \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού κ

β) Να βρεθεί η λύση του συστήματος για $\kappa = 2$

γ) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι τιμές του κ για τις οποίες το σύστημα έχει λύση $(x_0, y_0) = (3, 7)$ (ΓΕΛ ΖΑΚΥΝΘΟΥ 2016)

3.6 α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$$

β) Έστω ότι η γωνία $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει $\varepsilon\varphi 2\alpha = -\frac{4}{3}$

β1) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha = 2$

β2) Να δείξετε ότι $\eta\mu\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

β3) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$ και $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ (ΓΕΛ ΜΑΝΤΟΥΔΙΟΥ 2016)

3.7 Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x + y = 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D, D_x, D_y

β) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) την οποία να υπολογίσετε.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2(x_0^2 + y_0^2)$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

(1ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2016)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ιδιότητες Συναρτήσεων

4. Μονοτονία Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

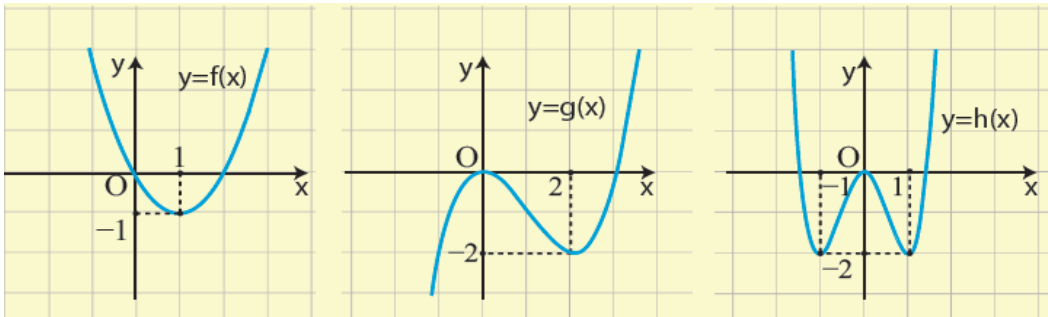
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

Παρατηρήσεις

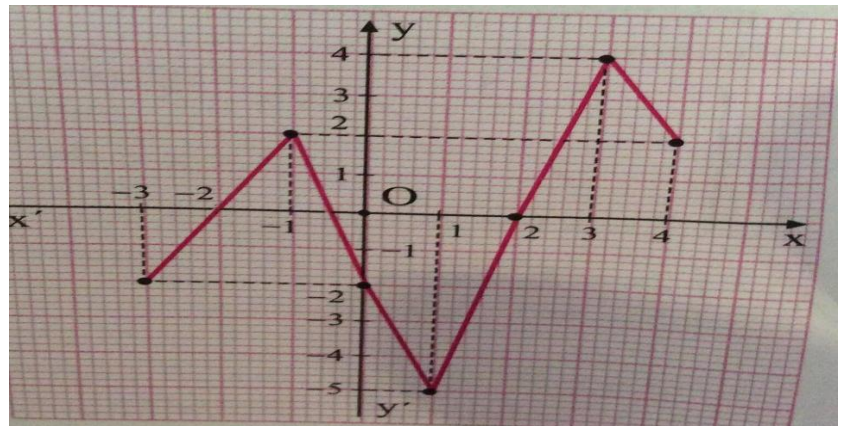
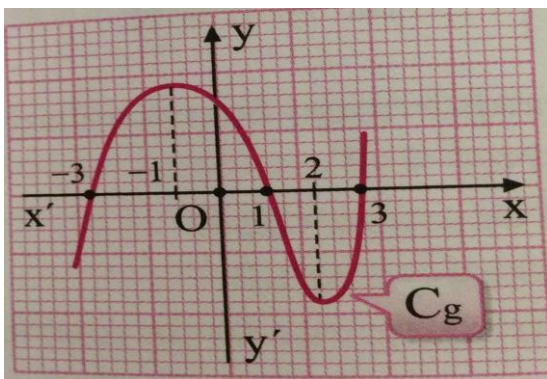
- 1) Για να δηλώσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \uparrow \Delta$.
- 2) Για να δηλώσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \downarrow \Delta$.
- 3) Μια συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ .
- 4) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$, $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- 5) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$, $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Ασκήσεις

4.1 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες ή γνησίως φθίνουσες (Άσκηση 1/Α/σελ. 38)



4.2 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες ή γνησίως φθίνουσες



4.3 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

α) $f(x) = 4x + 5$ β) $f(x) = 6 - 3x$ γ) $f(x) = -x + 7$

4.4 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

α) $f(x) = \frac{3x+4}{5}$ β) $f(x) = \frac{4-5x}{3}$ γ) $f(x) = -\frac{3-7x}{6}$

4.5 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

α) $f(x) = 3 + \sqrt{2x-4}$ β) $f(x) = 2 - \sqrt{x-5}$ γ) $f(x) = 4 - \sqrt{9-3x}$

4.6 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

α) $f(x) = 5 + \sqrt{3x-9}$ β) $f(x) = 6 - 5\sqrt{2x-8}$ γ) $f(x) = 4 - 3\sqrt{4-2x}$

4.7 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

α) $f(x) = \sqrt{12-4x} - 3x$ β) $f(x) = 21 - \sqrt{7-x} + \sqrt{x+13}$ γ) $f(x) = \sqrt{12-3x} - 4x - \sqrt{x+6}$

4.8 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = \sqrt{5-x} \quad \beta) f(x) = 3 - 2\sqrt{x+1} \quad \gamma) f(x) = \frac{5}{x}$$

4.9 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = 2 + \sqrt{6-x} \quad \beta) f(x) = 2x^3 + 5 \quad \gamma) f(x) = -4x^3 - 2x + 1$$

4.10 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = 1 - 2x^3 - 5x \quad \beta) f(x) = x^3 - \sqrt{3-x} + 4x$$

4.11 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} - 6x^7 \quad \beta) f(x) = \frac{3}{4-x} - \sqrt{4-x}$$

4.12 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = 2\sqrt{4x-8} + 2x \quad \beta) f(x) = 2x^3 + 5x - 7 \quad \gamma) f(x) = \frac{1}{x-1} - 3x$$

4.13 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = 4x^6 + 2 \quad \beta) f(x) = -2x^2 + 3 \quad \gamma) f(x) = -4x^4 + 1$$

4.14 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = 3x^8 + 5 \quad \beta) f(x) = -4x^6 + 2017 \quad \gamma) f(x) = -2x^{10} + 5$$

4.15 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \beta) f(x) = -2x^2 + 12x - 5 \quad \gamma) f(x) = 3 - x(x+8)$$

4.16 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{4-x}, & x \leq 4 \\ \frac{3}{x} - 4x, & x > 4 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 1 \\ 5 - 4x, & x < 1 \end{cases}$$

4.17 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = x - 2|x-3| \quad \beta) f(x) = 4x - 5|x-3|$$

4.18 Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα :

$$\alpha) f(x) = (3\lambda - 9)x + 5 \quad \beta) f(x) = (\lambda^2 - 16)x + 3 \quad \gamma) f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)x - 7$$

4.19 Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα :

$$\alpha) f(x) = (3|\lambda| - 12)x + 4 \quad \beta) f(x) = (8 - 4|\lambda|)x + 1 \quad \gamma) f(x) = (-\lambda^2 + \lambda + 2)x + 4$$

4.20 Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα :

$$\alpha) f(x) = (12 - 4\lambda)x + 5 \quad \beta) f(x) = (\lambda^2 + 6\lambda - 8)x + 7 \quad \gamma) f(x) = (7 - |3 - 2\lambda|)x + 2017$$

4.21 Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα :

$$\alpha) f(x) = (9 - \lambda^2)x - 3 \quad \beta) f(x) = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)x + 1 \quad \gamma) f(x) = (|\lambda - 2| - 3)x + 2017$$

4.22 Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) f(3x+2) > f(x-4) \quad \beta) f(x^2 - 4x) - f(x-6) < 0$$

4.23 Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -3)$, να λύσετε την ανίσωση $2f(x^2 - 3x) + 6 \leq 0$

4.24 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(4, 9)$ τότε :

- α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5 - 3x) < 2$

4.25 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(4, 5)$ τότε :

- α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) Αν η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , να δείξετε ότι $f(0) > 0$

4.26 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(3, 5)$ τότε :

- α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(|x| - 3) \geq 1$

4.27 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5, 13)$ και $B(7, 11)$ τότε :

- α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) - 6) < f(7) + 2$

4.28 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(2017) < f(2004)$, τότε :

- α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) να λύσετε την ανίσωση $f(3x - 2) < f(8 - 2x)$

4.29 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{2}{5}\right)$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$ τότε :

- α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) να λύσετε την ανίσωση $f(|3x - 1|) \leq 4$

4.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + x - 5$

- α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x - 5) > 0$

4.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^5 + 5x - 7$

- α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x - 8) > 0$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 3x) + 7 \leq 0$

4.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{2x^2 + 3} - \frac{1}{x^2 + 2x + 6} > \sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 6}$

4.33 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - 2x) - f(3x - 6) > x^2 - 5x + 6$

4.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^5 + \alpha x + 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(-1, 4)$:

α) να βρείτε τον αριθμό α

β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 2$

4.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{\alpha - x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(3, 2)$:

α) να βρείτε τον αριθμό α

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

γ) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

4.36 Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, τότε να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $f(x^2) = f(6x - 8)$

β) $f(|2x - 5|) = f(7)$

4.37 Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(3, 5)$, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $f(x^2 - 4) - f(2x - 1) = 0$

β) $f(|2x - 1| - 4) = 5$

4.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - 2} + \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(6, 1)$:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τον αριθμό α

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x - 2} = \frac{6}{x} - 1$.

4.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \alpha + 9$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, -7)$ και $B(2, 5)$ τότε:

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

5. Ακρότατα Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 **ολικό μέγιστο** το $f(x_0)$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

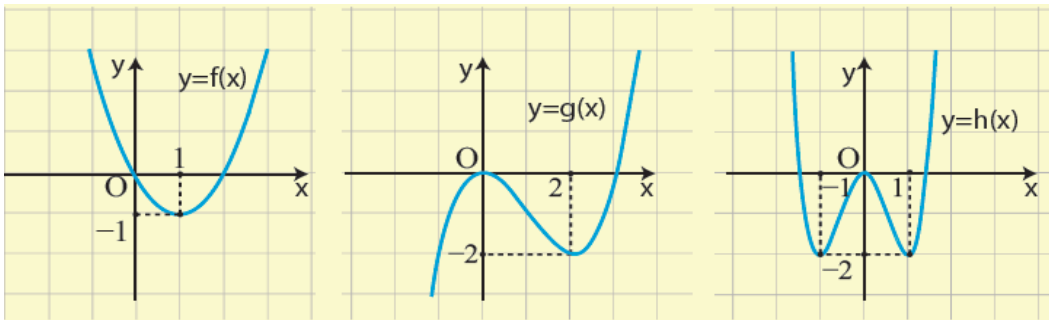
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 **ολικό ελάχιστο** το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Παρατηρήσεις

- 1) Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$
- 2) Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ λέγεται ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο της f και το συμβολίζουμε με $\min f(x)$
- 3) Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **(ολικά) ακρότατα** αυτής .
- 4) Μια συνάρτηση μπορεί να έχει και μέγιστο και ελάχιστο ή μόνο μέγιστο ή μόνο ελάχιστο ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο .

Ασκήσεις

5.1 Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών .
(Σχολικό 2/Α/σελ. 38)



5.2 Να δείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$

β) η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ (Σχολικό 3/Α/σελ. 38)

5.3 Να δείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 4$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(3) = -5$

β) η συνάρτηση $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$

5.4 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 2|x| - 3$

β) $f(x) = 6 - 5|x - 2|$

5.5 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = x^2 + 1$

β) $f(x) = 2|x - 1| + 5$

γ) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

5.6 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 2 + x^2$

β) $f(x) = 5 - x^4$

γ) $f(x) = 1 - (x - 3)^2$

5.7 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 5x^2 - 2$

β) $f(x) = 4 - 3(x + 2)^6$

5.8 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 3x^2 + 2$

β) $f(x) = 4(x - 1)^2 - 3$

γ) $f(x) = x^{2018} + (x^2 - x)^2 + 1$

5.9 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 3x^4 - 2$

β) $f(x) = 2018 - 3|x - 2|$

γ) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

5.10 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 3\sqrt{x} - 4$ β) $f(x) = 6 - 2\sqrt{x-2}$

5.11 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2$ β) $f(x) = 5 - \sqrt{x^2 + 9}$

5.12 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = x^2 + 8x$ β) $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$ γ) $f(x) = -x^2 + 6x$

5.13 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = -3x^2 + 18x - 5$ β) $f(x) = 2(x-3)^2 - 3(x-1)^2$

5.14 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ β) $f(x) = -x^2 + 4|x| - 1$

5.15 Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x}$ με $x > 0$.

5.16 Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$ με $x < 0$

5.17 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ έχει ελάχιστη τιμή -1 και μέγιστη τιμή 1 .

5.18 Αν η συνάρτηση $f(x) = 3x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $[2, 5]$, να βρείτε τα ακρότατά της .

5.19 Να βρείτε τα ακρότατα της f αν η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ έχει πεδίο ορισμού

α) $A = [-1, 3]$ β) $A = [1, 5]$ γ) $A = (-5, -1]$

5.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{6-2x} - 3x$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f

5.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f

5.22 Αν η συνάρτηση $f(x) = -x + \alpha$ έχει πεδίο ορισμού το $[1, 4]$, να βρείτε τα ακρότατά της αν ξέρετε ότι το μέγιστο είναι μεγαλύτερο κατά 5 από το ελάχιστο .

5.23 Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $2f(x) \leq f(1) + f(2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι : α) $f(1) = f(2)$ β) η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο .

6. Συμμετρίες Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέγεται **άρτια** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέγεται **περιττή** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Παρατηρήσεις

- 1) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει ως άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$
- 2) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
- 3) Όταν εξετάζουμε μια συνάρτηση αν είναι άρτια ή περιττή, λέμε ότι εξετάζουμε τη συνάρτηση ως προς τις συμμετρίες.

Ασκήσεις

6.1 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

α) $f(x) = 3x^2 + 5x^4$

β) $f(x) = 3|x| + 1$

γ) $f(x) = |x + 1|$

δ) $f(x) = x^3 - 3x^5$

ε) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

στ) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ (Σχολικό/4/A/σελ.38)

6.2 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

α) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

β) $f(x) = \sqrt{x-2}$

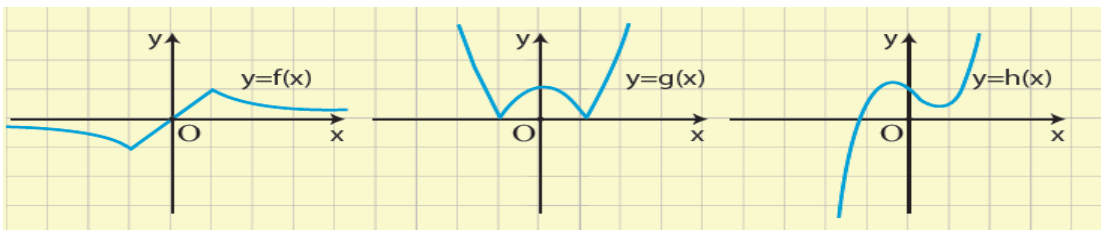
γ) $f(x) = |x-1| - |x+1|$

δ) $f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2 + 1}$

ε) $f(x) = \sqrt{|x|}$

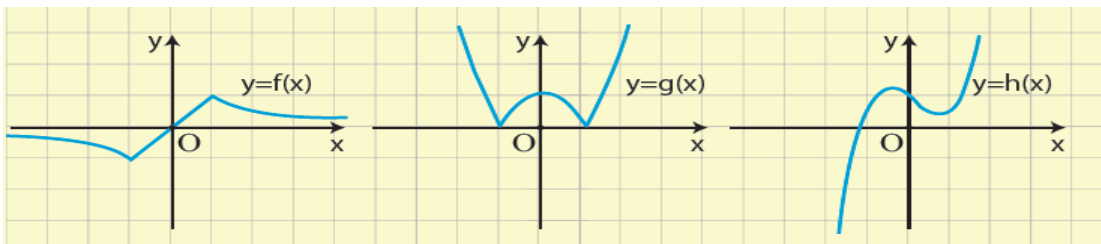
στ) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (Σχολικό/5/A/σελ.39)

6.3 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες είναι περιττής συνάρτησης :



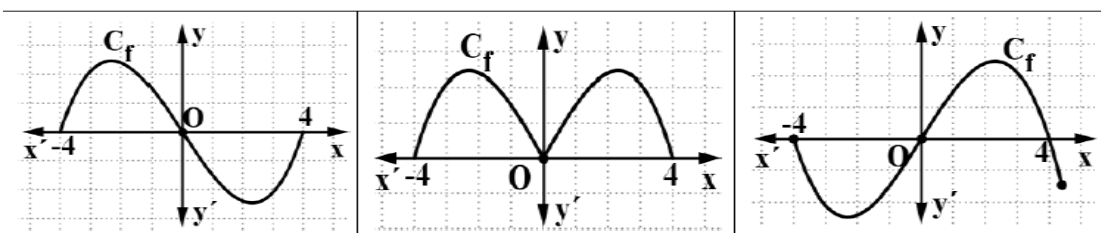
(Σχολικό/6/A/σελ.39)

6.4 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες είναι περιττής συνάρτησης :



(Σχολικό/7/A/σελ.39)

6.5 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες είναι περιττής συνάρτησης :



6.6 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

α) $f(x) = x^4 + 5x^2$

β) $f(x) = x^3 + 2x$

γ) $f(x) = 2x^7 - 7x^5$

6.7 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

α) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$

β) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x$

γ) $f(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$

6.8 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

α) $f(x) = x^4 - 5x^3 + x - 4$

β) $f(x) = \frac{3x}{x-5}$

γ) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

6.9 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

α) $f(x) = \frac{x^3 - 5x}{|x|}$

β) $f(x) = \frac{-2x^2}{x-3}$

γ) $f(x) = \frac{x^2 + 4|x|}{x^5 - 5x}$

6.10 Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ ή ως προς την αρχή των αξόνων :

α) $f(x) = \frac{2|x|-3}{\sqrt{5-|x|}}$

β) $f(x) = \frac{-2x^3}{\sqrt{|x|-3}}$

γ) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-2}}{x^2-16}$

6.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + \alpha|x|}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, -2)$. Να βρείτε το α , το πεδίο ορισμού της f και να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

6.12 Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(y-x) = f(y) - f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

6.13 Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(y-x) + f(y+x) = 2f(x) - 2f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

6.14 Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $3f(x) - 2f(-x) = 5x^3 - 5x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

6.15 Να βρείτε τους αριθμούς α, β αν ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 - 4(\beta - \alpha - 2) = f(-3) + f(0) + f(3)$ και γνωρίζετε επιπλέον ότι η f είναι περιττή.

6.16 Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, \lambda)$ ανήκουν στην γραφική της παράσταση, τότε να βρείτε το λ .

6.17 Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και τα σημεία $A(2017, 2018)$ και $B(-2017, \lambda)$ ανήκουν στην γραφική της παράσταση, τότε να βρείτε το λ .

6.18 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο η $f: (\lambda - 4, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια

6.19 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο η $f: (4\lambda - \lambda^2, 6 - 3\lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή

6.20 Αν η συνάρτηση $f : (\lambda, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, να λύσετε την εξίσωση $f(2) + f(-2) + x = \lambda$

6.21 Αν η συνάρτηση f είναι περιττή, να λύσετε την εξίσωση $f(x^{2016} - 1) + x = 2 - f(1 - x^{2016})$

6.22 Αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \lambda x + 3$ είναι άρτια, τότε να βρείτε τον λ .

6.23 Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + (\alpha - 2)x^3$

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

6.24 Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f(x) = \alpha|x| + (\alpha + 3)x - \alpha$

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f

6.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

6.26 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2}{|x| - 1} - 3\sqrt{\alpha - |x|}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο

σημείο με τεταγμένη -8

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(\sqrt{3} + 2) - f\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}\right)$

7. Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) = \varphi(x) + c$, $c > 0$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω .

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) = \varphi(x) - c$, $c > 0$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω .

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) = \varphi(x - c)$, $c > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά .

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) = \varphi(x + c)$, $c > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά .

Ασκήσεις

7.1 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $\varphi(x) = |x|$ β) $f(x) = |x| + 2$ γ) $g(x) = |x| - 2$ (Σχολικό/1/A/σελ. 45)

7.2 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $\varphi(x) = |x|$ β) $h(x) = |x + 2|$ γ) $q(x) = |x - 2|$ (Σχολικό/2/A/σελ. 45)

7.3 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $\varphi(x) = |x|$ β) $F(x) = |x + 2| + 1$ γ) $G(x) = |x - 2| - 1$ (Σχολικό/3/A/σελ. 45)

7.4 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $\varphi(x) = |x|$ β) $f(x) = |x| + 3$ γ) $g(x) = |x| - 1$

7.5 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $\varphi(x) = x^2$ β) $f(x) = (x - 2)^2$ γ) $g(x) = (x - 2)^2 - 3$

7.6 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

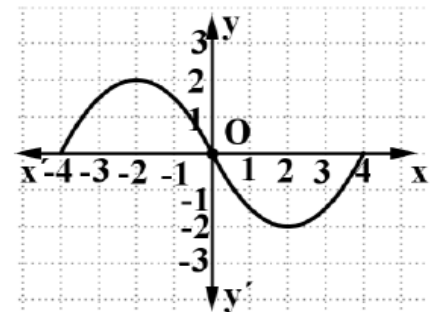
α) $\varphi(x) = x^3$ β) $f(x) = x^3 + 2$ γ) $g(x) = x^3 - 1$

7.7 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $\varphi(x) = x^3$ β) $f(x) = (x + 2)^3$ γ) $g(x) = (x - 1)^3$

7.8 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $g(x) = f(x) + 1$ και $h(x) = f(x) - 1$
 β) $g(x) = f(x - 2)$ και $h(x) = f(x + 2)$
 γ) $g(x) = f(x - 2) + 1$ και $h(x) = f(x + 2) - 1$



7.9 Να βρείτε ποιες μεταφορές έχουν γίνει στη συνάρτηση f ώστε να προκύψει η συνάρτηση g στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) $g(x) = f(x - 1) + 2$ β) $g(x) = f(x + 2) + 3$ γ) $g(x) = f(x + 3) - 5$

7.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3|x| + 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h , της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει κατά :

- α) 1 μονάδα προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω
- β) 2 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω
- γ) 1 μονάδα προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω
- δ) 2 μονάδες προς τα αριστερά και 3 μονάδες προς τα πάνω.

7.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h , της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει κατά :

- α) 1 μονάδα προς τα πάνω
- β) 2 μονάδες προς τα δεξιά
- γ) 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω
- δ) 3 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω

7.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h , της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει κατά :

- α) 2 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα πάνω
- β) 4 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω
- γ) 3 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω
- δ) 1 μονάδα προς τα αριστερά και 5 μονάδες προς τα κάτω

7.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x - 2)^2 + 1$
- β) Να παραστήσετε γραφικά την f μετατοπίζοντας παράλληλα την $y = x^2$

7.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$
- β) Να παραστήσετε γραφικά την f μετατοπίζοντας παράλληλα την $g(x) = 2x^2$

7.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$

- α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 8)$, να βρείτε τα α, β .
- β) Αν η $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από την μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g
- γ) Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x - 1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από την μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε το $\kappa > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τριγωνομετρία

8. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

A. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οξείας Γωνίας Ορθογωνίου Τριγώνου

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι :
το ημίτονο(ημω), το συνημίτονο(συνω), η εφαπτομένη(εφω) και η συνεφαπτομένη(σφω).

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$

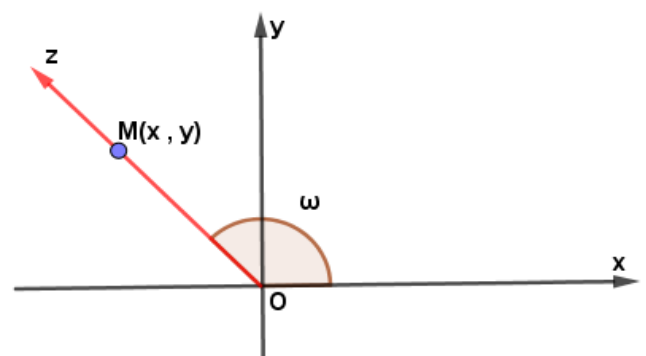
B. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

Σε ορθοκανονικό σύστημα xOy θεωρούμε την ημιευθεία Oz και την γωνία ω που παράγεται από την περιστροφή της Ox κατά τη θετική φορά έως ότου συμπίψει με την Oz .

Ο θετικός ημιιάξονας Ox λέγεται αρχική πλευρά της γωνίας ω , ενώ η ημιευθεία Oz λέγεται τελική πλευρά της γωνίας ω .

Έστω $M(x, y)$ σημείο της τελικής πλευράς Oz το οποίο απέχει απόσταση ρ από την αρχή των αξόνων,

δηλαδή : $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$

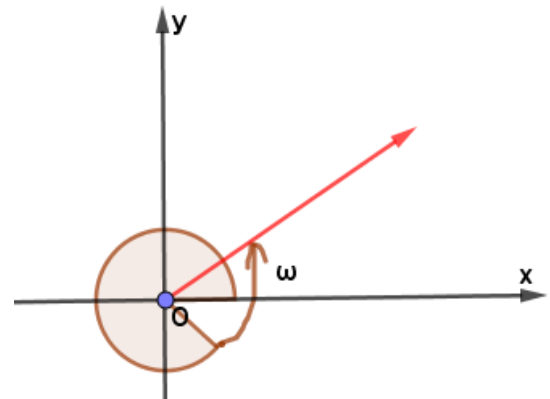


Στην περίπτωση αυτή, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω ορίζονται ως εξής :

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} \quad , \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad , \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y}$$

Γ. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας μεγαλύτερων των 360° και Αρνητικών Γωνιών

– Αν ο θετικός ημιάξονας Ox κάνει μια πλήρη περιστροφή κατά την θετική φορά (ή n πλήρεις περιστροφές $n \in \mathbb{N}^*$) και διαγράψει επιπλέον μια γωνία ω , τότε η συνολική γωνία είναι $360^\circ + \omega$ (ή $n \cdot 360^\circ + \omega$) και έχει την ίδια τελική πλευρά με την γωνία ω , οπότε οποιοδήποτε σημείο της τελικής πλευράς αν χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω και $360^\circ + \omega$ (ή $n \cdot 360^\circ + \omega$) θα προκύψουν τα ίδια αποτελέσματα και για τις δύο γωνίες.



– Αν ο θετικός ημιάξονας Ox κάνει μια πλήρη περιστροφή κατά την αρνητική φορά (ή n πλήρεις περιστροφές $n \in \mathbb{N}^*$) και διαγράψει επιπλέον μια γωνία ω , τότε η συνολική γωνία είναι $-360^\circ - \omega = -(360^\circ + \omega)$ (ή $-n \cdot 360^\circ - \omega$) και έχει την ίδια τελική πλευρά με την γωνία ω , οπότε οποιοδήποτε σημείο της τελικής πλευράς αν χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω και $-360^\circ - \omega$ (ή $-n \cdot 360^\circ - \omega$) θα προκύψουν τα ίδια αποτελέσματα και για τις δύο γωνίες.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των αρνητικών γωνιών ορίζονται όπως και των γωνιών από 0° έως 360°

Συμπέρασμα :

Οι γωνίες $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και ω , έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς .

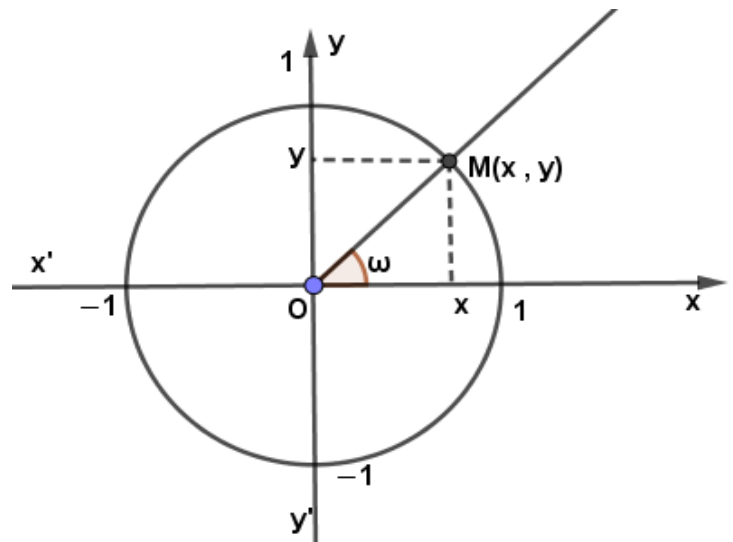
$$\begin{aligned} \eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \eta\mu\omega & , & & \sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \epsilon\phi\omega & , & & \sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\phi\omega \end{aligned}$$

Δ. Τριγωνομετρικός Κύκλος

– Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy . Αν με κέντρο το $O(0, 0)$ σχεδιάσουμε έναν κύκλο με ακτίνα $\rho = 1$, τότε αυτός ο κύκλος ονομάζεται

τριγωνομετρικός κύκλος.

Τον τριγωνομετρικό κύκλο τον χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας.



Άξονες ημιτόνων και συνημιτόνων

Έστω μια γωνία ω και $M(x, y)$ το σημείο τομής της τελικής της πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο. Τότε για την γωνία ω ισχύει :

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x.$$

Δηλαδή :

$\sigma\upsilon\nu\omega = x = \text{τετμημένη του σημείου } M$

$\eta\mu\omega = y = \text{τεταγμένη του σημείου } M$

– Ο άξονας $x'x$ λέγεται **άξονας των συνημιτόνων**, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **άξονας των ημιτόνων**.

– Για οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$ του τριγωνομετρικού κύκλου ισχύει $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

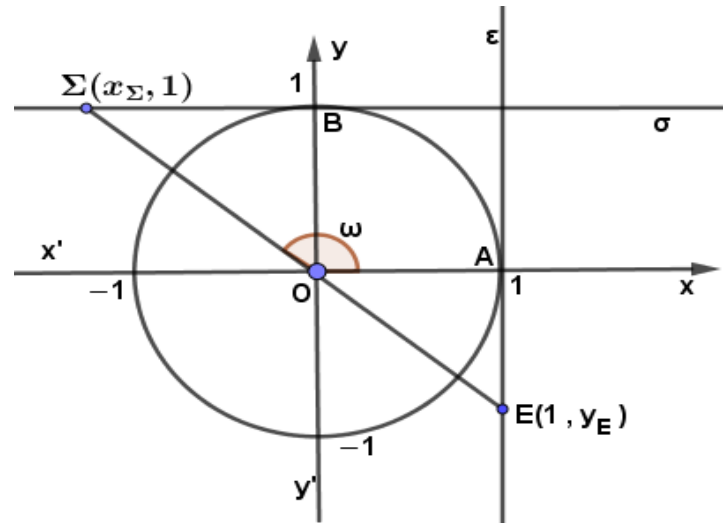
Άρα για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν :

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

Άξονες εφαπτομένων και συνεφαπτομένων

Στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(0, 1)$ σχεδιάζουμε δύο ευθείες ε και σ αντίστοιχα, ώστε να εφάπτονται στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Η τελική πλευρά της γωνίας ω , αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία ε στο σημείο $E(1, y_E)$ και την ευθεία σ στο σημείο $\Sigma(x_\Sigma, 1)$. Ισχύει ότι :



$$\varepsilon\omega = y_E = \text{τεταγμένη του σημείου } E$$

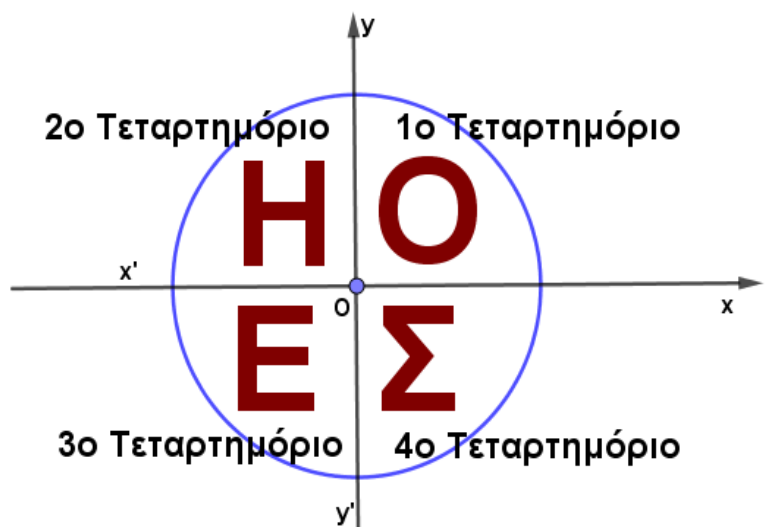
$$\sigma\omega = x_\Sigma = \text{τετμημένη του σημείου } \Sigma$$

- Η ευθεία ε λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**, ενώ η ευθεία σ λέγεται **άξονας των συνεφαπτομένων**.
- Σε αντίθεση με το ημίτονο και το συνημίτονο που παίρνουν τιμές από -1 έως 1 , η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη μπορούν να πάρουν ως τιμή οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

Πρόσημο Τριγωνομετρικών Αριθμών

Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω , ανάλογα που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	–	–
συνω	+	–	–	+
εφω	+	–	+	–
σφω	+	–	+	–



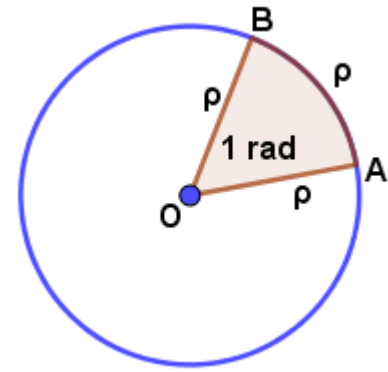
Για να θυμόμαστε πιο εύκολα τα πρόσημα των τριγωνικών αριθμών, υπάρχει ο μνημονικός κανόνας του ΟΗΕΣ :

- Στο 1^ο τεταρτημόριο όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί, γι'αυτό έχουμε το γράμμα **Ο**
- Στο 2^ο τεταρτημόριο μόνο το ημίτονο είναι θετικό, γι'αυτό έχουμε το γράμμα **Η**
- Στο 3^ο τεταρτημόριο η εφαπτομένη με την συνεφαπτομένη είναι θετικές, γι'αυτό το γράμμα **Ε**
- Στο 4^ο τεταρτημόριο μόνο το συνημίτονο είναι θετικό, γι'αυτό το γράμμα **Σ**

Ε. Το Ακτίνιο

Ένα τόξο AB ενός κύκλου (O, ρ) λέγεται τόξο ενός **ακτινίου** (ή **1 rad**), αν το τόξο αυτό έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Ακτίνιο (ή **1 rad**) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad)



Επομένως το τόξο α ακτινίων έχει μήκος $S = \alpha \cdot \rho$

Το ακτίνιο είναι μονάδα μέτρησης γωνιών και από τον ορισμό προκύπτει και η σχέση μοίρας και ακτινίου.

Έστω μια γωνία ω είναι μ° μοίρες και α rad, τότε ο τύπος που συνδέει μοίρες και ακτίνια είναι :

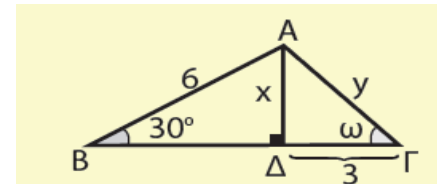
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Βασικών Γωνιών

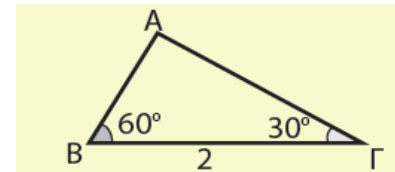
Μοίρες	rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	$\pi/2$	1	0	Δεν ορίζεται	0
180°	π	0	-1	0	Δεν ορίζεται
270°	$3\pi/2$	-1	0	Δεν ορίζεται	0
360°	2π	0	1	0	Δεν ορίζεται

Ασκήσεις

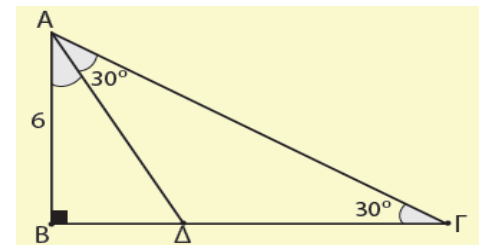
8.1 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x, y καθώς και την γωνία ω
(Σχολικό/1/A/σελ. 58)



8.2 Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του διπλανού σχήματος
(Σχολικό/2/A/σελ. 58)



8.3 Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ του διπλανού σχήματος
(Σχολικό/3/B/σελ. 59)



8.4 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), ισχύουν $AG = 3$ και $\text{συν}\Gamma = \frac{3}{5}$. Να βρείτε :

- α) τις πλευρές AB και BG
- β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{B}$.

8.5 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), ισχύουν $B\Gamma = 20$ και $\eta\mu B = \frac{4}{5}$. Να βρείτε :

- α) τις πλευρές AB και AG
- β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$

8.6 Σε ορθογώνιο τρίγωνο η μια κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της άλλης. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξείων γωνιών του τριγώνου .

8.7 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), ισχύουν $\eta\mu B = \frac{3}{5}$ και $\text{συν}B = \frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$

8.8 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι $\beta \cdot \text{συν}\Gamma + \gamma \cdot \text{συν}B = \alpha$

8.9 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi B + \epsilon\phi\Gamma = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma}$

8.10 Να εκφράσετε σε rad τη γωνία : α) 30° β) 120° γ) 1260° δ) -1845°
(Σχολικό/4/A/σελ. 58)

8.11 Να μετατρέψετε σε μοίρες την γωνία : α) $\frac{\pi}{10}$ β) $\frac{5\pi}{6}$ γ) $\frac{91\pi}{3}$ δ) 100 rad

(Σχολικό/5/A/σελ. 58)

8.12 Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο $S = 6$ cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια , αν η ακτίνα του κύκλου είναι : α) $\rho = 1$ cm β) $\rho = 2$ cm γ) $\rho = 3$ cm (Σχολικό/3/A/σελ. 58)

8.13 Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο $S = 30$ cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια , αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 0,2$ cm

8.14 Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο $S = 2$ cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια , αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 10$ cm

8.15 Να βρείτε το μήκος S ενός τόξου στο οποίο βαίνει γωνία 15° , αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 4$ cm

8.16 Να εκφράσετε σε rad τη γωνία : α) 75° β) 150° γ) 240° δ) 300°

8.17 Να μετατρέψετε σε μοίρες την γωνία : α) $\frac{\pi}{4}$ β) $\frac{7\pi}{9}$ γ) $\frac{5\pi}{2}$ δ) $\frac{9\pi}{4}$

8.18 Η διαφορά δύο γωνιών είναι 30° και το άθροισμά τους $\frac{\pi}{3}$ rad .

α) Πόσα ακτίνια είναι η κάθε γωνία ;

β) Πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία ;

8.19 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = 2\sin\frac{\pi}{3} + 2\eta\mu\frac{\pi}{6} + 3\sigma\varphi\frac{\pi}{3} - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \quad \beta) B = 3\eta\mu^2\frac{\pi}{3} + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - \epsilon\varphi^2\frac{\pi}{3}$$

$$\gamma) \Gamma = \eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \epsilon\varphi\pi + \sigma\varphi\frac{3\pi}{2} \quad \delta) \Delta = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \epsilon\varphi\frac{\pi}{4} - 2\eta\mu\frac{\pi}{6}$$

8.20 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2\eta\mu 30^\circ + 2\epsilon\varphi 30^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ + \epsilon\varphi 45^\circ}{2\sigma\upsilon\nu 60^\circ - 2\sigma\varphi 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\varphi 45^\circ}$

8.21 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = \frac{3}{2} \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + (1 - 2\epsilon\varphi 45^\circ)^{2018} \quad \beta) B = \eta\mu^2\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} + \epsilon\varphi\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\varphi\frac{\pi}{6}$$

8.22 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = \frac{2\eta\mu 30^\circ + 2\epsilon\varphi 30^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ + \epsilon\varphi 45^\circ}{2\sigma\upsilon\nu 60^\circ - 2\sigma\varphi 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\varphi 45^\circ} \quad \beta) B = \frac{2\eta\mu\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\epsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \cdot \sigma\varphi\frac{\pi}{3} + \sigma\varphi\frac{\pi}{4}}$$

8.23 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = \eta\mu 60^\circ \cdot \sigma\varphi 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \epsilon\varphi 45^\circ \quad \beta) B = \eta\mu\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - 3\sigma\varphi\frac{\pi}{3} + \sqrt{2} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$\gamma) \Gamma = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \eta\mu\pi - \sigma\upsilon\nu\pi + \eta\mu 0 \quad \delta) \Delta = 2\eta\mu^2\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4} + 3\sigma\varphi^2\frac{\pi}{3}$$

8.24 Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ μια επίκεντρη γωνία $\frac{\pi}{2}$ rad βαίνει σε τόξο μήκους 30cm και μια επίκεντρη γωνία θ βαίνει σε τόξο μήκους $\frac{4\pi}{3}$ cm . Να βρείτε :

α) την ακτίνα ρ του κύκλου β) τη γωνία θ σε rad και σε μοίρες.

8.25 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

α) 1830^ο β) 2940^ο γ) 1980^ο δ) 3600^ο (Σχολικό/6/Α/σελ. 58)

8.26 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

$$\alpha) 720^\circ \qquad \beta) -13\pi \qquad \gamma) 1890^\circ \qquad \delta) \frac{11\pi}{2}$$

8.27 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

$$\alpha) 1845^\circ \qquad \beta) \frac{91\pi}{3} \qquad \gamma) 2790^\circ \qquad \delta) \frac{61\pi}{6}$$

8.28 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

$$\alpha) 780^\circ \qquad \beta) \frac{-35\pi}{6} \qquad \gamma) 4500^\circ \qquad \delta) \frac{-39\pi}{4}$$

8.29 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

$$\alpha) -675^\circ \quad \beta) \frac{91\pi}{3} \quad \gamma) -4590^\circ \quad \delta) \frac{61\pi}{6}$$

8.30 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) 1125° β) $\frac{25\pi}{3}$

8.31 Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 405^\circ - \eta\mu 750^\circ}{\sigma\upsilon\nu 1125^\circ + \sigma\upsilon\nu 1860^\circ} = 3 - 2\sqrt{2}$

8.32 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\sin 60^\circ \cdot \varepsilon\phi 1845^\circ \cdot \eta\mu (-690^\circ)}{\sigma\phi 390^\circ \cdot \eta\mu 2070^\circ}$

8.33 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = \eta\mu 390^\circ + \eta\mu 780^\circ \cdot \varepsilon\varphi 1.140^\circ \qquad \beta) B = \eta\mu \frac{49\pi}{6} + \sigma\nu\nu \frac{37\pi}{3} - \varepsilon\varphi \frac{17\pi}{4}$$

8.34 Να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών :

$$\alpha) 50^\circ \quad \beta) 290^\circ \quad \gamma) 160^\circ \quad \delta) \frac{5\pi}{8} \quad \varepsilon) \frac{7\pi}{4}$$

8.35 Να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών :

$$\alpha) \eta\mu 770^\circ \quad \beta) \sigma\upsilon\nu 1180^\circ \quad \gamma) \epsilon\varphi 1640^\circ \quad \delta) \sigma\varphi \frac{34\pi}{4} \quad \epsilon) \sigma\upsilon\nu \frac{291\pi}{20}$$

8.36 Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $A = \varepsilon\varphi 140^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$ β) $B = \eta\mu 38^\circ - \varepsilon\varphi 100^\circ - \sigma\upsilon\nu 250^\circ$

8.37 Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $A = \sin 96^\circ \cdot \eta\mu 182^\circ - \epsilon\varphi 300^\circ$ β) $B = \eta\mu \frac{6\pi}{10} \cdot \sin \frac{6\pi}{10} + \sigma\varphi \frac{7\pi}{8}$

8.38 Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $A = \sin 87^\circ \cdot \eta\mu 100^\circ \cdot \sigma\varphi 280^\circ$ β) $B = \sigma\varphi 125^\circ - \epsilon\varphi 220^\circ - \sin 325^\circ$

8.39 Αν $\frac{9\pi}{2} < \omega < \frac{14\pi}{3}$ να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\omega - \sin\omega > \epsilon\varphi\omega + \sigma\varphi\omega$

8.40 Αν $\frac{5\pi}{2} < \omega < 3\pi$ να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\omega - \epsilon\varphi\omega > \sin\omega + \sigma\varphi\omega$

8.41 Αν $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\omega \cdot \epsilon\varphi\varphi - \sigma\varphi\omega > 0$

8.42 Αν $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τα πρόσημα των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu\varphi \cdot \sin\varphi + \epsilon\varphi\varphi$ β) $B = \eta\mu\varphi \cdot \epsilon\varphi\varphi + \sin\varphi$

8.43 Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 5\eta\mu\omega$ β) $B = -6\eta\mu\omega$ γ) $\Gamma = -3\sin\omega + 6$ δ) $\Delta = 3\eta\mu\omega + 4\sin\varphi$

8.44 Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 5\eta\mu\omega - 3$ β) $B = 3\eta\mu\omega + 10\sin\omega + 2$ γ) $\Gamma = 4 + 3\eta\mu\omega - 2\sin\omega$

8.45 Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 2 + 3\eta\mu 2\omega$ β) $B = 5 - 2\sin \frac{\omega}{2}$ γ) $\Gamma = \frac{1}{2 - \eta\mu \frac{\omega}{3}}$

8.46 Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 2\eta\mu\omega - 3\sin\varphi$ β) $B = 2 - \sin^2\omega$ γ) $\Gamma = \frac{\eta\mu\omega + 3}{2 - \sin\varphi}$

8.47 Να βρείτε το εύρος των τιμών των παραστάσεων: α) $A = 3 + 2\eta\mu\omega$ β) $B = 4 - \eta\mu^2\omega$

8.48 Αν για μια γωνία ω και έναν $\lambda \in \mathbb{Z}$ ισχύει: $\sin\omega = \frac{1-3\lambda}{2}$, τότε να βρείτε τις δυνατές τιμές του λ

8.49 Αν για μια γωνία ω και έναν $\lambda \in \mathbb{Z}$ ισχύει: $\eta\mu\omega = \frac{3\lambda-2}{4}$, τότε να βρείτε τις δυνατές τιμές του λ

8.50 Να αποδείξετε ότι: α) $|5\sin\omega + 2\sin\theta| \leq 7$ β) $|2\eta\mu\omega + 3\sin\theta| \leq 5$

8.51 Να αποδείξετε ότι: α) $|2\eta\mu\omega - 3\sin\theta| \leq 7$ β) $|3\eta\mu\omega + \sin\theta| \leq 4$

8.52 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \eta\mu\theta = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού θ

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $2x_1x_2 \leq x_1 + x_2$

9. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Τριγωνομετρική ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών και η οποία ισχύει για κάθε τιμή των γωνιών.

Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι οι ακόλουθες :

$$1) \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

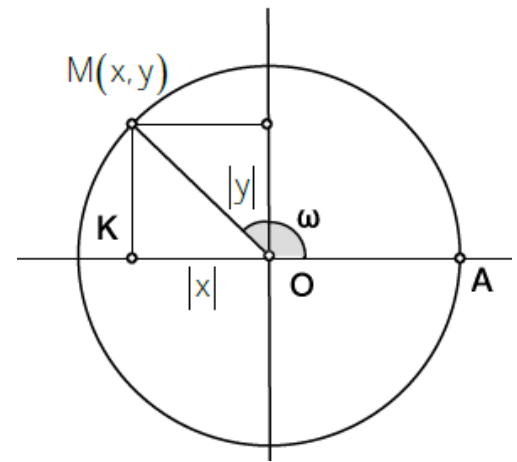
Έστω $M(x, y)$ το σημείο στο οποίο τέμνει η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τον τριγωνομετρικό κύκλο .

Τότε θα είναι : $\eta\mu\omega = y$, $\sigma\upsilon\nu\omega = x$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OKM έχουμε :

$$(OK)^2 + (KM)^2 = (OM)^2 \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 = 1^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$



$$2) \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Από τον ορισμό της εφαπτομένης , έχουμε $\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$ (1) .

Όμως είναι : $\eta\mu\omega = y$, $\sigma\upsilon\nu\omega = x$, άρα η (1) $\Rightarrow \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

$$3) \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

Από τον ορισμό της συνεφαπτομένης , έχουμε $\sigma\phi\omega = \frac{x}{y}$ (1) .

Όμως είναι : $\eta\mu\omega = y$, $\sigma\upsilon\nu\omega = x$, άρα η (1) $\Rightarrow \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

$$4) \epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

Παίρνουμε το πρώτο μέλος : $\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$.

– Από την ταυτότητα αυτή προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις : $\epsilon\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$

Το ημῆμιτονο και το συνημίτονο συναρτήσει της εφαπτομένης

Συνδυάζοντας τις δύο πρώτες ταυτότητες προκύπτουν επιπλέον δύο νέες ταυτότητες :

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$$

Ασκήσεις

9.1 Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5} \text{ rad}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x \text{ rad}$.
(Σχολικό/1/A/σ.63)

9.2 Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3} \text{ rad}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x \text{ rad}$.
(Σχολικό/2/A/σ.63)

9.3 Αν $\epsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ rad}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x \text{ rad}$.
(Σχολικό/3/A/σ.63)

9.4 Αν $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ rad}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x \text{ rad}$.
(Σχολικό/4/A/σ.63)

9.5 Αν $\sigma\varphi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$.
(Σχολικό/5/A/σ.63)

9.6 Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5} \text{ rad}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x \text{ rad}$

9.7 Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{12}{13} \text{ rad}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x \text{ rad}$

9.8 Αν $\epsilon\varphi x = \frac{3}{4} \text{ rad}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x \text{ rad}$

9.9 Αν είναι $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x

9.10 Αν είναι $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\epsilon\varphi x = 9\sigma\varphi x$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x

9.11 Αν $6\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$.

9.12 Αν $5\sigma\upsilon\nu^2\omega - \sigma\upsilon\nu\omega - 4 = 0$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

9.13 Αν $6\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 5 = 0$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

9.14 Αν $4\eta\mu^2\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega = 5$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$.

9.15 Για την γωνία ω ισχύουν $\eta\mu\omega = \frac{3\lambda + 1}{5\lambda}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4\lambda - 1}{5\lambda}$, $\lambda \neq 0$. Να βρείτε :

α) την τιμή του λ β) την $\epsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$

9.16 Για την γωνία ω ισχύουν $\eta\mu\omega = \frac{1 - 4\lambda}{5\lambda}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{7 - 3\lambda}{5\lambda}$, $\lambda \neq 0$. Να βρείτε :

α) την τιμή του λ β) την $\epsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$

9.17 Για την γωνία ω ισχύουν $\eta\mu\omega = \frac{3\lambda - 1}{5\lambda + 3}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4\lambda + 4}{5\lambda + 3}$. Να βρείτε :

α) την τιμή του λ β) την $\epsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$

9.18 Για την γωνία ω ισχύουν $\eta\mu\omega = \frac{\lambda + 2}{\lambda + 4}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\lambda}{\lambda + 4}$. Να βρείτε :

α) την τιμή του λ β) την $\epsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$

9.19 Για την γωνία ω ισχύουν $\epsilon\phi\omega = \frac{\lambda}{\lambda + 2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2\lambda}{1 - \lambda}$. Να βρείτε την τιμή του λ .

9.20 Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου με $x = 3\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$ είναι σημεία του κύκλου με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3$ (Σχολικό/7/A/σ.63)

9.21 Αν ισχύει $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$ να αποδείξετε ότι $9x^2 + 4y^2 = 36$ (Σχολικό/8/A/σ.63)

9.22 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $A = \eta\mu\omega \cdot \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega} - \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \sqrt{1 - \eta\mu^2\omega}$ αν $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

β) $B = \sqrt{(1 - \eta\mu^2\omega) \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega)} + \eta\mu\omega \cdot |\sigma\upsilon\nu\omega|$, αν $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

9.23 Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{\eta\mu^3\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^3\omega \cdot \eta\mu\omega}{2\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega}$

9.24 Να αποδείξετε ότι : α) $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$ β) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ (Σχολικό)

9.25 Να αποδείξετε ότι : α) $\frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta}$ β) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$ (Σχολικό)

9.26 Να αποδείξετε ότι : α) $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} + \frac{1 + \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta}$ β) $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$

9.27 Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1 - \eta\mu\omega} = 1 + \eta\mu\omega$ β) $\frac{\eta\mu^2\omega}{1 - \sigma\upsilon\nu\omega} = 1 + \sigma\upsilon\nu\omega$ γ) $\eta\mu\omega \cdot \left(\frac{1}{\eta\mu\omega} - \eta\mu\omega\right) = \sigma\upsilon\nu^2\omega$

9.28 Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} \quad \beta) \varepsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \varepsilon\varphi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha \quad (\text{Σχολικό/12/A/σ.64})$$

9.29 Να αποδείξετε ότι : $\alpha) \frac{(1-\sigma\upsilon\nu\omega) \cdot (1+\sigma\upsilon\nu\omega)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \varepsilon\varphi^2\omega$ $\beta) \varepsilon\varphi^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

9.30 Να αποδείξετε ότι : $\frac{1-\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega$

9.31 Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) (\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 2 \quad \beta) (3\sigma\upsilon\nu\omega - 4\eta\mu\omega)^2 + (4\sigma\upsilon\nu\omega + 3\eta\mu\omega)^2 = 25$$

$$\gamma) (\varepsilon\varphi^2\omega + 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu^2\omega + 1) = \varepsilon\varphi^2\omega + 2$$

9.32 Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \varepsilon\varphi^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\varphi^2\omega \cdot \eta\mu^2\omega = 1 \quad \beta) (\alpha\sigma\upsilon\nu\omega + \beta\eta\mu\omega)^2 + (\alpha\eta\mu\omega - \beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

9.33 Να αποδείξετε ότι οι επόμενες παραστάσεις έχουν σταθερή τιμή :

$$\alpha) A = \frac{\eta\mu^2\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{\eta\mu^2\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \beta) B = \frac{\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega} + \sigma\upsilon\nu\omega$$

9.34 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του ω :

$$\alpha) A = 1 - 2\eta\mu^2\omega + (\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega)^2 + 2\eta\mu\omega \cdot (\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega)$$

$$\beta) B = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{2 + \varepsilon\varphi^2\omega} + \frac{1 + \eta\mu^2\omega}{2 + \sigma\varphi^2\omega}$$

9.35 Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \leq \frac{1}{2}$

9.36 Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta \leq 1 + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \quad \beta) 9\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 6\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu^2\beta \leq 10$$

9.37 Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + (5 - 3\eta\mu\alpha)x + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 0$

$\alpha)$ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α

$\beta)$ Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης και ισχύει $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{9}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να βρείτε τους

τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α .

9.38 Δίνεται η εξίσωση $(1 + \eta\mu\omega)x^2 - (1 + \eta\mu^2\omega)x + (1 - \eta\mu\omega)\eta\mu\omega = 0$ με $\eta\mu\omega \neq -1$.

Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 1$

10. Αναγωγή στο 1^ο Τεταρτημόριο

Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας από 0° έως 90° γίνεται με την βοήθεια πινάκων που περιέχουν τους τριγωνομετρικούς αυτούς αριθμούς.

Αν η γωνία όμως δεν ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο τότε για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς της αριθμούς θα αξιοποιήσουμε τις συμμετρίες που προσφέρει το καρτεσιανό σύστημα.

Γωνίες του 2^{ου} Τεταρτημορίου

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
$\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$

Γωνίες του 3^{ου} Τεταρτημορίου

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° , έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
$\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$

Γωνίες του 4^{ου} Τεταρτημορίου

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$

Γωνίες του 1^{ου} Τεταρτημορίου

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90° , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με την συνεφαπτομένη της άλλης.

$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
$\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \epsilon\varphi\omega$

Ασκήσεις

10.1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ , συναρτήσει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

φ	$\frac{\pi}{2} - \omega$	$\frac{\pi}{2} + \omega$	$\pi - \omega$	$\pi + \omega$	$\frac{3\pi}{2} - \omega$	$\frac{3\pi}{2} + \omega$	$2\pi - \omega$
ημ φ							
συν φ							
εφ φ							
σφ φ							

10.2 Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) 1200° β) -2850°
(Σχολικό/1/A/σελ.70)

10.3 Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) 210° β) -1050° γ) 315°

10.4 Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) 120° β) -45° γ) 330°

10.5 Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) 240° β) 960° γ) 1770°

10.6 Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) $\frac{187\pi}{6}$ β) $\frac{21\pi}{4}$
(Σχολικό/2/A/σελ.70)

10.7 Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) $\frac{7\pi}{6}$ β) $\frac{2014\pi}{6}$ γ) $-\frac{43\pi}{6}$

10.8 Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) $\frac{5\pi}{4}$ β) $\frac{11\pi}{6}$ γ) $-\frac{\pi}{3}$

10.9 Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) $\frac{27\pi}{4}$ β) $\frac{19\pi}{6}$ γ) $\frac{67\pi}{6}$

10.10 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$\frac{\eta\mu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu (-120^\circ)}{\epsilon\varphi (-120^\circ) + \epsilon\varphi 495^\circ}$$

(Σχολικό/1/B/σελ.71)

10.11 Να αποδείξετε ότι
$$\frac{\epsilon\varphi 120^\circ \cdot \eta\mu 210^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \epsilon\varphi 225^\circ}{\sigma\varphi 210^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \eta\mu (-45^\circ) \cdot \epsilon\varphi 135^\circ} = 1$$

10.12 Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} \cdot \epsilon\varphi \frac{4\pi}{3}}{2\eta\mu \frac{4\pi}{3} \cdot \epsilon\varphi \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\varphi \frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

10.13 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\varphi 240^\circ}{\sigma\upsilon\nu (-45^\circ) + \eta\mu 225^\circ + \eta\mu 120^\circ + \epsilon\varphi 150^\circ}$

10.14 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} \cdot \epsilon\varphi \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4}}{\eta\mu \frac{2\pi}{3} \cdot \epsilon\varphi \frac{3\pi}{4} \cdot \sigma\varphi \frac{5\pi}{6} \cdot \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

10.15 Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\frac{\sigma\upsilon\nu (-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu (180^\circ + \alpha)}{\eta\mu (-\alpha) \cdot \eta\mu (90^\circ + \alpha)}$ (Σχολικό/4/A/σελ.70)

10.16 Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu (\pi - \alpha) \cdot \sigma\varphi (90^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu (2\pi - \alpha)}{\epsilon\varphi (\pi + \alpha) \cdot \epsilon\varphi (90^\circ + \alpha) \cdot \eta\mu \alpha} + \eta\mu \alpha = 0$

10.17 Να αποδείξετε ότι $\frac{\epsilon\varphi (\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu (2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu (13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu (-x) \cdot \sigma\varphi \left(\frac{21\pi}{2} - x\right)} = -1$ (Σχολικό/5/A/σελ.70)

10.18 Να αποδείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση :

$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (Σχολικό/6/A/σελ.70)

10.19 Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu (5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu (7\pi - \omega) \cdot \eta\mu \left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\varphi (5\pi + \omega) \cdot \eta\mu (7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\varphi \left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \eta\mu^2\omega - 1$

(Σχολικό/2/B/σελ.71)

10.20 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\frac{\eta\mu (7\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu (21\pi - \omega)}{\eta\mu (13\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu (38\pi - \omega)}$ β) $\frac{\sigma\varphi (3\pi + \omega) + \sigma\upsilon\nu (8\pi - \omega)}{\sigma\varphi (27\pi - \omega) + \sigma\upsilon\nu (23\pi + \omega)}$

10.21 Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{\epsilon\varphi (\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu (-\omega) \cdot \eta\mu (9\pi + \omega)}{\sigma\upsilon\nu (\omega - 2\pi) \cdot \sigma\varphi \left(\frac{17\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{13\pi}{2} + \omega\right)} = 1$

β) $\frac{\sigma\upsilon\nu (\omega - 2\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \epsilon\varphi (3\pi + \omega)}{\eta\mu (5\pi - \omega) \cdot \sigma\varphi \left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) \cdot \eta\mu \left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} = -1$

10.22 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\frac{\eta\mu (90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu (180^\circ + \omega)}{\sigma\upsilon\nu (90^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu (180^\circ - \omega)}$ β) $\frac{\sigma\upsilon\nu (720^\circ - \omega) \cdot \epsilon\varphi (90^\circ - \omega)}{\eta\mu (270^\circ - \omega) \cdot \epsilon\varphi (270^\circ + \omega)}$

10.23 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) \frac{\sin(\omega - 2\pi) \cdot \cos\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu(\omega - \pi)}{\sin(\omega - 3\pi) \cdot \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\varphi(\omega - \pi)} \quad \beta) \frac{\eta\mu(\omega - 5\pi) + \eta\mu\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\omega - 11\pi) + \sin\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

10.24 Να αποδείξετε ότι : $\frac{\sin(2\pi - \omega) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sin(\pi - \omega) \cdot \sin(\pi + \omega)}{\eta\mu(5\pi - \omega) + \eta\mu(7\pi + \omega) \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \omega\right) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \omega\right)} = \varepsilon\varphi\omega$

10.25 Αν είναι $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ για την οποία ισχύει $15\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x - 12 = 0$. Να υπολογίσετε :

α) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x

β) την τιμή της παράστασης $\frac{2\sin(17\pi + x) + \sin\left(\frac{15\pi}{2} + x\right)}{3\varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + 4\sigma\varphi\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)}$

10.26 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

α) $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$

β) $\sin A + \sin(B + \Gamma) = 0$

γ) $\eta\mu \frac{A}{2} = \sin \frac{B + \Gamma}{2}$

δ) $\sin \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}$ (Σχολικό/3/Α/σελ.70)

10.27 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

α) $\eta\mu^2(B + \Gamma) + \sin^2 A = 1$

β) $\sigma\varphi A \cdot \varepsilon\varphi(B + \Gamma) = -1$

10.28 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

α) $\eta\mu(A + 2B + \Gamma) + \eta\mu B = 0$

β) $\sin(2A + B + \Gamma) - \sin(B + \Gamma) = 0$

10.29 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $K = \sin A \cdot \varepsilon\varphi(B + \Gamma) + \eta\mu(B + \Gamma)$

β) $M = \sin \frac{A}{2} \cdot \sigma\varphi \frac{B + \Gamma}{2} - \sin \frac{B + \Gamma}{2}$

10.30 Σε κάθε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι :

α) $\eta\mu \frac{A + B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma + \Delta}{2}$

β) $\varepsilon\varphi \frac{A + B}{2} = -\varepsilon\varphi \frac{\Gamma + \Delta}{2}$

11. Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Περιοδική Συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύουν :

α) $x + T \in A$, $x - T \in A$

β) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Η Συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

α) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = [-1, 1]$ αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιττή, άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Πράγματι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$. Πράγματι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x$

► Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , αρκεί να την μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π , δηλαδή π.χ. στο $[0, 2\pi]$.

ε) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

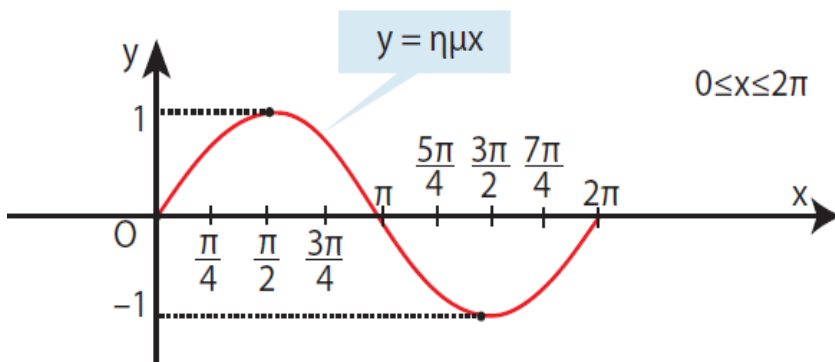
και γνησίως φθίνουσα στα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

στ) Η f παρουσιάζει μέγιστο στην θέση $x = \frac{\pi}{2}$ το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στην θέση $x = \frac{3\pi}{2}$ το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1 μέγ.	0	-1 ελάχ.	0

ζ) Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και λέγεται ημιτονοειδής καμπύλη .



Επειδή η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο 2π , η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται ανά διαστήματα πλάτους 2π .

Η Συνάρτηση $f(x) = \sin x$

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = [-1, 1]$ αφού $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι άρτια, άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$

Πράγματι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

Πράγματι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x$

► Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , αρκεί να την μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π , δηλαδή π.χ. στο $[0, 2\pi]$.

ε) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

και γνησίως φθίνουσα στα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

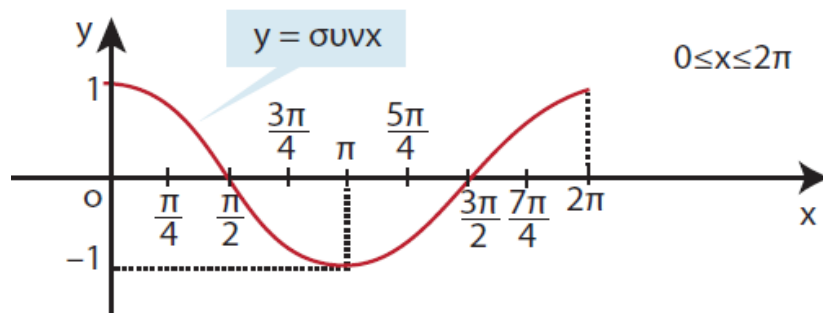
στ) Η f παρουσιάζει μέγιστο στην θέση $x = 0$ το $f(0) = \sin 0 = 0$

Η f παρουσιάζει μέγιστο στην θέση $x = 2\pi$ το $f(2\pi) = \sin 2\pi = 0$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στην θέση $x = \pi$ το $f(\pi) = \sin \pi = 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	1 μέγ.	0	-1 ελάχ.	0	1 μέγ.

ζ) Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Επειδή η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο 2π , η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται ανά διαστήματα πλάτους 2π .

Η Συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$

α) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ εκτός από τα σημεία όπου μηδενίζεται το συνημίτονο μιας και $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Δηλαδή το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$. Πράγματι $\forall x \in A$ ισχύει :

$$\varepsilon\varphi(x + \pi) = \varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi x \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi(x - \pi) = \varepsilon\varphi(-(\pi - x)) = -\varepsilon\varphi(\pi - x) = \varepsilon\varphi x$$

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιττή, άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

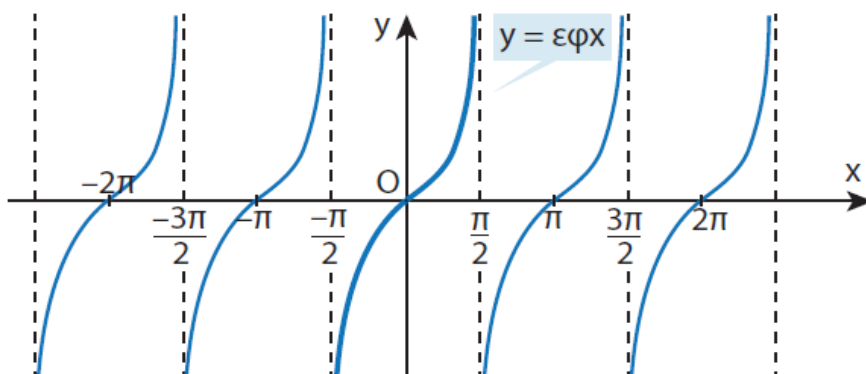
Πράγματι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(-x) = \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x = -f(x)$

► Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο π , αρκεί να την μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π , δηλαδή π.χ. στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ζ) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ δεν έχει ακρότατα.

η) Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Η Συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ εκτός από τα σημεία όπου μηδενίζεται το ημίτονο μιας και $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$.

Δηλαδή το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / \eta\mu x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$. Πράγματι $\forall x \in A$ ισχύει :

$$\sigma\phi(x + \pi) = \sigma\phi(\pi + x) = \sigma\phi x \quad \text{και} \quad \sigma\phi(x - \pi) = \sigma\phi(-(\pi - x)) = -\sigma\phi(\pi - x) = \sigma\phi x$$

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι περιττή, άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

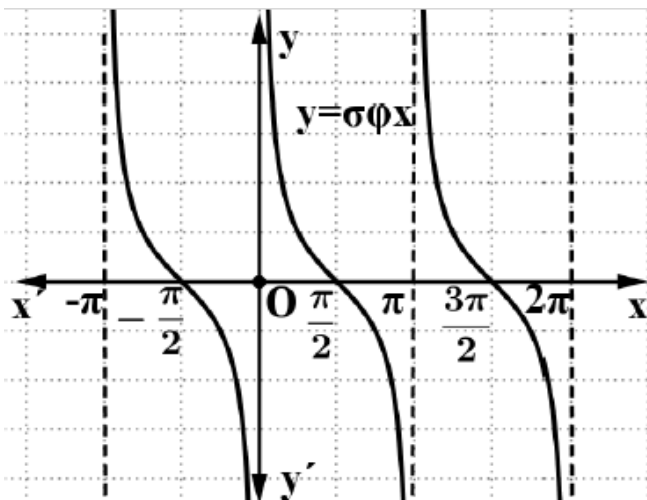
Πράγματι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(-x) = \sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x = -f(x)$

► Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο π , αρκεί να την μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π , δηλαδή π.χ. στο $(0, \pi)$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi)$

ζ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ δεν έχει ακρότατα.

η) Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ και $g(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$

Έχουν :

► περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$

► μέγιστη τιμή την $|\rho|$

► ελάχιστη τιμή την $-|\rho|$

Ασκήσεις

11.1 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 2\eta\mu x$ και $g(x) = 0,5 \cdot \eta\mu x$ και $h(x) = -2\eta\mu x$ με $0 \leq x \leq 2\pi$

β) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = 0,5 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ και $h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$ με $0 \leq x \leq 2\pi$ (Σχολικό)

11.2 Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 1 + \eta\mu x$ και $h(x) = -1 + \eta\mu x$ (Σχολικό)

11.3 Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 2 + \eta\mu x$ και $h(x) = 2 + \eta\mu x$ για $0 \leq x \leq 2\pi$

11.4 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \eta\mu 3x$ με $0 \leq x \leq 2\pi$

β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ με $0 \leq x \leq 2\pi$ (Σχολικό)

11.5 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x) = |\eta\mu x|$ β) $g(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$

11.6 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \epsilon\phi x$ και $g(x) = 1 + \epsilon\phi x$ και $h(x) = -1 + \epsilon\phi x$ (Σχολικό)

11.7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu 3x$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

11.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε το σύνολο τιμών και τα ολικά ακρότατα

11.9 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση :

α) $f(x) = \eta\mu 2x + \epsilon\phi x$ έχει περίοδο $T = \pi$

β) $f(x) = 2\eta\mu 8x - 3\sigma\upsilon\nu 4x$ έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$

γ) $f(x) = \eta\mu \frac{x}{3} + 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ έχει περίοδο $T = 12\pi$

11.10 Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή :

α) $f(x) = 2\eta\mu x - \epsilon\phi x$

β) $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x}{3 + \sigma\upsilon\nu x}$

γ) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

11.11 Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή :

α) $f(x) = x - \eta\mu x$

β) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1 + \eta\mu^2 x}$

γ) $f(x) = x \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

11.12 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = 4x^7 + 2\eta\mu x$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ β) $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu x}$ στο $(0, \pi)$

11.13 Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

α) $\eta\mu \frac{\pi}{5}$ και $\eta\mu \frac{\pi}{7}$ β) $\eta\mu \frac{6\pi}{5}$ και $\eta\mu \frac{13\pi}{10}$ γ) $\eta\mu \frac{7\pi}{4}$ και $\eta\mu \frac{15\pi}{8}$

11.14 Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

α) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8}$ β) $\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{10}$ και $\eta\mu \frac{9\pi}{10}$ γ) $\sigma\upsilon\nu \frac{8\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{9\pi}{5}$

11.15 α) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς :

$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{10}$

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και $\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$

11.16 Αν ισχύει $\frac{\pi}{8} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{4}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς :

α) $\eta\mu 4x_1$ και $\eta\mu 4x_2$ β) $\sigma\upsilon\nu 4x_1$ και $\sigma\upsilon\nu 4x_2$ γ) $\epsilon\varphi \left(\frac{\pi - 2x_1}{2}\right)$ και $\epsilon\varphi \left(\frac{\pi - 2x_2}{2}\right)$

11.17 Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$. Ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδός της ; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου (Σχολικό)

11.18 Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$. Ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδός της ; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου (Σχολικό)

11.19 Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 5\eta\mu 6x$ β) $f(x) = -12\sigma\upsilon\nu 8x$ γ) $f(x) = -2\eta\mu \frac{x}{4}$ δ) $f(x) = 4\eta\mu \frac{\pi x}{2}$

11.20 Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 10\eta\mu 8x - 20$ β) $f(x) = 2 - 8\eta\mu 10x$ γ) $f(x) = \frac{1}{10} - \frac{\sigma\upsilon\nu 12x}{5}$

11.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 2x - 3$

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-\pi \leq x \leq 2\pi$

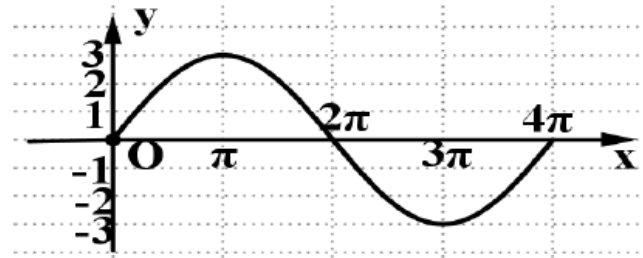
11.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin 3x + 2$

- α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq x \leq 2\pi$

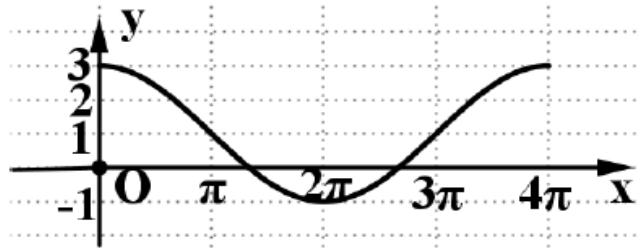
11.23 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\omega x$ έχει περίοδο $T = 6\pi$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

- α) Να βρείτε τους αριθμούς ω και α
 β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f
 γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.

11.24 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$
 Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών ω και ρ .



11.25 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\upsilon(\omega x) + \beta$ με $x \in [0, 4\pi]$
 Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών ω και α, β .



11.26 Η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - 1) \cdot \sigma\upsilon\upsilon\beta x$ με $\alpha < 1$ και $\beta > 0$, έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{3}$ και ελάχιστη τιμή -3 . Να βρείτε τις τιμές των α και β .

11.27 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + 2\eta\mu\omega x$ έχει περίοδο $T = \pi$ και μέγιστη τιμή -1
 α) Να βρείτε τους αριθμούς ω και α
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-\pi \leq x \leq 2\pi$

11.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu x + \beta$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, 5\right)$ τότε να βρείτε:
 α) τους πραγματικούς αριθμούς α και β
 β) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

11.29 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \beta \cdot \sigma\upsilon\upsilon\omega x$ με $\beta < 0$, έχει περίοδο $T = \pi$, μέγιστη τιμή 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$
 α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β και ω
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-\pi \leq x \leq 2\pi$

11.30 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sin \frac{x}{\beta}$ με $\alpha, \beta > 0$, έχει περίοδο $T = 6\pi$, μέγιστη τιμή 2. Να βρείτε :

α) τον τύπο της συνάρτησης β) τις τιμές $f(2\pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

11.31 Η συνάρτηση $f(x) = \beta + 2\alpha \cdot \eta\mu\omega x$ με $\alpha, \omega > 0$. Αν η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει περίοδο $T = 3$ και μέγιστη τιμή $3 - \alpha$, να βρείτε τα α, β, ω

11.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \eta\mu(\pi + x)$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

β) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.

11.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(7\pi - 2x) - \sin\left(\frac{17\pi}{2} + 2x\right)$

α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$

β) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-\pi \leq x \leq \pi$

11.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -4\sin\left(\pi + \frac{x}{3}\right) - \eta\mu\left(\frac{3\pi - 2x}{6}\right)$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

β) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.

11.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi - x}{2}\right) + 3\eta\mu\left(\frac{\pi + x}{2}\right)$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

β) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-4\pi \leq x \leq 4\pi$

12. Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

► Μια εξίσωση που περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς αγνώστων γωνιών, λέγεται τριγωνομετρική εξίσωση

Η Εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$

► Αν $-1 \leq \alpha \leq 1$ τότε υπάρχει γωνία θ τέτοια, ώστε $\eta\mu\theta = \alpha$ και η εξίσωση γίνεται :

$$\eta\mu x = \alpha \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

► Αν $\alpha < -1$ ή $\alpha > 1$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Η Εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$

► Αν $-1 \leq \alpha \leq 1$ τότε υπάρχει γωνία θ τέτοια, ώστε $\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha$ και η εξίσωση γίνεται :

$$\sigma\upsilon\nu x = \alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

► Αν $\alpha < -1$ ή $\alpha > 1$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Η Εξίσωση $\epsilon\varphi x = \alpha$

$$\epsilon\varphi x = \alpha \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = \epsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Η Εξίσωση $\sigma\varphi x = \alpha$

$$\sigma\varphi x = \alpha \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ασκήσεις

12.1 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{llllll} \alpha) \eta\mu x = 0 & \beta) \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \gamma) \sigma\upsilon\nu x = 0 & \delta) \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \epsilon) \eta\mu x = -\frac{1}{2} \\ \zeta) \eta\mu x = -1 & \eta) \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \theta) \sigma\upsilon\nu x = -1 & & (\text{Σχολικό}) \end{array}$$

12.2 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{llll} \alpha) \epsilon\varphi x = 0 & \beta) \epsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3} & \gamma) \sigma\varphi x = 1 & \delta) \sigma\varphi x = \sqrt{3} \\ \epsilon) \epsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} & \zeta) \sigma\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} & & (\text{Σχολικό}) \end{array}$$

12.3 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \sqrt{2} \cdot \eta\mu x - 1 = 0 \quad \beta) 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \quad \gamma) \sqrt{3} \cdot \epsilon\varphi x + 1 = 0 \quad \delta) 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} = 0$$

12.4 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 2\eta\mu^2 x = 1 \quad \beta) 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \quad \gamma) \epsilon\varphi^2 x - 3 = 0 \quad \delta) \sigma\varphi^2 x - 3 = 0$$

12.5 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{llll} \alpha) (1 - \eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0 & \beta) (2\eta\mu x + \sqrt{2})(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 & \gamma) (1 - \epsilon\varphi x)(\sqrt{3} + \epsilon\varphi x) = 0 \\ \delta) (\epsilon\varphi^2 x - 3) \cdot (2\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot \sigma\varphi x = 0 & & & (\text{Σχολικό}) \end{array}$$

12.6 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) (\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1)(\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0 \quad \beta) (2\sqrt{3} \cdot \eta\mu x + 3)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{6}) = 0 \quad \gamma) (\eta\mu x - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

12.7 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 2\eta\mu^2 x - \eta\mu x = 0 \quad \beta) \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \gamma) \eta\mu x - \eta\mu^3 x = 0 \quad \delta) \eta\mu x = \epsilon\varphi x$$

12.8 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \beta) 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = -2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \quad \gamma) 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu x$$

12.9 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 2\eta\mu^2 x + \sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 0 \quad \beta) 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \gamma) \epsilon\varphi^2 x + \sqrt{3} \cdot \epsilon\varphi x = 0$$

12.10 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x + 1 \quad \beta) \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x = 0 \quad \gamma) \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \epsilon\varphi x + 1 = 0$$

12.11 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{llll} \alpha) 2 \cdot \eta\mu 3x = \sqrt{3} & \beta) \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} + 1 = 0 & \gamma) 3\epsilon\varphi \frac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0 & \delta) \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ \epsilon) 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 & \zeta) \epsilon\varphi \left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3} & & (\text{Σχολικό}) \end{array}$$

12.12 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \beta) \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \gamma) \epsilon\varphi \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \epsilon\varphi x$$

12.13 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \eta\mu \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu x \quad \beta) \sigma\upsilon\nu \left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sigma\upsilon\nu x \quad \gamma) \epsilon\varphi \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \epsilon\varphi \left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

12.14 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \beta) \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0 \quad \gamma) \epsilon\varphi \left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \epsilon\varphi \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

12.15 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \quad \beta) \epsilon\varphi 2x - \sigma\varphi \left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 \quad (\text{Σχολικό})$$

12.16 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \alpha) \eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu \left(x - \frac{\pi}{3}\right) & \beta) \sigma\upsilon\nu \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu \left(\frac{\pi}{3} - x\right) & \gamma) \epsilon\varphi \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sigma\varphi \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \delta) \eta\mu \left(x + \frac{3\pi}{8}\right) + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 & & \end{array}$$

12.17 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \sqrt{3} \cdot \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \quad \beta) \eta\mu x + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \gamma) \eta\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x \cdot \epsilon\varphi x$$

12.18 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \alpha) 2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0 & \beta) 2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0 & \gamma) 3\epsilon\varphi^2t = 3 + 2\sqrt{3} \cdot \epsilon\varphi t \\ \delta) \eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4 & & (\text{Σχολικό}) \end{array}$$

12.19 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 6\eta\mu^2x + 5\eta\mu x - 4 = 0 \quad \beta) 2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0 \quad \gamma) 2\sigma\upsilon\nu^4x - 5\sigma\upsilon\nu^2x + 2 = 0$$

12.20 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 8\eta\mu^2x + 2\eta\mu x - 3 = 0 \quad \beta) 2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \quad \gamma) \epsilon\varphi^2x - (\sqrt{3} - 1) \cdot \epsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$$

12.21 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 2\eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \quad \beta) \sigma\upsilon\nu^2x + 2\eta\mu x + 2 = 0 \quad \gamma) 4 - 3\sigma\upsilon\nu x = 3\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x$$

12.22 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) 2\sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu x - 2 = 0 \quad \beta) 3\sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu x + 1 = 0 \quad \gamma) \epsilon\varphi x - \sqrt{3} \cdot \sigma\varphi x = 1 - \sqrt{3}$$

12.23 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $1 - \eta\mu x = \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ β) $\sqrt{2 + \eta\mu x} = \eta\mu x$ γ) $\sqrt{1 + \epsilon\varphi^2 x} = \sigma\upsilon\nu x$

12.24 Να λύσετε στο $[0, \pi)$ τις εξισώσεις :

α) $2\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ β) $2\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

12.25 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ στο $(-\pi, \pi)$ β) $\sqrt{3} \cdot \sigma\varphi\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$ στο $(0, 2\pi)$

12.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x - \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$

12.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \eta\mu(\pi - 2x) + \eta\mu(\pi + 2x)$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, \pi]$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 3.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 3x$

12.28 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha + 2 \cdot \eta\mu(2\beta x)$ και $g(x) = \alpha + \beta + \sigma\upsilon\nu((\alpha + \beta)x)$, $\alpha, \beta > 0$

Αν οι συναρτήσεις έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$

β) να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{\pi}{4}\right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 3 = 2g(x)$ στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

13. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

Συνημίτονο Αθροίσματος και Διαφοράς Γωνιών

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

Ημίτονο Αθροίσματος και Διαφοράς Γωνιών

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha$$

Εφαπτομένη Αθροίσματος και Διαφοράς Γωνιών

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Συνεφαπτομένη Αθροίσματος και Διαφοράς Γωνιών

$$\sec(\alpha + \beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta - 1}{\sec\beta + \sec\alpha}$$

$$\sec(\alpha - \beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta + 1}{\sec\beta - \sec\alpha}$$

Ασκήσεις

13.1 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ συν} \frac{\pi}{12} \cdot \text{συν} \frac{\pi}{4} - \eta\mu \frac{\pi}{12} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4} & \beta) \text{ συν} 170^0 \text{ συν} 50^0 + \eta\mu 170^0 \eta\mu 50^0 \\ \gamma) \text{ συν} 110^0 \text{ συν} 70^0 - \eta\mu 110^0 \eta\mu 70^0 & \delta) \text{ συν} \frac{7\pi}{12} \cdot \text{συν} \frac{\pi}{12} + \eta\mu \frac{7\pi}{12} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{12} \\ \epsilon) \eta\mu \frac{17\pi}{18} \cdot \text{συν} \frac{4\pi}{9} - \text{συν} \frac{17\pi}{18} \cdot \eta\mu \frac{4\pi}{9} & \zeta) \eta\mu 70^0 \text{ συν} 20^0 + \text{συν} 70^0 \eta\mu 20^0 \\ \eta) \frac{\epsilon\varphi \frac{7\pi}{12} - \epsilon\varphi \frac{\pi}{4}}{1 + \epsilon\varphi \frac{7\pi}{12} \cdot \epsilon\varphi \frac{\pi}{4}} & \theta) \frac{\epsilon\varphi 165^0 + \epsilon\varphi 15^0}{1 - \epsilon\varphi 165^0 \cdot \epsilon\varphi 15^0} \quad (\text{Σχολικό}) \end{array}$$

13.2 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \eta\mu 35^0 \text{ συν} 10^0 + \text{συν} 35^0 \eta\mu 10^0 & \beta) \eta\mu 10^0 \text{ συν} 70^0 - \text{συν} 10^0 \eta\mu 70^0 \\ \gamma) \text{ συν} \frac{15\pi}{7} \cdot \text{συν} \frac{6\pi}{7} - \eta\mu \frac{15\pi}{7} \cdot \eta\mu \frac{6\pi}{7} & \delta) \eta\mu \frac{\pi}{5} \cdot \text{συν} \frac{6\pi}{5} - \text{συν} \frac{\pi}{5} \cdot \eta\mu \frac{6\pi}{5} \\ \epsilon) \frac{\epsilon\varphi \frac{\pi}{8} - \epsilon\varphi \frac{3\pi}{8}}{1 + \epsilon\varphi \frac{\pi}{8} \cdot \epsilon\varphi \frac{3\pi}{8}} & \zeta) \frac{\epsilon\varphi 40^0 + \epsilon\varphi 20^0}{1 - \epsilon\varphi 40^0 \cdot \epsilon\varphi 20^0} \end{array}$$

13.3 Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ συν} 3x \cdot \text{συν} (-2x) - \eta\mu 3x \cdot \eta\mu (-2x) & \beta) \text{ συν} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{συν} x + \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu x \\ \gamma) \eta\mu 2x \cdot \text{συν} x + \text{συν} 2x \cdot \eta\mu x & \delta) \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \text{συν} x - \text{συν} \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \eta\mu x \\ \epsilon) \frac{\epsilon\varphi x - \epsilon\varphi 2x}{1 - \epsilon\varphi x \cdot \epsilon\varphi 2x} & \zeta) \frac{\epsilon\varphi \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \epsilon\varphi \left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - \epsilon\varphi \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \epsilon\varphi \left(\frac{\pi}{6} - x\right)} \quad (\text{Σχολικό}) \end{array}$$

13.4 Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \eta\mu 3x \cdot \text{συν} 2x - \text{συν} 3x \cdot \eta\mu 2x & \beta) \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \text{συν} x - \text{συν} \left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \eta\mu x \\ \gamma) \frac{\epsilon\varphi \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \epsilon\varphi \left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{1 - \epsilon\varphi \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \epsilon\varphi \left(\frac{\pi}{6} + x\right)} & \delta) \text{ συν} \left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \text{συν} x + \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \eta\mu x \end{array}$$

13.5 Να αποδείξετε ότι :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ συν} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \text{συν} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \text{συν} x & \beta) \text{ συν}^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \text{συν}^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\eta\mu x \cdot \text{συν} x \\ \gamma) \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu x & \delta) (\eta\mu \alpha + \text{συν} \alpha)(\eta\mu \beta + \text{συν} \beta) = \eta\mu(\alpha + \beta) + \text{συν}(\alpha - \beta) \\ \epsilon) \epsilon\varphi \alpha + \epsilon\varphi \beta = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\text{συν} \alpha \cdot \text{συν} \beta} & \zeta) \sigma\varphi \alpha + \sigma\varphi \beta = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu \alpha \cdot \eta\mu \beta} \quad (\text{Σχολικό}) \end{array}$$

13.6 Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$$

$$\beta) \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$$

$$\gamma) \eta\mu x + \sin x = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\delta) \sqrt{3} \cdot \eta\mu x + \sin x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

13.7 Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta)} = \sigma\varphi\beta$$

$$\beta) \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha - \beta)} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}$$

$$\gamma) \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{4\varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi^2 x}$$

13.8 α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \eta\mu x$

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

13.9 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \eta\mu x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\beta) \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$$

$$\gamma) \varepsilon\varphi(x - \alpha) = -2, \text{ αν } \varepsilon\varphi\alpha = -3$$

$$\delta) \eta\mu(x - \alpha) = -\eta\mu(x + \alpha) \text{ αν } \varepsilon\varphi\alpha = -3 \text{ στο } [0, 2\pi]$$

(Σχολικό)

13.10 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\beta) \sin x + 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma) \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu x$$

$$\delta) 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu x = 3\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

13.11 α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \eta\mu x$

β) Να λύσετε στο διάστημα $(0, \pi)$ την εξίσωση $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \eta\mu x = 0$

13.12 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\alpha + \beta$ αν :

$$\alpha) \eta\mu\alpha = \frac{3}{5} \text{ και } \sin\beta = -\frac{5}{13} \text{ με } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ και } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\beta) \sin\alpha = -\frac{3}{5} \text{ και } \eta\mu\beta = -\frac{4}{5} \text{ με } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ και } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi \quad (\text{Σχολικό})$$

13.13 Αν σε ένα τρίγωνο ABΓ ισχύει $2\eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma - \sin A = 1$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ.

13.14 Αν για τις γωνίες A, B ενός τριγώνου ABΓ είναι $\varepsilon\varphi A = 2$ και $\varepsilon\varphi B = 3$, να δείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

13.15 Αν σε ένα τρίγωνο ABΓ ισχύει $\frac{\eta\mu A + \eta\mu(B - \Gamma)}{\sin(B - \Gamma)} = \varepsilon\varphi B$ να δείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$ και αντιστρόφως.

(Σχολικό)

14.Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας 2α

Ημίτονο Γωνίας 2α

$$\eta\mu 2\alpha = 2 \cdot \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Συνημίτονο Γωνίας 2α

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ 2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ 1 - 2 \cdot \eta\mu^2\alpha \end{cases}$$

Εφαπτόμενη Γωνίας 2α

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2 \cdot \epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}$$

Συνεφαπτόμενη Γωνίας 2α

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2 \cdot \sigma\varphi\alpha}$$

Τύπου Αποτετραγωνισμού

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\epsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

$$\sigma\varphi^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

Ασκήσεις

14.1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $2\eta\mu\frac{3\pi}{4}\csc\frac{3\pi}{4}$ β) $1 - 2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}$ γ) $2\csc^2 135^\circ - 1$ δ) $\frac{2\cdot\epsilon\phi 75^\circ}{1 - \epsilon\phi^2 75^\circ}$ (Σχολικό)

14.2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $2\eta\mu\frac{\pi}{12}\csc\frac{\pi}{12}$ β) $1 - 2\eta\mu^2 135^\circ$ γ) $2\csc^2 \frac{\pi}{8} - 1$ δ) $\frac{2\cdot\epsilon\phi\frac{\pi}{8}}{1 - \epsilon\phi^2\frac{\pi}{8}}$

14.3 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α αν:

α) $\csc\alpha = -\frac{4}{5}$ και $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ β) $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (Σχολικό)

14.4 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$ αν:

α) $\csc\alpha = \frac{5}{13}$ και $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ β) $\csc\alpha = \frac{3}{5}$ και $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ (Σχολικό)

14.5 Αν για τη γωνία $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ισχύει $2\csc^2 x - 3\csc x - 2 = 0$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών α) x β) $2x$

14.6 Να αποδείξετε ότι :

α) $\eta\mu^2\alpha + \csc 2\alpha = \csc^2\alpha$ β) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \eta\mu^2\alpha} = 2\epsilon\phi\alpha$ γ) $\sigma\phi\alpha - \epsilon\phi\alpha = 2 \cdot \sigma\phi 2\alpha$
 δ) $\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$ ε) $\eta\mu^3\alpha \cdot \csc\alpha + \csc^3\alpha \cdot \eta\mu\alpha = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu 2\alpha$
 ζ) $\eta\mu 2\alpha \cdot \epsilon\phi\alpha + 2 \cdot \csc^2\alpha = 2$ η) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \csc 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha$ θ) $\frac{1 - \csc 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \csc 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha$

(Σχολικό)

14.7 Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \csc^2\alpha} = 2\sigma\phi\alpha$ β) $\frac{2\csc^2\alpha - 1}{2\eta\mu\alpha \cdot \csc\alpha} = \sigma\phi 2\alpha$ γ) $(\eta\mu\alpha - \csc\alpha)^2 = 1 - \eta\mu 2\alpha$

14.8 Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{\sigma\phi\alpha - \epsilon\phi\alpha}{\sigma\phi\alpha + \epsilon\phi\alpha} = \csc 2\alpha$ β) $(\eta\mu\alpha - \csc\alpha)(\eta\mu\alpha + \csc\alpha) = -\csc 2\alpha$ γ) $\csc^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = \csc 2\alpha$

14.9 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sin 2x - \eta\mu x - 1 = 0$

β) $\eta\mu 2x - 2 \cdot \sin x + \eta\mu x - 1 = 0$

γ) $\sin 2x + 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0$

δ) $\sin x - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2} = 0$

ε) $2 - \sin^2 x = 4 \cdot \eta\mu^2 \frac{x}{2}$

ζ) $\sin^2 x - 1 = 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$

η) $\epsilon\varphi 2x = 2 \cdot \sin x$

θ) $\epsilon\varphi x \cdot \epsilon\varphi 2x = -3$

(Σχολικό)

14.10 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\eta\mu 2x - \sin x = 2 \cdot \eta\mu x - 1$

β) $\eta\mu 2x + \sin x = 0$

γ) $\sin 2x - \sin^2 x = 0$

δ) $\sin 2x - 4\sin x - 5 = 0$

ε) $\eta\mu 2x = \epsilon\varphi x$

14.11 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sin 2x - 3\sin x + 2 = 0$

β) $\sin 2x + 5\eta\mu x - 3 = 0$

γ) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 9\sin(\pi + x) + 5 = 0$

15. Ενδοσχολικά Θέματα Εξετάσεων στην Τριγωνομετρία

15.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{x}{6}\right)$, που έχει μέγιστη τιμή το 4

α) Να βρείτε το α

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, την περίοδο και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) - 3f(x) - 10 = 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

15.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sin 2x$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f καθώς και οι θέσεις του μεγίστου και ελαχίστου αντίστοιχα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$

γ) Αν $g(x) = \sin^2 2x - 4$, να βρεθούν τα σημεία τομής των C_f, C_g (14ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

15.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + 2\sin 2x$

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 5$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

15.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin(2x - \pi) - 1$.

α) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f καθώς και οι θέσεις του μεγίστου και ελαχίστου αντίστοιχα.

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = 1$ των οποίων οι τετμημένες ανήκουν στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

γ) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 2013$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΥ 2013)

15.5 Δίνονται οι παραστάσεις

$A = \sin x(\cos x + \sin x) + \eta\mu^2 x$ και $B = \varepsilon\varphi(\pi + x)\sigma\varphi(-x) - \sin(\pi - x)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$

α) Να δείξετε ότι $A = 1 + \eta\mu x$

β) Να δείξετε ότι $B = -\eta\mu^2 x$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $3A - 5 = 2B$ (ΓΕΛ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

15.6 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 5 + 3\sin 2x$

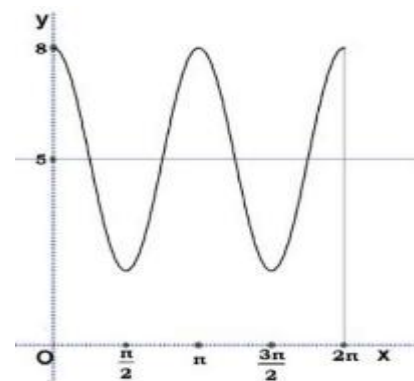
α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Δ καθώς και τα ακρότατά της

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$f(x) = 10\eta\mu\frac{\pi}{6} + 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin(\pi - 2x)$$

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία με

$$\text{εξίσωση } y = 5 \quad (\text{1ο ΓΕΛ ΧΑΝΙΩΝ 2013})$$



15.7 Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ τότε :

α) Να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

β) Αν $K = \frac{10\sin \omega - 12\epsilon\phi \omega}{5\eta\mu(\pi - \omega)}$ να αποδείξετε ότι $K = \frac{5}{2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $(\eta\mu x - \sin x)^2 = \frac{2}{5}K - 2\eta\mu^2 x$

(ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2014)

15.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sin(\alpha x)$, $\alpha > 0$ που έχει περίοδο $T = 4$

α) Να βρεθεί ο αριθμός α , καθώς και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

15.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta x)$, $\alpha, \beta > 0$ που έχει περίοδο $T = \pi$ και ελάχιστο το -4

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - 2\sqrt{3} = 0$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

15.10 Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sin(-\omega) \cdot \epsilon\phi(\pi + \omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\sin(2\pi + \omega) \cdot \sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - \omega\right) \cdot \eta\mu(13\pi + \omega)}$

α) Να δείξετε ότι $K = -1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2 x - \sin x + \kappa = 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

15.11 Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x}{1 - \sin x}$

α) Να δείξετε ότι $A = 1 + \sin x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $3 - A = 2\eta\mu^2 x$

γ) Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ να υπολογίσετε την παράσταση A (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

15.12 Δίνεται η γωνία x , με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ για την οποία ισχύει $15\sigma\upsilon\nu^2x - 4\sigma\upsilon\nu x - 12 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(17\pi + x)}{3\epsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + 4\sigma\varphi\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)}$

(ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

15.13 Δίνεται η παράσταση $\alpha = 9\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + 3\sigma\varphi(-\omega) - \sigma\upsilon\nu(5\pi + \omega)$ (1)

και η εξίσωση $2\eta\mu^2x = (\alpha + 1)\sigma\upsilon\nu x$ (2)

α) Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$:

α1) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\sigma\varphi\omega$

α2) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης α

β) Αν $\alpha = -4$, να λύσετε την εξίσωση (2) (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

15.14 Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sigma\upsilon\nu x \cdot (\epsilon\varphi x + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu^2x$, $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

και $B = \epsilon\varphi(\pi + x) \cdot \sigma\varphi(-x) - \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

α) Να δείξετε ότι $A = 1 + \eta\mu x$, $B = -\eta\mu^2x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $3A - 5 = 2B$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

15.15 Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sigma\upsilon\nu x} - \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(\pi - x)}{\eta\mu(\pi + x)}$, $B = \frac{-4\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x} + \frac{8}{\eta\mu x} - 6$

ορισμένες στο διάστημα $(0, \pi)$

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{2}{\eta\mu x}$

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (0, \pi)$ ώστε να ισχύει $A = B$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

15.16 α) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu x = 1$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

15.17 Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu\beta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε :

α) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$ και $\sigma\upsilon\nu 2\beta$

β) το $\eta\mu(\alpha + \beta)$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

15.18 α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu(\alpha - \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha$

β) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(36^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(36^\circ + \alpha) + \sigma\upsilon\nu(54^\circ + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(54^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

15.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu \frac{x}{2}$

α) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της .

β) Να γίνει η γραφική της παράσταση

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ (ΑΣΚΗΣΙΟΛΟΓΙΟ 2015)

15.20 α) Να δείξετε ότι $\eta\mu(\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = 1$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\epsilon\varphi^2 x + (1 - \sqrt{3})\epsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

γ) Να βρείτε τις λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

15.21 α) Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta}$

β) Να λυθεί η εξίσωση $(1 + \sigma\upsilon\nu 2x) \cdot (2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$ (4ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

15.22 α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta) \cdot \eta\mu(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$

β) Να λυθεί η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2016)

15.23 Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ τότε :

α) Να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $K = \frac{5\eta\mu\omega + \sqrt{2}\eta\mu 45^\circ - 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}\eta\mu 60^\circ}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $6\eta\mu x = 5\eta\mu\omega$ (1ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2016)

15.24 Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$, $x \neq \kappa\pi$

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{2}{\eta\mu x}$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ (1ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

15.25 α) Να δείξετε ότι $K(x) = \frac{2}{\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \epsilon\varphi(\pi - x)} = \eta\mu 2x$

β) Που ορίζεται η συνάρτηση $K(x)$;

γ) Να δείξετε ότι $\Lambda(x) = \frac{\eta\mu 2x - (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}{2} = -\frac{1}{2}$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $K(x) = \sqrt{3} \cdot \Lambda(x)$ (ΓΕΛ ΛΙΜΝΗΣ ΕΥΒΟΙΑΣ 2016)

15.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \left[\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} + x \right) - \sigma\upsilon\nu(\pi + x) \right]$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2f^2(x) + 3f(x) - 2 = 0$ στο διάστημα $(0, \pi)$ (ΓΕΛ ΜΗΛΟΥ 2016)

15.27 Δίνεται η παράσταση συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}$

α) Να βρείτε που ορίζεται η συνάρτηση

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -4$ (ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΝΑΒΡΥΤΩΝ 2016)

15.28 α) Να λυθεί η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2} = 0$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\epsilon\phi x = -1$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $(2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2})(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0$ (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2016)

15.29 Δίνονται οι παραστάσεις $A = \eta\mu x \cdot (\sigma\phi x + \eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu^2 x$

και $B = \eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu x + 1$

β) Να δείξετε ότι $B = 1$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2A = B$ (3ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)

15.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{\sigma\phi x}$, $x \neq \kappa\pi$, $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

β) Να υπολογίσετε την τιμή $f\left(\frac{19\pi}{4}\right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ 2016)

15.31 Δίνεται η παράσταση $A(x) = \frac{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) \cdot \eta\mu(7\pi - x)}{\sigma\phi\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(11\pi + x)}$

α) Να δείξετε ότι $A(x) = -\sigma\upsilon\nu x$

β) Να λυθεί η εξίσωση $A(x) = \frac{1}{2}$ για $0 < x < \pi$

γ) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{1 + A\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{A(x)} + \frac{A(x)}{1 + A\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{2}{A(x)}$ (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)

15.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2^\alpha + 1) \cdot \eta\mu(\omega x)$

α) Να βρείτε τα α, ω αν η ελάχιστη τιμή της είναι -2 και η περίοδος της $\frac{\pi}{2}$

β) Για ποια x η συνάρτηση τη μέγιστη τιμή της;

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{4}f^2(x) + 3\sigma\upsilon\nu 4x = 3$ (ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2016)

15.33 α) Να βρείτε για ποιες τιμές του θ ορίζονται οι παραστάσεις $\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\varphi\theta}$, $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\varepsilon\varphi\theta}$

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\varphi\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\varepsilon\varphi\theta} = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\varphi\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\varepsilon\varphi\theta} = 0$ στο διάστημα $[0, \pi]$ (ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2016)

15.34 Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\varepsilon\varphi x} - \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\varphi x}$ $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

β) Να αποδείξετε ότι $-2 < A < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

γ) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ αν ισχύει $A + \frac{4}{5} + \eta\mu x = 0$ (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2017)

15.35 α) Να λύσετε την εξίσωση $5^{4x^2-8x+6} = 125$

β) Να λύσετε την εξίσωση $-4\sigma\upsilon\nu^2 x - 8\eta\mu x + 7 = 0$

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + 4x) - 2\eta\mu(\pi - 4x)$. Να βρείτε την μέγιστη, την ελάχιστη τιμή καθώς και την περίοδο της συνάρτησης αυτής. (ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 2017)

15.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \sigma\varphi x$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \sqrt{3} = 0$ (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

15.37 α) Να αποδειχθεί ότι $\left(\frac{1}{\eta\mu x} - \eta\mu x\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x\right) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\left(\frac{1}{\eta\mu x} - \eta\mu x\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x\right) = \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

15.38 α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ (ΓΕΛ ΜΥΤΔΟΝΙΑΣ 2017)

15.39 Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\varepsilon\varphi x - 1 = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

γ) $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu x$ (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

15.40 Αν $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ και $\eta\mu x > 0$, να βρείτε το $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

15.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\text{και η παράσταση } A = \frac{-\sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\varphi(\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu(\pi + \theta) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(2\pi + \theta)}$$

α) Να δείξετε ότι $A = 1$

β) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f , η περίοδός της και στην συνέχεια να κάνετε την γραφική της παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = A$

δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ και $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ (ΟΕΦΕ 2017)

15.42 Θεωρούμε την γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και $5\sigma\upsilon\nu^2 x + 7\eta\mu x + 1 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = -\frac{3}{5}$

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{10\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 10\eta\mu(\pi - x)}{8\varepsilon\varphi(\pi + x) - 3\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ και να υπολογίσετε

την αριθμητική της τιμή (1ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2017)

15.43 Δίνεται η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παίρνει την μορφή $2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) στο διάστημα $\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

γ) Αν $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ με $x \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ τότε να βρείτε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $2x$ (1ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2017)

15.44 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(kx) + \beta$, με $\alpha, k > 0$ η οποία έχει περίοδο $T = \pi$ και ελάχιστη τιμή ίση με -1 ενώ η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $M\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = 1$ και $k = 2$

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$, $f(2)$

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f , $g(x) = 3$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

δ) Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ την ανίσωση $f(x) \cdot (f(x) + 1) \geq 12$

(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ Lisari 2017)

15.45 Δίνεται η παράσταση $A(x) = \varepsilon\varphi x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}$ με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ και $\eta\mu x \neq -1$

α) Να δείξετε ότι $A(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x) = \frac{1}{A(x)}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x) = \frac{1}{2}$ (ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2017)

15.46 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^\alpha \cdot \eta\mu\left(5\pi - \frac{\beta x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\beta x}{2}\right) + 5$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (3^\alpha - 1) \cdot \eta\mu\frac{\beta x}{2} + 5$

β) Αν η συνάρτηση f έχει περίοδο $T = 4\pi$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $A(\pi, 13)$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = 1$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - 5 = 8\sqrt{3}\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{4} - 1\right)$ στο διάστημα $[0, \pi)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x^2 - 2x) + \log(x - 3) = 1 - \log f(6\pi)$

(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2017)

15.47 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sigma\upsilon\nu x \cdot (\epsilon\varphi x + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu 2x \text{ και } B = \epsilon\varphi(\pi + x) \cdot \sigma\varphi(-x) - \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

α) Να δείξετε ότι: $A = 1 + \eta\mu x$ και $B = -\eta\mu^2 x$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $3A - 5 = 2B$ (1^ο ΓΕΛ ΠΤΟΛΕΜΑΙΔΑΣ 2018)

15.48 α) Να αποδείξετε ότι: $(1 + \sigma\varphi x)^2 + (1 - \sigma\varphi x)^2 = \frac{2}{\eta\mu^2 x}$, $x \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

β) Να λυθεί η εξίσωση $(1 + \sigma\varphi x)^2 + (1 - \sigma\varphi x)^2 = 4$ (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

15.49 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(\pi + x) + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\epsilon\varphi(2\pi - x)}{\epsilon\varphi x}$, $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

α) Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ισχύει: $f(x) = 1$

β) Να λυθεί η εξίσωση $4\eta\mu^2 x - f(x) = 0$ (ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ 2018)

15.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu(5\pi - 2x) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x) = -3 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$

β) Να προσδιορίσετε την περίοδο T της f , καθώς και το εύρος τιμών της ($f_{\max} - f_{\min}$)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f με την ευθεία $\epsilon: y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ στο διάστημα $(0, \pi)$

δ) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ - αν υπάρχουν- ώστε $|f(x)| > e + 1$ (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018)

15.51 α) Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$, $x \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2018)

15.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3 - 2\sigma\upsilon\nu 3x)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

γ) Να βρείτε τη μονοτονία της f στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ (2^ο ΓΕΛ ΧΟΛΑΡΓΟΥ 2018)

15.53 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sin x}{1 + \eta\mu x}$, $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2}{\sin x}$

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2018}\right) < f\left(\frac{\pi}{2017}\right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - \sqrt{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ (1^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2018)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές Εξισώσεις

16. Πολυώνυμα

A. Μονώνυμο

► Έστω x μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.
Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής αx^n όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος.

■ Κάθε πραγματικός αριθμός θεωρείται μονώνυμο

B. Πολυώνυμο

► Έστω x μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.
Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$ όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί

■ Το πολυώνυμο της μορφής α_0 λέγεται **σταθερό πολυώνυμο**

■ Το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**

► Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$. Τότε :

α) τα μονώνυμα $\alpha_n \cdot x^n, \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1}, \dots, \alpha_1 \cdot x, \alpha_0$ λέγονται **όροι του πολυωνύμου**

β) οι αριθμοί $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ λέγονται **συντελεστές του πολυωνύμου**

γ) ο αριθμός α_0 λέγεται **σταθερός όρος του πολυωνύμου**

Γ. Βαθμός Πολυωνύμου

► **Βαθμό** ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζουμε τον μεγαλύτερο εκθέτη του x που εμφανίζεται στο πολυώνυμο με την προϋπόθεση ότι ο συντελεστής του είναι διάφορος του μηδενός.

■ Το σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό **μηδέν**.

■ Για το μηδενικό πολυώνυμο **δεν ορίζεται βαθμός**.

Δ. Ισότητα Πολυωνύμων

► Έστω δύο πολυώνυμα :

$$P(x) = \alpha_\mu \cdot x^\mu + \alpha_{\mu-1} \cdot x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0 \text{ και } Q(x) = \beta_\nu \cdot x^\nu + \beta_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 \cdot x + \beta_0$$

με $\mu \geq \nu$. Θα λέμε ότι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι **ίσα** αν ισχύουν συγχρόνως :

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\nu = \beta_\nu \text{ και } \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$$

Ε. Αριθμητική Τιμή Πολυωνύμου

► Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu \cdot x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0.$$

Αν αντικαταστήσουμε στο πολυώνυμο το x με μια τιμή

$\rho \in \mathbb{R}$ τότε ο αριθμός που προκύπτει λέγεται

αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$

και συμβολίζεται με $P(\rho)$

■ Αν ισχύει $P(\rho) = 0$ τότε ο αριθμός ρ λέγεται **ρίζα του πολυωνύμου**

■ Το σταθερό πολυώνυμο $P(x) = c$ έχει την ίδια τιμή c για κάθε $x \in \mathbb{R}$

■ Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ζ. Πράξεις με Πολυώνυμα

► Η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων γίνονται χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

► Για τον βαθμό του αθροίσματος και γινομένου δύο πολυωνύμων ισχύουν :

α) Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι μικρότερος ή ίσος από το μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων

β) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

16.14 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$.
Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα. (Σχολικό)

16.15 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = \alpha^2x^3 + (\alpha^2 + 5\alpha)x^2 + \alpha^2x - 10$ και $Q(x) = 4x^3 + 2(\alpha - 1)x^2 - 2\alpha x - \alpha^2 + 3\alpha$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

16.16 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 2\alpha - 3)x^3 + (\alpha^2 - 2\alpha)x^2 - (\alpha^2 - 4)x + 2$ και $Q(x) = (9 - 2\alpha)x^2 + (4 - 3\alpha)x + |\alpha - 1|$.
Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

16.17 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)x + \mu - 2\lambda$ και $Q(x) = (\mu - \lambda)x^2 + 4x + \kappa + \lambda$.
Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

16.18 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 3$
β) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $1, 2$ και -1 είναι ρίζες του πολυωνύμου.

16.19 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + 5x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το 2 , να βρείτε το κ . (Σχολικό)

16.20 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + \kappa x + 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το -2 , να δείξετε ότι $\kappa = -1$.

16.21 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 + x^2 - \lambda x + \lambda^2 + 20$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το 3 , να βρείτε τον αριθμό λ .

16.22 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Σχολικό).
Αν το πολυώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 3 , να βρείτε τα α και β .

16.23 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - \beta x + 12$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Αν το πολυώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 3 , να βρείτε τα α και β .

16.24 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - (2\alpha + 1)x + 2\beta$ και $Q(x) = x^2 - (\beta + 2)x + 5\alpha$. Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το 3 να είναι κοινή ρίζα των $P(x)$ και $Q(x)$.

16.25 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\alpha^2 + 1)x^2 + (\alpha^2 - \alpha)x - \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -2$ είναι ίση με 4 .

16.26 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 5x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 - 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = -1$ είναι ίση με 1 . (Σχολικό)

16.27 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $P(\alpha - 1) = 13$.

16.28 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -3x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda(\lambda + 1)$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $P(1) - 4\lambda + 1 = 0$

16.29 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 6$. Αν $P(-2) = -12$ και ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Σχολικό)

16.30 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda - 4)x^4 + \mu x^3 - x^2 - x - 2$. Αν $P(1) = -4$ και ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε να δείξετε ότι $\lambda = 5$ και $\mu = -1$

16.31 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν $P(-1) = 10$ και $P(2) = -2$

16.32 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - 1)x^3 + \alpha x^2 - (3\alpha - \beta)x + 3\beta$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει ρίζα το 2 και η αριθμητική τιμή του για $x = -1$ να είναι 6.

16.33 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = \alpha x^3 - 4x + 10$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2 x + \alpha^2 - 7\alpha$.

Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ το άθροισμα των πολυωνύμων, είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

16.34 Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x + 1)P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$ (Σχολικό)

16.35 Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x - 3)P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x + 3$

16.36 Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(x - 3)P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

16.37 Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $P(3x + 5) = x^3 - x^2 + 12$, να δείξετε ότι το -1 είναι ρίζα του $P(x)$

16.38 Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(x - 1) = x^2 + 2x - 5$ τότε να βρείτε :

α) το πολυώνυμο $P(x)$

β) το πολυώνυμο $Q(x)$ για το οποίο ισχύει $P(x) \cdot Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 16x + 6$

16.39 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x$

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x) - P(x - 1)$

β) Να βρείτε τον βαθμό, τους όρους, τους συντελεστές και τον σταθερό όρο του $Q(x)$

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -2 και -1 είναι ρίζες του $Q(x)$

16.40 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + (\lambda - \mu)x^2 - 4\lambda x + 3$. Αν $P(-2) = 15$ και ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε :

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

β) Δίνεται πολυώνυμο $Q(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x - 1)Q(x) = P(x)$. Να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(-1) \cdot \eta\mu^2 x - 18 \cdot \sigma\upsilon\nu x = P(Q(-2))$

17. Διαίρεση Πολυωνύμων

A. Ταυτότητα της Διαίρεσης

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια, ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος,
το $\delta(x)$ διαιρέτης,
το $\pi(x)$ πηλίκο,
το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

B. Τέλεια Διαίρεση

Η διαίρεση δύο πολυωνύμων λέγεται **τέλεια**, όταν το υπόλοιπό της είναι μηδέν.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι :

το $\Delta(x)$ **διαιρείται** με το $\delta(x)$ ή

το $\delta(x)$ **διαιρεί** το $\Delta(x)$ ή

το $\delta(x)$ είναι **διαιρέτης** του $\Delta(x)$ ή

το $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** του $\Delta(x)$

Όταν η διαίρεση είναι τέλεια,
τότε η ταυτότητα της διαίρεσης
γράφεται

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$

Γ. Υπόλοιπο της Διαίρεσης $P(x)$: $(x - \rho)$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$

Η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \rho$ είναι $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$.

Επειδή ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι 1^{ου} βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ . Έτσι η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται: $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + \upsilon$.

Θέτουμε $x = \rho$ στην παραπάνω ισότητα και προκύπτει:

$$P(\rho) = (\rho - \rho) \cdot \pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \cdot \pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = \upsilon.$$

Δ. Το $x - \rho$ παράγοντας του $P(x)$

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$. Δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$

■ Έστω ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε ισχύει $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$.

Θέτουμε $x = \rho$ στην παραπάνω ισότητα και: $P(\rho) = (\rho - \rho) \cdot \pi(\rho) \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \cdot \pi(\rho) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$

■ Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή θα ισχύει $P(\rho) = 0$

Τότε από την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \rho$ έχουμε :

$$P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + \upsilon \Leftrightarrow P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + P(\rho) \Leftrightarrow P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$$

που σημαίνει ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

Ασκήσεις

17.1 Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γραφεί σε κάθε περίπτωση η ταυτότητα της διαίρεσης:

α) $(2x^3 - 3x^2 - x + 7) : (2x + 3)$

β) $(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (2x + 1)$

γ) $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 6) : (x^2 - 2x + 3)$

δ) $(x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^2 - x + 1)$

17.2 Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γραφεί σε κάθε περίπτωση η ταυτότητα της διαίρεσης:

α) $(x^3 - 6x^2 + 7) : (x + 1)$

β) $(2x^3 + 7x^2 - 9) : (2x + 3)$

γ) $(3x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 20x - 8) : (3x - 2)$

δ) $(x^3 + 2x^2 + 4x + 3) : (x^2 + 1)$

17.3 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$

α) Να αποδείξετε ότι το $3x - 2$ είναι διαιρέτης του $P(x)$

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$

17.4 Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 + 1$ δίνει πηλίκο $3x + 2$ και υπόλοιπο $-x + 3$
Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$

17.5 Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 + 3x$ δίνει πηλίκο $x^2 - x + 2$ και υπόλοιπο $-2x - 6$

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$

β) Να αποδείξετε ότι το $x^2 + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$

17.6 Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 - 3x$ δίνει πηλίκο $x^2 + x + 9$ και υπόλοιπο $21x + 9$

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$

β) Να αποδείξετε ότι το $x^2 + 3$ διαιρεί το $P(x)$

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = \frac{P(x)}{x^2 + 3}$

17.7 Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων:

α) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1) : (x - 2)$

β) $(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x - 2)$

γ) $(x^4 - x^2 + x + 1) : (x + 1)$

δ) $(2x^3 - x^2 + 7x + 5) : (x + 1)$

17.8 Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων:

α) $(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x - 2)$

β) $(2x^3 - x^2 + 3x - 2) : (x - 1)$

γ) $(x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 1) : (x + 1)$

δ) $(x^5 - x^2 + x - 2) : (x - 2)$

17.9 Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x - 9$ διαιρείται με το $(x - 1)(x - 3)$ και να βρείτε το πηλίκο.

17.10 Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ διαιρείται με το $(x - 1)(x - 2)$ και να βρείτε το πηλίκο (Σχολικό)

17.11 Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$ διαιρείται με το $(x + 1)^2$ και στη μετά να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$

17.12 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $P(x) \div (x - 2)$ β) $P(x) \div (x + 1)$

17.13 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $P(x) \div (x - 1)$ β) $P(x) \div (x + 2)$

17.14 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 15x - 18$. Να εξετάσετε ποιο από τα επόμενα πολυώνυμα είναι παράγοντες του $P(x)$: α) $x - 3$ β) $x + 1$ γ) $x + 2$

17.15 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x - 6$. Να εξετάσετε ποιο από τα επόμενα πολυώνυμα είναι παράγοντες του $P(x)$: α) $x - 2$ β) $x + 1$

17.16 Δίνεται το πολυώνυμο $g(x) = \kappa^2 x^4 + 3\kappa x^2 - 4$. Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το $x - 1$ να είναι παράγοντας του $g(x)$ **(Σχολικό)**

17.17 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 17$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το $x + 1$ να είναι παράγοντας του $P(x)$

17.18 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2\alpha x^3 - (\alpha + 3)x + 3\alpha + 3$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ να είναι 12.

17.19 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^3 + x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda^2 + 4$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ να είναι 3.

17.20 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 8

17.21 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - \alpha + 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και η διαίρεση $P(x) \div (x + 2)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -5

17.22 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^4 + x^3 + \beta x^2 - x - 2$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν τα $x - 1$ και $x - 2$ είναι παράγοντες του $P(x)$

17.23 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + (2\mu - 1)x^2 + (\lambda - \mu)x + 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 4

17.24 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (2\beta - 1)x^2 + (\alpha - \beta)x + 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 4

17.25 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)x + 5$, $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ αν το $(x - 1) \cdot (x + 2)$ είναι παράγοντας του $P(x)$

17.26 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + (\mu - 2)x + 3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ αν το $x^2 + x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$

17.27 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \beta - \alpha + 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $x^2 + x - 6$ είναι παράγοντας του $P(x)$

17.28 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \lambda x^2 + 6x + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ αν το $(x - 3)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$

17.29 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 12$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $(x + 2)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$

17.30 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $3x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και η διαίρεση $P(x) \div (2x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 3.

17.31 Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 7 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 4$ είναι -3 . Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x^2 - 3x - 4)$

17.32 Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 3 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2$ είναι -3 . Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x^2 - x - 2)$

17.33 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $P(4x - 5) = x^3 - 2x^2 + 7x + 6$.

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 3)$

18. Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

A. Πολυωνυμική Εξίσωση

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0 = 0, \alpha_n \neq 0.$$

Ένας αριθμός ρ λέγεται **ρίζα** της εξίσωσης, αν και μόνο αν:

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0$$

B. Θεώρημα Ακέραιων Ριζών

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0

Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε η εξίσωση επαληθεύεται για $x = \rho$, δηλαδή ισχύει:

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_n \rho^n - \alpha_{n-1} \rho^{n-1} - \dots - \alpha_1 \rho$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_n \rho^{n-1} - \alpha_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - \alpha_1)$$

Επειδή οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ακέραιοι, έπεται ότι και ο αριθμός $-\alpha_n \rho^{n-1} - \alpha_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - \alpha_1$ θα είναι ακέραιος. Οπότε από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0 .

Ασκήσεις

18.1 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $5x^4 = 6x^2$ β) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ γ) $x^3 + x^2 - 2 = 0$ δ) $x^3 - 7x + 6 = 0$ (Σχολικό)

18.2 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$ β) $x^4 + 8x = 0$ γ) $x^5 = 9x^3$ δ) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

18.3 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^3 - 16x = 0$ β) $x^4 + 27x = 0$ γ) $x^2(x - 2) = 9(x - 2)$ δ) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 = 0$

18.4 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$ β) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ γ) $2x^3 - 5x^2 = 5 - 2x$ δ) $x^3 - 2 = 2x^2 + x$

18.5 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^8 - 15x^4 - 8 = 0$ β) $(x - 1)^6 - 9(x - 1)^3 + 8 = 0$ γ) $6\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$ (Σχολικό)

18.6 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ β) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$ γ) $(2x - 5)^4 - 10(2x - 5)^2 + 9 = 0$

18.7 Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων:

α) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ β) $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$ (Σχολικό)

18.8 Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων:

α) $2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 2 = 0$ β) $x^3 - 6x + 5 = 0$

18.9 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ β) $x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$ γ) $x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$

18.10 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^3 + 3 = 2x(1 - x)$ β) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ γ) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

18.11 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$ β) $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 = 0$ γ) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

18.12 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^3 - x - 1 = 0$ β) $x^3 - 7x - 6 = 0$ γ) $x^3 - 3x + 2 = 0$

18.13 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$ β) $x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12 = 0$

18.14 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $-x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 6 = 0$ β) $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

18.15 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3x(x-1)^2 = x+5-(x-3)^2$ β) $(x-1)^3 - 15x = 3 - 3(x-2)(x+2)$

18.16 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{6}x^2 + 3x - \frac{4}{3} = 0$ β) $\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

18.17 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + (3\alpha - 1)x - 8\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου τότε :

α) Να βρείτε το α

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

18.18 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 2

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 4$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

18.19 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 16x - 12$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν τα $x + 1$ και $x - 2$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου τότε :

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ (Σχολικό)

18.20 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x + 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -18

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

18.21 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -2

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

18.22 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα $x'x$:

α) $f(x) = 2x^4 + 16x$ β) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ γ) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

18.23 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα $x'x$:

α) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ β) $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$ (Σχολικό)

18.24 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα $x'x$:

α) $f(x) = 3x^3 + 8x^2 - 15x + 4$ β) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 6$

18.25 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 11x - 2\alpha$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, 6)$ τότε να βρείτε :

α) την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

β) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x', y'

18.26 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -14$

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x', y' .

18.27 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων f και g :

α) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 + 3x - 20$

β) $f(x) = 2x^3 + 7x^2$ και $g(x) = x^4 + 8x + 12$

γ) $f(x) = 2x^3 + x - 3$ και $g(x) = x^3 + 2x + 3$

18.28 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$ και $g(x) = x^3 - \beta x^2 + \alpha x + 10$.

Αν διαίρεση $f(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -12 και η $g(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2$, να βρείτε:

α) τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

18.29 Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων για τις διάφορες τιμές του x :

α) $P(x) = (x - 1)(x^2 - 6x + 8)$

β) $P(x) = (3x - 1)(x^2 - 4)$

γ) $P(x) = (1 - x^2)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2)$

δ) $P(x) = (3x^2 - x - 2)(-x^2 + 6x - 9)$

18.30 Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων για τις διάφορες τιμές του x :

α) $P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)$

β) $P(x) = (-x^2 + 4)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1)$ (Σχολικό)

18.31 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $(x - 3)(x^2 - 4x + 3) \leq 0$ β) $(x^2 - 4)(-x^2 + 3x + 10) \geq 0$ γ) $(x^2 - 7x + 12)(-x^2 + 5x - 6) \leq 0$

18.32 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $(x + 2)(x^2 - 3x + 2) < 0$ β) $(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6) > 0$ γ) $(x^2 + 1)(x^2 - x - 2) \leq 0$

18.33 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $(x - 2)(2x^2 - 3x + 1)(x^2 - x - 2) > 0$

β) $(x^3 - x)(-x^2 + x - 5) \geq 0$

γ) $(8 - x)(1 + x)^2(10 - x) \leq 0$

δ) $(x^2 - 10x)(x^2 - 49) < 0$

18.34 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $x(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2) < 0$ β) $x^2(9 - x^2)(2 - x) > 0$ γ) $(2 - x)(x^2 - 3x + 2)(-x^2 + 2x - 1) \geq 0$

18.35 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

$(x + 2)(x^2 - 4x) \leq 0$ και $(x - 2)(x^2 + 4x + 3) > 0$

18.36 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $x^3 + 4x^2 - 12x \geq 0$ β) $x^3 + 3x^2 < 4x + 12$ γ) $x^4 > 8x$

18.37 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $x^3 - 5x^2 + 4x > 0$ β) $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 < 0$ γ) β) $-x^3 + 3x + 2 < 0$

18.38 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $2x^3 - x^2 - 7x + 6 > 0$ β) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \leq 0$ γ) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 \geq 0$

18.39 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \geq 0$ β) $3x^3 + 3x^2 + 10 > x^4 + 15x$ γ) $x^4 - 2 \leq x(1 - x) - x^3$

18.40 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $2x^5 - 162x \leq 0$ β) $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$ γ) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$
 δ) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \leq 0$ (Σχολικό)

18.41 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 > 0$ β) $x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 \leq 0$ γ) $x^3 - 3x + 2 < 0$
 δ) $x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 6 \geq 0$ (Σχολικό)

18.42 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 2x + \alpha + 15$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου τότε :

- α) Να βρείτε το α
 β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$

18.43 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \kappa x^3 + \lambda x^2 + x - 1$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν το $x^2 - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου τότε :

- α) Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ
 β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$

18.44 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 10x - 3\beta + 1$ και $Q(x) = x^3 - 5x^2 + \beta x + \alpha + 2$. Αν η διαίρεση $P(x) \div (x - 2)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -29 και το $Q(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$:

- α) Να βρείτε τις τιμές των α και β
 β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq Q(x)$

18.45 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 2)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -24

- α) Να βρείτε τις τιμές των α και β
 β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

18.46 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 13x - 5\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου τότε :

- α) Να βρείτε το α
 β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$
 γ) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $A = P(-99) \cdot P(-\sqrt{3}) \cdot P(\sqrt{2}) \cdot P(\sqrt{7}) \cdot P(2020)$

18.47 Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Σχολικό)

18.48 Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

18.49 Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x - 1$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

18.50 Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - x - 6$ δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

18.51 Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = 6x^3 + 4x^2 - 7x - 11$ βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 3x^2 + 4x - 5$

18.52 Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 + 6x$ βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3$

18.53 Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 5x + 4$

18.54 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 17x + 4\alpha$ διέρχεται από το σημείο $K(3, -36)$

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :

β1) πάνω από τον άξονα $x'x$

β2) κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 7x - 36$

19. Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές

► Μια εξίσωση λέγεται **κλασματική** όταν έχει ένα τουλάχιστον κλάσμα, στον παρονομαστή του οποίου υπάρχει πολυώνυμο του x .

► Μια εξίσωση λέγεται **άρρητη** όταν περιέχει μια τουλάχιστον ρίζα, που έχει ως υπόρριζη ποσότητα παράσταση του x .

Ασκήσεις

19.1 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \quad \beta) \frac{x^2}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} = \frac{4}{x^2 - 1} \quad (\text{Σχολικό})$$

19.2 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) x^2 - \frac{2x}{x - 1} = x \quad \beta) \frac{4}{x^2 - 6x + 5} + \frac{x - 6}{x - 5} = \frac{x}{x - 1} - 1 \quad \gamma) \frac{x - 2}{x - 3} + \frac{x^2}{x - 6} - \frac{x^2 - 7x + 9}{x^2 - 9x + 18} = 0$$

19.3 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x - 2 = 0 \quad \beta) 2\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x + 4 = 0 \quad (\text{Σχολικό})$$

19.4 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2\eta\mu^3 x - 5\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 3 = 0 \quad \beta) 2\sigma\upsilon\nu^4 x - 3\sigma\upsilon\nu^3 x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$$

19.5 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -6

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -5$ και $\beta = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3 \omega + 5\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu \omega - 3 = 0$

19.6 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{x-2}{x+1} > 0 \quad \beta) \frac{2x+1}{x-3} \leq 0 \quad \gamma) \frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0 \quad (\text{Σχολικό})$$

19.7 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{7}{x+5} \geq 0 \quad \beta) \frac{-4}{2-x} < 0 \quad \gamma) \frac{4-x}{x+3} \geq 0 \quad \delta) \frac{25-x^2}{x+2} > 0$$

19.8 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{x-5}{x+9} < 0 \quad \beta) \frac{5x}{3x-1} < 0 \quad \gamma) \frac{(x+2)(3-x)}{x+9} \geq 0 \quad \delta) \frac{2x-1}{x^2-4x+3} \leq 0$$

19.9 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{x-3}{x^2+4x-5} > 0 \quad \beta) \frac{(x^2-1)(-x^2+x+6)}{x^2-2x-8} \leq 0 \quad \gamma) \frac{x(x^2+3x-10)}{-x^2+4x-4} \geq 0$$

19.10 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{x}{x^2-4} > 0 \quad \beta) \frac{x^2-3x}{4x^2-1} \leq 0 \quad \gamma) \frac{7x^2-x-6}{9-x^2} \leq 0$$

19.11 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{2x+3}{x-1} > 4 \quad \beta) \frac{x-2}{3x+5} \leq 4 \quad \gamma) \frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \leq 0 \quad \delta) \frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1}$$

$$\epsilon) \frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2} \quad \zeta) x^2 + \frac{2}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)} \quad (\text{Σχολικό})$$

19.12 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{3x}{2x^2+1} > 1 \quad \beta) \frac{4}{x-1} < x-1 \quad \gamma) \frac{x^2}{x-1} > \frac{2}{x^2-1}$$

19.13 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{3x-1}{x+2} \geq 2 \quad \beta) \frac{x^2-5}{x-2} \geq 4 \quad \gamma) \frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} \geq 1 \quad \delta) \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x} \leq \frac{13}{x^2+3x}$$

19.14 Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\alpha) \frac{2x}{x+1} \leq 1 \quad \beta) \frac{14x}{x+1} < \frac{9x-30}{x-4} \quad \gamma) \frac{5x+4}{x+3} < \frac{x+2}{1-x}$$

19.15 Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \sqrt{x^3} = -4x \quad \beta) \sqrt{3x-2} = 4 \quad \gamma) \sqrt{5x-1} = -4 \quad \delta) \sqrt{x+3} = x+1$$

$$\epsilon) \sqrt{x+3} = \sqrt{10-x}+1 \quad \zeta) \sqrt{x} + \sqrt{x+20} = 10 \quad \eta) \sqrt{x} = \frac{x-8}{2\sqrt{x}} + 3 \quad \theta) \sqrt{1+2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}$$

$$\iota) x + 3\sqrt{x} - 10 = 0 \quad \kappa) \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0 \quad (\text{Σχολικό})$$

19.16 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{x} = 4$ β) $\sqrt{x-3} = 5$ γ) $\sqrt{2-x} = \sqrt{3-2x}$ δ) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2+x+1}$

19.17 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{x-3} = 2$ β) $\sqrt{x^2+4x-5} = 4$ γ) $\sqrt{x+3} = x-3$ δ) $x - \sqrt{14-2x} = 3$

19.18 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{5x+10} = 8-x$ β) $\sqrt{x^2-2x+6} = 2x-3$ γ) $\sqrt{x+2} + 2 = \sqrt{x+14}$
δ) $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

19.19 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{12-2x} + 2 = x$ β) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} = 2$ γ) $\sqrt{1+4\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x}$ δ) $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$
ε) $\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} - 4 = 0$

19.20 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{x-1} = x-1$ β) $\sqrt{x+8} = 8x-5$ γ) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$ δ) $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 2$

19.21 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\sqrt{2x-3} < \sqrt{1-3x}$ β) $\sqrt{x-3} > x-5$ (Σχολικό)

19.22 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\sqrt{2x-1} < \sqrt{9-3x}$ β) $\sqrt{x-6} - \sqrt{2-x} < 0$ γ) $\sqrt{x-3} \geq x-5$ δ) $x-2-\sqrt{x} > 0$

19.23 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\sqrt{2x+1} < 5$ β) $\sqrt{3x+1} < \sqrt{x+3}$ γ) $\sqrt{2x-1} > x+2$ δ) $\sqrt{x^2-x-12} < x$

19.24 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\sqrt{x+2} < x$ β) $\sqrt{x^2+1} < \sqrt{x+3}$ γ) $\sqrt{x^2+1} > x$ δ) $\sqrt{x^2+9} < 2x$

20. Ενδοσχολικά Θέματα Εξετάσεων στα Πολυώνυμα

20.1 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$ (ΓΕΛ ΠΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

20.2 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$ (ΓΕΛ ΠΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

20.3 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\alpha - 3)x^3 - \beta x^2 - x - 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x + 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 1)$ είναι -4

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x - 2} \leq 0$ (ΓΕΛ ΠΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

20.4 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 6$, $g(x) = 6x^2 - 11x$

α) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής τους

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g

(ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΥ 2013)

20.5 Δίνεται η συνάρτηση $P(x) = 6x^3 - \lambda x^2 - 4x + 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(-1, -9)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της $P(x)$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 11$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ και να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ με τον άξονα $y'y$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x (ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2013)

20.6 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + x^2 + 8\alpha^2 - 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$, που είναι 3^{ου} βαθμού και έχει ρίζα το -2

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > (x + 2)(x + 5)$ (ΓΕΛ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

20.7 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x - 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -8

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 5$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $4x + 7 \geq \frac{P(x)}{x - 2}$ (7ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

20.8 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 1$

α) Να κάνετε την διαίρεση $P(x) \div (3x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

β) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \geq 0$ (3ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2013)

20.9 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 16x - 12$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -24

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$

β) Να κάνετε την διαίρεση $P(x) \div (x^2 - x - 2)$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$ (1ο ΓΕΛ ΧΑΝΙΩΝ 2013)

20.10 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^2 x - 8\eta\mu x - 3 = 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

20.11 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 2)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -24

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = -6$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

20.12 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 20$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(-2) = 0$

και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -16

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 12$ και $\beta = 6$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

20.13 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - \beta x + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -4

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 13$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x - 13\eta\mu x + 6 = 0$ (ΓΕΛ 2013)

20.14 α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 2x - 6$, $\alpha \neq 0$

α1) Να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) \div (x^2 - 2)$

α2) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η προηγούμενη διαίρεση να είναι τέλεια

α3) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$

β) Προσδιορίστε όλα τα πολυώνυμα $2^{\text{ου}}$ βαθμού $F(x)$ ώστε $F(0) = 0$ και $F(x) - F(x - 2) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$ (ΓΕΛ ΚΑΡΔΙΤΣΑΣ 2013)

20.15 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\kappa - 2)x^2 + \lambda x + 6$

α) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 4$ είναι 10, να υπολογίσετε τα κ και λ .

β) Για $\kappa = -2$ και $\lambda = 1$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{P(x) - (x - 3)^2} = x - 1$ (14ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

20.16 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha - 1)x^3 + x^2 - (\beta + 1)x - 4$ και $Q(x) = x^3 - \beta x^2 - x + 2\alpha - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τα οποία έχουν κοινή λύση το -1

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ και να την απλοποιήσετε.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

20.17 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - \beta)x^4 + 2x^3 + (\alpha + 4)x^2 + x - 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x + 2$ και είναι 3^{ου} βαθμού, τότε :

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

γ) Να κάνετε την διαίρεση $P(x) \div (x^2 - 3x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

20.18 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$ (ΜΟΥΣΙΚΟ ΓΕΛ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

20.19 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \beta - 4\alpha - 5$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και ο σταθερός του όρος είναι -6

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = -9$

β) Να παραγοντοποιηθεί το $P(x)$ και να δείξετε ότι τέμνει τον άξονα $x'x$ σε 3 διαφορετικά σημεία

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq -2x(x + 1)$

δ) Να αποδείξετε ότι $P(\eta\mu\theta) \leq -2\eta\mu\theta(\eta\mu\theta + 1)$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ (ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2014)

20.20 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 2

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = -3$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

20.21 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x - 3\alpha$, το οποίο έχει ρίζα το -1

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x + 1} < 6$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

20.22 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda - 4)x^4 + \mu x^3 - x^2 - x - 2$. Αν $P(1) = -4$ και ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε :

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 5$ και $\mu = -1$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq x^4 + 4$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

20.23 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x + 12$ το οποίο έχει παράγοντα το $x + 3$

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 3$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

20.24 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + x^2 + 8\alpha^2 - 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$, που είναι 3^{ου} βαθμού και έχει ρίζα το -2

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$ (ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 2014)

20.25 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 12x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 1

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 9$ και $\beta = -4$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$ και να γράψετε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$. Ποιες από τις λύσεις της εξίσωσης αυτής βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 671π και 672π ; (ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2014)

20.26 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και ισχύει $P(3) = 12$, να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = -7$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

20.27 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + kx + 2$, $k \in \mathbb{R}$

α) Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το -2 , να δείξετε ότι $k = -1$

β) Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x + 1)$ και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης

γ) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

20.28 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + (\alpha + 1)x^3 + x^2 + (4\beta - 1)x + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Δίνεται ότι το πολυώνυμο είναι 3^{ου} βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 1)$ είναι -4

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -3$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

20.29 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + x^2 + 8\alpha^2 - 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$, που είναι 3^{ου} βαθμού και έχει ρίζα το -2

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > (x + 2)(x + 5)$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

20.30 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 2x + 4$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x + 1)$ είναι 6

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = -2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^4 x - \sin^3 x + 2\eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$ (ΓΕΛ ΠΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

20.31 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)x^3 + (\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta)x + \eta\mu\theta$, $\theta \in [0, \pi]$

α) Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1, να βρείτε το θ

β) Αν $\theta = \pi$, να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{x-3} \geq P(-1)$, για $x \neq 3$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

20.32 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + (\beta - 2)x + \alpha + 15$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x + 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 3)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 35

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 3$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να γράψετε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'

δ) Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x) = \gamma x^3 + \delta x^2 + x + 7$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα γ, δ αν ισχύει η σχέση $P(x) = 2Q(x) - x^3 - x$ (ΑΣΚΗΣΙΟΛΟΓΙΟ 2015)

20.33 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 - 6x^2 + 11x - \kappa$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 2)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -60

α) Να δείξετε ότι $\kappa = 6$ και $\lambda = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x^2 + 2x + 3} < 0$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

20.34 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 2x + \alpha + 7$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 8

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 8$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

20.35 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου και $P(-1) = 2$

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

20.36 α) Να λυθεί η ανίσωση $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 > 0$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

20.37 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - x - 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, που έχει ρίζα το 1

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης
(ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2016)

20.38 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 11x - 6$

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x + 1)$

β) Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ (3ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)

20.39 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 1)$

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ 2016)

20.40 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x + 3)$ είναι -8 και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 4

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 4$

β) Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική της $P(x)$ είναι κάτω από την ευθεία $y = 3x + 1$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-1} = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$ (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)

20.41 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (6 - \mu)x^2 - 7x + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το μ , αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$

γ) Για $\mu = 6$, να λύσετε την ανίσωση $e^{P(x)} > 1$ (ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2016)

20.42 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \kappa x^2 + \lambda x - 2$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 2

α) Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και $\lambda = -3$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ (ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2016)

20.43 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -8

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 3$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x^2 - 6x + 5} \leq x + 5$ (4ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

20.44 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 2)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 36

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2016)

20.45 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = -1$ είναι 12

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -7$ και $\beta = 6$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x-1} \leq 0$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x^2 + 1) = 0$ (1ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2016)

20.46 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\alpha + 1)x^3 + (\alpha - 1)x^2 - 3\alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -4

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -2$

β) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x^2 + 1)$ και στην συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < -4x - 2$ (1ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

20.47 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 4

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x^2 - 1} \geq x + 5$ (ΓΕΛ ΛΙΜΝΗΣ ΕΥΒΟΙΑΣ 2016)

20.48 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (2\alpha + 5\beta)x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο διαιρεθεί με το $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο 0 και η διαίρεση $P(x) \div (x - 2)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -9

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -7$ και $\beta = 2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του πολυωνύμου βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ (ΓΕΛ ΜΑΝΤΟΥΔΙΟΥ 2016)

20.49 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 12x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 1

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = -4$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin^2 x) = 0$ (1ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2016)

20.50 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ για τα οποία ισχύουν

$P(\alpha) = \beta$, $P(\beta) = \alpha$ με $\alpha \neq \beta$ και $P(P(x)) = Q(x) + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ρίζες του πολυωνύμου $Q(x)$

β) Αν το $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της τέλειαις διαίρεσης $Q(x) \div (x - \alpha)$, να δείξετε ότι $\pi(\beta) = 0$

γ) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $Q(x)$

(ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΝΑΒΡΥΤΩΝ 2016)

20.51 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 5^{2\lambda-1}x^3 - 2 \cdot 3^{\lambda+\frac{1}{2}}x^2 + 25^\lambda x - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν $x - 1$ παράγοντας του πολυωνύμου, να δείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$

β) Να γράψετε τον τύπο του πολυωνύμου $P(x)$ και να δείξετε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-1} \geq 0$ (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2016)

20.52 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 12x^3 - 20x^2 - x + 9$, $Q(x) = 11x^3 - 17x^2 - x + 5$

α) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq Q(x)$

β) Να κάνετε την διαίρεση $P(x) \div (3x - 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

γ) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$ (ΓΕΛ ΖΑΚΥΝΘΟΥ 2016)

20.53 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\alpha - 3)x^3 + \beta x^2 - x - 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με -4

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (1ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2017)

20.54 Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 2\alpha x^2 + x + 6$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο διαιρείται με το $x - \alpha$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$

β) Να βρεθούν οι τιμές του x ώστε η C_f να βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

γ) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f(x)}$ (LISARI ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 2017)

20.55 α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^3 - 7x^2 - 28x - 12 = 0$

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^3 - 7x^2 - 28x - 12 > 0$ (ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2017)

20.56 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 2$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) \div (x - 2)$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3\theta + \eta\mu^2\theta - 13\eta\mu\theta + 6 = 0$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$ (ΠΟΥΚΑΜΙΣΙΑΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 2017)

20.57 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 1)$

β) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 2)$ και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (ΓΕΛ 2017)

20.58 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\beta + 1)x - 2$, $\beta \in \mathbb{R}$. Αν το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου

α) Να δείξετε ότι $\beta = -4$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\eta\mu x) = 0$ (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2017)

20.59 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x - \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του λ

β) Για $\lambda = 1$ να κάνετε την διαίρεση $P(x) \div (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x) + 3}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$ (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

20.60 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 + 2\lambda)x^4 + (\lambda + 2)x^3 + 3x^2 - 11x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του λ

β) Για $\lambda = 0$ να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x + 1)$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 6$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x) - 6}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$ (ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

20.61 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2\alpha x^4 - 3\alpha x^3 - 3\alpha x^2 + 2\alpha x + \ln \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ το οποίο έχει παράγοντα το $x + 1$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - 1)$ και να λύσετε την εξίσωση $P(x) - u = \ln e^2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x + 1} < 0$ (ΓΕΛ ΜΥΓΔΟΝΙΑΣ 2017)

20.62 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 - (\lambda - 1)x^3 + \lambda x^2 - 7x + \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι τρίτου βαθμού

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 1$

β) Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της $P(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$

γ) Έστω το πολυώνυμο $Q(x) = x^3 - (\mu + 1)x^2 + (\mu - 1)x + 2$, $\mu \in \mathbb{R}$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 2$

γ1) Να δείξετε ότι $\mu = 2$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $Q(x) \div (x + 3)$

γ2) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2 - 6x + 19}{Q(x) + 55} + \frac{2x^2 + x - 6}{P(x)} < 0$ (ΟΕΦΕ 2017)

20.63 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 2

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 4$

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) \div (x + 1)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

20.64 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2\alpha x^2 - \beta x - 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 2

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

γ) Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της $P(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ (ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

20.65 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$ και όταν διαιρείται με το $(x - 2)$ αφήνει υπόλοιπο -9 .

Να βρεθούν τα α, β .

β) Αν $\alpha = -4$ και $\beta = 3$ να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του P βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x . (1^ο ΓΕΛ ΠΤΟΛΕΜΑΙΔΑΣ 2018)

20.66 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 2x + \alpha + 7$. Αν το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι 8

α) Να δείξετε ότι το $\alpha = 1$ και $\beta = -1$

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x) : (x^2 - 2x)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 8$ (ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018)

20.67 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

α) Να επαληθεύσετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης, $P(x) : (x - 1)$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$ (ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ ΠΕΛΛΑΣ 2018)

20.68 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\alpha - 1)x^3 - (\beta + 2)x^2 + x - 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ως παράγοντά του το $(x + 3)$ και η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = 1$ είναι ίση με -8 , να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α και β .

β) Αν ισχύει $\alpha = 2$ και $\beta = 3$

β1) Να εκτελέσετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x^2 + 1$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

β2) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση του $P(x)$ είναι «κάτω» από τον άξονα x (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018)

20.69 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x^2 + 1$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = -3$

β) Να εκτελέσετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x^2 + 1$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $2x^3 + 3x^2 \geq 4x + 3 - \frac{2}{x}$ για $x > 0$ (ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2018)

20.70 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 1$ και διαιρείται (τέλεια) με το $x^2 + 1$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = \beta$

β) Να δείξετε ότι $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ (2^ο ΓΕΛ ΧΟΛΑΡΓΟΥ 2018)

20.71 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$.

α) Αν το $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 3 , να δείξετε ότι $\alpha = -5$ και $\beta = -3$

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$ (1^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2018)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

21. Εκθετική Συνάρτηση

A. Δυνάμεις με Πραγματικό Εκθέτη – Ιδιότητες Δυνάμεων

■ Η δύναμη ενός πραγματικού αριθμού $\alpha \in \mathbb{R}$ με εκθέτη θετικό ακέραιο $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζεται ως εξής:

$$\alpha^1 = \alpha$$

και

$$\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha, \text{ αν } n > 1$$

■ Αν $\alpha \neq 0$ τότε ορίζουμε :

$$\alpha^0 = 1$$

και

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

■ Αν ο εκθέτης είναι ρητός, δηλαδή της μορφής $\frac{\mu}{n}$, με $\mu \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, τότε ορίζουμε :

$$\alpha^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^\mu}$$

και

$$0^{\frac{\mu}{n}} = 0$$

και ειδικότερα

$$\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$$

■ Οι βασικές ιδιότητες δυνάμεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για δυνάμεις με πραγματικό εκθέτη:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$$

$$\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$$

$$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 \cdot x_2}$$

$$(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$$

B. Εκθετική Συνάρτηση

■ Έστω α ένας θετικός αριθμός. Όπως είδαμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δύναμη α^x .

Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη α^x ορίζουμε τη συνάρτηση :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$,

η οποία στην περίπτωση που είναι $\alpha \neq 1$ λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση το α

■ Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$

■ Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

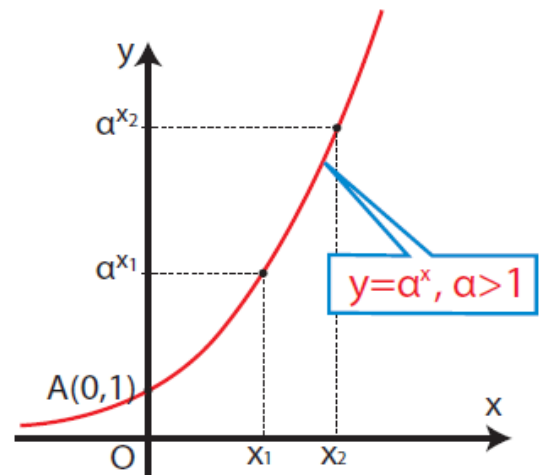
$$f(x) = \alpha^x, \quad \alpha > 1$$

■ Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$

■ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$

■ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει : αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$

■ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$ και έχει ασύμπτωτη ευθεία τον αρνητικό ημιάξονα Ox'



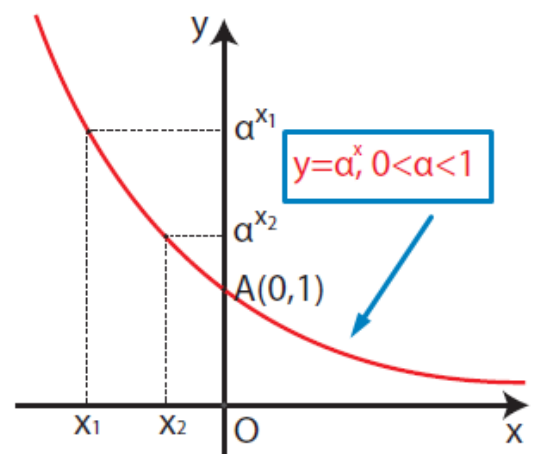
$$f(x) = \alpha^x, \quad 0 < \alpha < 1$$

■ Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$

■ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$

■ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει : αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$

■ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$ και έχει ασύμπτωτη ευθεία τον θετικό ημιάξονα Ox



Ασκήσεις

21.1 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x + 2$, $h(x) = 3^x - 3$

β) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x-2}$, $h(x) = 3^{x+2}$

γ) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{x+2}$, $h(x) = e^{-x}$, $k(x) = e^{-x} + 2$ (Σχολικό)

21.2 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x + 1$, $h(x) = 2^x - 1$

β) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-1}$, $h(x) = 2^{x+1}$

γ) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}$, $h(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$

21.3 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}\right)^x$

Για ποιες τιμές του α η συνάρτηση είναι : α) γνησίως φθίνουσα β) γνησίως αύξουσα (Σχολικό)

21.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (4 - \lambda^2)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ορίζεται η συνάρτηση

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα

γ) Να βρείτε το λ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $K\left(1, \frac{1}{2}\right)$

21.5 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (3\lambda - 9)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως αύξουσα δ) είναι γνησίως φθίνουσα

21.6 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (2\lambda^2 - 5\lambda + 2)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως αύξουσα δ) είναι γνησίως φθίνουσα

21.7 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ β) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

21.8 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda+3}{6-\lambda}\right)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως αύξουσα δ) είναι γνησίως φθίνουσα

21.9 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda+1}{5-\lambda}\right)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως αύξουσα δ) είναι γνησίως φθίνουσα

21.10 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1-5\lambda}{\lambda+1}\right)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως φθίνουσα

21.11 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 2^x = 64 \quad \beta) \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \quad \gamma) \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \quad \delta) 3^{-x} = \frac{1}{81} \quad \varepsilon) \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$$

$$\zeta) 27^{4x} = 9^{x+1} \quad \eta) 32^x = 16^{1-x} \quad \theta) 3^{x^2-x-2} = 1 \quad (\text{Σχολικό})$$

21.12 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 5^{x+3} = 25 \quad \beta) 2 \cdot 5^{x+3} - 50 = 0 \quad \gamma) \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6} = \frac{27}{8} \quad \delta) 6^{x^2-3x-4} = 1$$

$$\varepsilon) 3^{5x+1} = 9^{2x} \quad \zeta) 5^x \cdot 5^{2x-13} = 25 \quad \eta) \sqrt{5}^{x+3} = 5^{x-1} \quad \theta) 27^{x^2+2x-1} = 9^{x^2+4x}$$

21.13 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 2^{x-1} = \sqrt{2} \quad \beta) \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x+6} \quad \gamma) 3^{x^2-4x+6} = 27 \quad \delta) 3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$$

$$\varepsilon) \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-5x} \quad \zeta) 3^x = 81^{2-|x|} \quad \eta) 27^{\frac{x+1}{x-2}} = 3^{2x-4} \quad \theta) (4^{3-x})^{2-x} = 1$$

21.14 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) (3^{x^2-9})^{x+2} = 1 \quad \beta) 8^{|2x-7|-5} = 1 \quad \gamma) 2^{x^3+3x^2-6x-8} = 1$$

21.15 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) (5^x - \sqrt{5})(e^x - 1) = 0 \quad \beta) (13^{2x+1} - 1)\left(e^{3x-3} - \frac{1}{e^2}\right) = 0$$

$$\gamma) (2^{|2x-4|} - 2)(3^{x^2-4} - 3)(x^2 - 4x + 3) = 0 \quad \delta) (e^x + 3)(2^{x^2-2x} - 8^{x-2}) = 0$$

21.16 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 2^{x+2} + 2^{x+3} + 48 \cdot 2^{x-4} + 2 \cdot 2^{x-1} = 1 \quad \beta) 3^{x+2} = 24 \cdot 3^{x-1} + \frac{1}{9}$$

$$\gamma) 2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48 \quad \delta) 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$$

21.17 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0 \quad \beta) 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0 \quad \gamma) 3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0 \quad (\text{Σχολικό})$$

21.18 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0 \quad \beta) 2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+3} + 128 = 0 \quad \gamma) 2^x - 5 \cdot \sqrt{2^{x+4}} + 64 = 0$$

21.19 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0 \quad \beta) 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \quad \gamma) 2^x - 5 \cdot \sqrt{2^x} + 4 = 0$$

21.20 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 4^{x-1} - 5 \cdot \sqrt{4^{x-2}} + 1 = 0 \quad \beta) 3^x + 3^{x-1} = \frac{45}{3^{x+2}} + \frac{7}{3^x} \quad \gamma) 21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2}$$

$$\delta) 3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1} \quad \varepsilon) 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \quad (\text{Σχολικό})$$

21.21 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 72 \cdot 3^{x-2} = 9 \cdot 2^{x+1}$$

$$\beta) 3^{x+3} - 20 \cdot 5^{x-1} = 5^{x+1} + 18 \cdot 3^{x-2}$$

$$\gamma) 9^{x+1} = 2 \cdot 4^{x+1} - 6 \cdot 3^{2x+1}$$

$$\delta) 2^{x+3} - 3^{x+1} = 5^{x+3} - 3 \cdot 2^{x+2}$$

21.22 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 5^{x^2-5x+6} < 1 \quad \beta) 7^{2x-4} > 7^{x+1} \quad \gamma) \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \quad (\text{Σχολικό})$$

21.23 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 8^{2x+1} \geq 8^{13-x} \quad \beta) \left(\frac{5}{9}\right)^{3-2x} > \left(\frac{5}{9}\right)^{3x-7} \quad \gamma) \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{25} \quad \delta) 9^{|2x-3|-5} \leq 1$$

$$\epsilon) 5^{x^2-7} \cdot 5^{4x-5} > 1 \quad \zeta) \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-x-6} \quad \eta) 9 \cdot 3^{x^2-2x-8} < 27^x$$

21.24 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 3^{x^2+3} < 81 \quad \beta) 4^{x^2-7x+6} > 1 \quad \gamma) (2^x - \sqrt{2})(e^x + 3) \leq 0 \quad \delta) \frac{2^x - 4}{2^x - 8} \leq 0$$

21.25 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 > 0 \quad \beta) 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \leq 0 \quad \gamma) 2^x + 2^{3-x} \geq 9$$

$$\delta) 2^{x+3} + 15 \cdot 3^{x-1} < 3^{x+2} - 2^x \quad \epsilon) (x^2 - 3x - 4) \cdot (e^x - 1) \cdot (2^x - 16) \leq 0$$

21.26 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} + 3^x \leq 36 \quad \beta) 5^{x^2+1} + 2 \cdot 5^{x^2} < 7 \quad \gamma) 4^x + 8 < 6 \cdot 2^x$$

$$\delta) 25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \geq 0 \quad \epsilon) 27^x - 3 \cdot 9^x + 3^{x+2} - 27 > 0$$

21.27 Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} e^x \cdot e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

21.28 Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 2^x + 3^y = 13 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 5^{3x+1} \cdot 5^{y-x} = 25 \\ 7^{2x-13} \cdot 7^{x-y} = 7 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases}$$

21.29 Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 4^{x-2} \cdot 2^{y-3} = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-3} = 9 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 5^{x+1} = 25^{y-3} \\ 9^{x+y} = 27 \cdot 3^y \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 27^{x^2-4x+3} = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

21.30 Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3^y + 16 \cdot 2^{-x} = 11 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

21.31 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{e^x - 1} \quad \beta) f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^x - 2} \quad \gamma) f(x) = \sqrt{4^x + 2^x - 20}$$

21.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\alpha} - 8$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(-3, -4)$ τότε:

α) να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α

β) να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

γ) να λύσετε την εξίσωση $e^{3x} + 5 \cdot e^{2x} + f\left(-\frac{5}{2}\right) \cdot e^x = 0$

21.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2^{\lambda-3} - 1)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να βρείτε το λ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $K(2, 9)$

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε :

$$\gamma_1) \text{ την εξίσωση } f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\gamma_2) \text{ την ανίσωση } f(-2x) - 4f(-x) + 3 \leq 0$$

21.34 Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = (\lambda^3 - \lambda - 5)^x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου λ

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(7 \cdot 3^{x+1} + 5^{x+3}) < f(3^{x+4} + 5^{x+2})$

γ) Να βρείτε το λ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $K(1, 19)$

δ) Αν $\lambda = 3$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(-x) = 2$

21.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda+2}{2\lambda-1}\right)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η f είναι: $\alpha_1)$ γνησίως αύξουσα $\alpha_2)$ γνησίως φθίνουσα

β) Για $\lambda = 8$ να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\beta_1) f(x) + f(x+1) < \frac{15}{4} \quad \beta_2) \frac{2f(2x) + 3}{5f(x)} > 1$$

21.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2\lambda+2}{3\lambda-3}\right)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η f είναι: $\alpha_1)$ γνησίως αύξουσα $\alpha_2)$ γνησίως φθίνουσα

β) Για $\lambda = -3$ να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\beta_1) 3f(x) + f(x+1) < \frac{10}{9} \quad \beta_2) \frac{3f(2x) + 3}{10f(x)} > 1$$

$$\gamma) \text{ Για } \lambda = 17 \text{ να λύσετε το σύστημα : } \begin{cases} f(x) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^y = 4 \\ 3f(-x) + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-y} = 5 \end{cases}$$

21.37 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5^x + x$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $5^\alpha - 5^\beta < \beta - \alpha$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $5^{x^2-1} + x^2 = 5^{x+1} + x + 2$

21.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)^3 - (x^2+1)^3 > e^{x^2+1} - e^{x+1}$

21.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha \cdot 3^{2-x}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -72

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -8$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 \cdot 3^{x-2} = 8$

21.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$

γ) Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^3} - e^x > x - x^3$

22. Λογάριθμοι

A. Ορισμός Λογαρίθμου

■ Λογάριθμος του αριθμού $\theta > 0$ με βάση α , όπου $0 < \alpha \neq 1$, ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $\alpha^x = \theta$ και συμβολίζεται με $\log_{\alpha} \theta$. Δηλαδή :

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_{\alpha} \theta$$

■ Ισοδύναμα αυτό σημαίνει ότι ο $\log_{\alpha} \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε τον θ .

■ Αν $0 < \alpha \neq 1$, $\theta > 0$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από τον παραπάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτουν:

$$\log_{\alpha} 1 = 0$$

και

$$\log_{\alpha} \alpha = 1$$

και

$$\log_{\alpha} \alpha^x = x$$

και

$$\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta$$

B. Δεκαδικός Λογάριθμος

■ Ο λογάριθμος με βάση το 10, δηλαδή ο $\log_{10} \theta$, λέγεται δεκαδικός λογάριθμος ή κοινός λογάριθμος και συμβολίζεται απλούστερα $\log \theta$. Επομένως ισχύει :

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0$$

Γ. Φυσικός ή Νεπέριος Λογάριθμος

■ Ο λογάριθμος με βάση το e , δηλαδή ο $\log_e \theta$, λέγεται φυσικός λογάριθμος ή νεπέριος λογάριθμος και συμβολίζεται απλούστερα $\ln \theta$. Επομένως ισχύει :

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

Δ. Ιδιότητες Λογαρίθμων

■ Αν $0 < \alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ιδιότητες :

$$\log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$$

Έστω ότι είναι $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_2} = \theta_2$

Άρα θα έχουμε :

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$$

οπότε από τον ορισμό του λογαρίθμου θα έχουμε :

$$\log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2 .$$

$$\log_{\alpha}(\theta_1 : \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$$

Έστω ότι είναι $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_2} = \theta_2$

Άρα θα έχουμε :

$$\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \theta_1 : \theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1-x_2} = \theta_1 : \theta_2$$

οπότε από τον ορισμό του λογαρίθμου θα έχουμε :

$$\log_{\alpha}(\theta_1 : \theta_2) = x_1 - x_2 \Leftrightarrow \log_{\alpha}(\theta_1 : \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$$

$$\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha} \theta$$

Έστω ότι είναι $\log_{\alpha} \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta \Leftrightarrow \alpha^{\kappa x} = \theta^{\kappa}$

οπότε από τον ορισμό του λογαρίθμου θα έχουμε : $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \cdot x \Leftrightarrow \log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha} \theta$

Ε. Λογαριθμική Συνάρτηση

■ Έστω α ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας.

Όπως είδαμε για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο $\log_{\alpha} x$. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_{\alpha} x$ ορίζουμε τη συνάρτηση: $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_{\alpha} x$, η οποία λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α**

■ Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

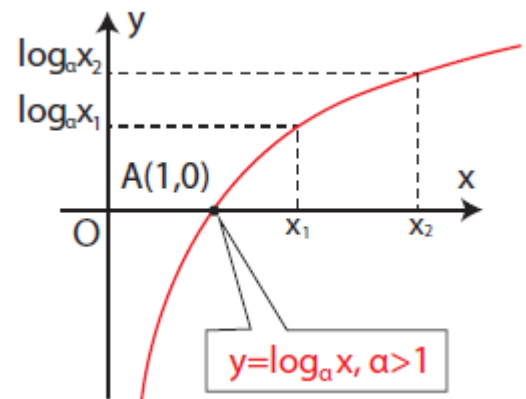
$$f(x) = \log_{\alpha} x, \alpha > 1$$

■ Το πεδίο ορισμού της είναι το $(0, +\infty)$

■ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\mathbb{R}$

■ Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ισχύει: αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2$

■ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$ και έχει ασύμπτωτη ευθεία τον αρνητικό ημιάξονα Oy'



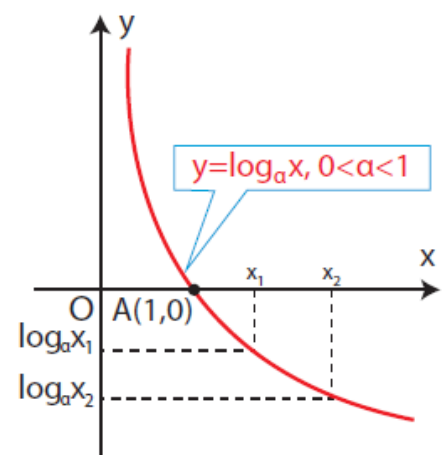
$$f(x) = \log_{\alpha} x, 0 < \alpha < 1$$

■ Το πεδίο ορισμού της είναι το $(0, +\infty)$

■ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\mathbb{R}$

■ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ισχύει: αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2$

■ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$ και έχει ασύμπτωτη ευθεία τον θετικό ημιάξονα Oy .



Ασκήσεις

22.1 Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους :

α) $\log_2 4$ β) $\log_2 8$ γ) $\log_3 81$ δ) $\log_5 125$ ε) $\log_2 \frac{1}{4}$ ζ) $\log_8 1$ η) $\log_9 9$

22.2 Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους :

α) $\log_2 16$ β) $\log_5 25$ γ) $\log_5 \sqrt{5}$ δ) $\log_9 3$ ε) $\log_7 \frac{1}{7}$ ζ) $\log_4 1$ η) $\log_8 8$

22.3 Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους :

α) $\log 10$ β) $\log 100$ γ) $\log \frac{1}{100}$ δ) $\log 1$ ε) $\ln e$ ζ) $\ln 1$ η) $\ln e^4$ θ) $\ln \frac{1}{e^5}$

22.4 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\log(\ln e^{10})$ β) $\ln(\log_5 5)$ γ) $e^{\ln 5}$ δ) $10^{\log 7}$ ε) $100^{\log 5}$ ζ) $e^{3 \ln 2}$

22.5 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $A = 2 \ln e + \ln 1 - 3 \ln \frac{1}{e^2}$ β) $B = \ln e^2 - e^{\ln 3} + 2 \ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

22.6 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\log_6 2 + \log_6 18$ β) $\log 4 + \log 25$ γ) $\log_2 24 - \log_2 3$ δ) $\log 60 - \log 6$
ε) $\log 4 - \log 400$ ζ) $\log \sqrt{900} - \log 3$

22.7 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\log 2 + \log 5$ β) $\log_6 12 + \log_6 3$ γ) $\ln(\sqrt{2} - 1) + \ln(\sqrt{2} + 1)$ δ) $\log \sqrt{2} + \log \sqrt{5}$
ε) $\log_2 30 - \log_2 15$ ζ) $\log 70 - \log 7$

22.8 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $3 \log 2 + \log 125$ β) $2 \log 5 + \log 20 + \log 2$ γ) $2 \log 40 - 4 \log 2$
δ) $\log 4 + \log 20 - 3 \log 2$ ε) $\log 300 - \frac{1}{2} \log 9$

22.9 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\log 5 + \log 6 - \log 3$ β) $2 \log 5 + \log 12 - \log 3$ γ) $\frac{1}{2} \log 16 + \log 75 - \log 3$

22.10 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\log 2 + \log 40 - 2 \log 4$ β) $2 \log 20 + \log 4 - 4 \log 2$ γ) $2 \log_2 5 + \log_2 6 - \log_2 3 - \log_2 25$

22.11 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{lll} \alpha) \frac{1}{2} \log 25 - \frac{1}{3} \log 8 & \beta) \log 5 + 5 \log 2 - 2 \log 4 & \gamma) \frac{\log 2 + \log 12 - \log 3}{\log 14 - \log 7} \\ \delta) \frac{2 \log 6 - \frac{1}{2} \log 16}{\log 48 - 4 \log 2} & \epsilon) \frac{\log 7 + 3 \log 2}{\log 2 + \log 28} & \zeta) \frac{\log 5 + \log 6}{1 + \log 3} \end{array}$$

22.12 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{lll} \alpha) \frac{\ln 2 + \ln 4 - 3 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3} & \beta) \frac{2 \log 20 - \log 5 - \log 16}{1 - \log 2} & \gamma) \frac{\ln(2e^2) + \ln 2 - 2}{\ln 4 + \ln 5} \\ \delta) \frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} & & \end{array}$$

22.13 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{lll} \alpha) \frac{\log 70 + \log 30 - 2}{\log 7 + \log 3} & \beta) \frac{2 \log 5 + \log 3 + 4 \log 2 - 2}{\log 30 + 2 \log 20 - 3} & \gamma) \frac{\ln(9e^4) - 2 \ln 3 - 2}{\ln(2e^2) - \ln 2 + 1} \end{array}$$

22.14 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \log(6 - \sqrt{26}) + \log(6 + \sqrt{26}) & \beta) \log 40 - \log(3 - \sqrt{5}) - \log(3 + \sqrt{5}) \\ \gamma) \log(10 - 4\sqrt{5}) + \log(10 + 4\sqrt{5}) - \log 2 & \delta) 2 \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(7 - 4\sqrt{3}) \\ \epsilon) 2 \log_3 6 - \log_3 24 + \frac{1}{2} \log_3 4 & \end{array}$$

22.15 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{llll} \alpha) 10^{\log 3} & \beta) 10^{1 - \log 2} & \gamma) (\sqrt{10})^{4 \log 3} & \delta) \frac{3 \log 2 + \log 5 - \log 4}{10^{2 \log 4 - \log 8}} \end{array}$$

22.16 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{llll} \alpha) 10^{1 - \log 5} & \beta) 10^{2 \log 6} & \gamma) 10^{2 \log 6 - \log 12} & \delta) e^{\ln 24 - 3 \ln 2} \quad \epsilon) \frac{e^{2 - \ln 5}}{100^{\log e}} \end{array}$$

22.17 Να αποδείξετε ότι :

$$\begin{array}{lll} \alpha) \log 32 + 2 \log 4 - \log 64 = \log 8 & \beta) \log 3 + 2 \log 4 - \log 12 = 2 \log 2 \\ \gamma) 3 \log 2 + \frac{1}{2} \log 16 = 5 \log 2 & \delta) \log 4 + \log 20 - 3 \log 2 = 1 & \epsilon) \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{2}{3} \ln 27 - \ln 6 = \ln 3 \end{array}$$

22.18 Να αποδείξετε ότι :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \log_2 3 + 2 \log_2 4 - \log_2 12 = 2 & \beta) 3 \log 2 + \log 5 - \log 4 = 1 \\ \gamma) \frac{1}{2} \log 25 + \frac{1}{3} \log 8 - \frac{1}{5} \log 32 = 1 - \log 2 & \delta) 2^{\log_2 6 - 2 \log_2 \sqrt{3}} = 2 \\ \epsilon) 2 \log_2(2 + \sqrt{2}) + \log_2(6 - 4\sqrt{2}) = 2 & \text{(Σχολικό)} \end{array}$$

22.19 Το πολυώνυμο $P(x) = \log 2 \cdot x^3 + \log 5 \cdot x^2 - \log 4 \cdot x + \lambda$ έχει παράγοντα το $x - 2$. Να βρείτε :

- α) την τιμή του πραγματικού αριθμού λ
 β) το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$

22.20 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = \log x$ β) $g(x) = \log x - 1$ γ) $h(x) = \log(x - 1)$ (Σχολικό)

22.21 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = \ln x$ β) $g(x) = \ln x + 2$ γ) $h(x) = \ln(x + 1)$

22.22 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \log(2 - 10x)$ β) $f(x) = \ln(x + 3) + \ln(2 - x)$ γ) $f(x) = \log_3(x^2 - 6x + 8)$
 δ) $f(x) = \log(16 - x^2)$ ε) $f(x) = \ln \frac{5 - x}{x + 2}$

22.23 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \log(x^3 - 8) - 7 \log(x^2 - 6x + 9)$ β) $(x) = \log \frac{2x - 4}{5 - x}$ γ) $f(x) = \ln(e^x - e)$
 δ) $(x) = \ln \frac{e^x - 1}{x - 2}$

22.24 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \ln(e^x - 1)$ β) $f(x) = \ln(16 - 2^{4x})$ γ) $f(x) = \log(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3)$

22.25 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \log(5 - |4 - x|)$ β) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x + 5)$ γ) $f(x) = \log(-x^3 + 7x + 6)$
 δ) $f(x) = \ln \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x}$ ε) $f(x) = \log \left(\left(\frac{1}{9} \right)^x - \frac{1}{27} \right)$ ζ) $f(x) = \ln(4^x - 10 \cdot 2^x + 16)$

22.26 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές :

α) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ β) $f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$ (Σχολικό)

22.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x \cdot \ln \frac{7 - x}{7 + x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 β) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια

22.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{6 - x}{6 + x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 β) Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon \varphi^2 x - 3 = \frac{f(2) + f(4)}{\sin^2 x}$
 γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή
 δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

22.29 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \log(x+1) + \log(x-1) = \log 2$$

$$\beta) \log(x-1) + \log x = 1 - \log 5$$

$$\gamma) \log x^2 = (\log x)^2$$

$$\delta) \log(x^2 + 1) - \log x = \log 2 \quad (\text{Σχολικό})$$

22.30 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \log x - 1 = 0$$

$$\beta) \log(x+5) = 0$$

$$\gamma) \ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln 4$$

$$\delta) \log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$$

$$\epsilon) 2\log x - \log(x+6) = \log 3$$

22.31 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \log(x+30) = 2 \quad \beta) \log_2(x^2 - 9) = 4 \quad \gamma) \log(x+6) = \log(2-x) \quad \delta) \log(x^2 - 6x) = \log(18 - 3x)$$

$$\epsilon) 1 - \log(x-2) = \log 30 \quad \zeta) \ln x - \ln(x-2) = \ln(x-3) - \ln(x-4)$$

22.32 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \log(x-4) = 1$$

$$\beta) \ln(x-e) = 1$$

$$\gamma) \log(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\delta) \log x = \log(1-x)$$

$$\epsilon) \ln(x^2 + x + 1) = \ln(x+2)$$

$$\zeta) \log(4x-3) = \log \frac{1}{x}$$

22.33 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \log(3-x) + \log(1-x) = 3\log 2$$

$$\beta) \log(2x-5) + \log(2x-1) = \log 5$$

$$\gamma) 2\log x - \log(5x-4) = 0$$

$$\delta) \log(x-3) + \log(x+6) = 1$$

$$\epsilon) \frac{1}{2} \cdot \log(x^2 - 16) - 1 = \log 3 - \frac{1}{2} \cdot \log(x^2 + 16)$$

$$\zeta) \frac{1-\log 2}{\log 5} \cdot \log x = \log 3 - \log(x-2)$$

22.34 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \ln(2^x - 8) = \ln(2^{x-2} + 4)$$

$$\beta) x \cdot \log 2 = \log(2^x + 4) - \log(2^{x+1} - 1)$$

$$\gamma) 2 \cdot \log(2x-1) - \log(3x-x^2) = \log(4x-3) - \log x$$

$$\delta) \log(1+x) = 1 + \log(1-x)$$

22.35 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$$

$$\beta) 2\log x - \log 4 = \log(x-1) - \log 3$$

$$\gamma) 2\log(2x-1) - \log(3x-x^2) = \log(4x-3) - \log x$$

$$\delta) \frac{1}{3} \cdot \log(x-1) = \log x - \log 2$$

22.36 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \ln(9^x + 3^x - 5) = 0$$

$$\beta) \log(3^{2x-2} + 10) = 1 + \log(3^{x-1} - 1)$$

22.37 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$$

$$\beta) \ln^4 x - 5\ln^2 x + 4 = 0$$

(Σχολικό)

22.38 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$$

$$\beta) \log^2 x - \log x - 2 = 0$$

$$\gamma) \log^2 x + \log x^2 - 3 = 0$$

$$\delta) \log^4 x - 10\log^2 x + 9 = 0$$

22.39 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \ln^2 x - 4\ln x - 5 = 0$$

$$\beta) \log^2 x - 5\log x + 4 = 0$$

$$\gamma) \log^2(x+1) - 2\log(x+1) + 1 = 0$$

$$\delta) \ln^4 x - 7\ln^2 x + 6 = 0$$

$$\epsilon) \log^3 x + 2\log^2 x - \log x - 2 = 0$$

22.40 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \alpha) \ln^2 x - \ln x^2 - 3 = 0 & \beta) \log^3 x^2 - 2\log^2 x^3 - 6\log x + 20 = 0 & \gamma) 2^{\log x + 1} + 2^{\log x + 2} = 48 \\ \gamma) 9^{\log x} - 4 \cdot 3^{\log x} + 3 = 0 & \delta) \frac{\log x + 1}{\log x} - \frac{2}{\log x + 2} = \frac{4}{\log^2 x + 2\log x} \end{array}$$

22.41 Να αποδείξετε ότι $x^{\log 5} = 5^{\log x}$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $5^{2\log x} = 5 + 4 \cdot x^{\log 5}$ (Σχολικό)

22.42 Να αποδείξετε ότι $x^{\log 2} = 2^{\log x}$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2^{\log x} + x^{\log 2} = 16$

22.43 Να αποδείξετε ότι $x^{\log 3} = 3^{\log x}$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $9^{\log x} - 10x^{\log 3} + 9 = 0$

22.44 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 5^x = 2^{1-x} \quad \beta) 3^{x-1} = 2^{1+x} \quad (\text{Σχολικό})$$

22.45 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 5^x = 7 \quad \beta) 3 \cdot 5^x - 12 = 0 \quad \gamma) 5^{1-x} = 2^{x+3} \quad \delta) 25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$$

22.46 Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 3^{x-2} = 2^{x+1} \quad \beta) 5^{x-1} = 10^{2-x} \quad \gamma) 2^{1+x} = e^x$$

22.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x-\alpha}{x+\alpha}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, -\ln 3)$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)} - 3e^{f(x)} + 2 = 0$

22.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\log(3x-14)}{\log(x-4)}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 2$

22.49 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + 5x^2 + 3x - 8 = f\left(-\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{4}{3}\right)$

22.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-1) - \log(x^2-2x)$ και $g(x) = 1 - \log(x+1)$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 0$ και $g(x) = 0$

δ) Να αποδείξετε ότι $f(4) - 3g(1) + 4 = \log 30$

22.51 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\log x}{1 - \log x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η $f\left(10^{\frac{x}{x+1}}\right) = x$, για κάθε $x \neq -1$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^{f(x)} = 10^{\log x - 6}$

22.52 Να λύσετε τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \log(x \cdot y) = 4 \log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x \cdot y = 8 \\ \log y = 2 \cdot \log x \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} y = 2x \\ 2 \log y = \log x + \log 2 \end{cases} \quad (\text{Σχολικό})$$

22.53 Να λύσετε τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ \ln x + 2 \ln y = 4 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x + y = 100 \\ \log x - \log y = \log 4 \end{cases}$$

22.54 Να λύσετε τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \log(6x - 4y) = 1 \\ \ln(x - y) = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \log(y - x) = 1 - \log 5 \\ \log x + \log 6 = \log y + \log 2 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \log y - \log x = 2 - \log 50 \\ \log(y + 1) + \log x = 1 \end{cases}$$

22.55 Να λύσετε τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \log(y - x) = 1 \\ \log x - \log y = \log 3 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2^{\log x} + 3^{\log y} = 13 \\ 4^{\log x} + 9^{\log y} = 97 \end{cases}$$

22.56 Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) \log x^2 > (\log x)^2 \quad \beta) \log(x^2 - 4) < \log 3x \quad \gamma) x^{\log x} > 10 \quad (\text{Σχολικό})$$

22.57 Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) \ln x > 0 \quad \beta) \ln x > 1 \quad \gamma) \log(2 - x) < 0 \quad \delta) \log(x^2 - 6x + 9) \leq 0 \\ \epsilon) \log(1 - x) < \log(x + 3) \quad \zeta) \ln(x + 9) > \ln(x^2 + 2x - 3) \quad \eta) \ln(2^x + 1) < \ln(16 + 2^{x-4})$$

22.58 Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) \log_3(x - 12) < 2 \quad \beta) \log_2(2x - 6) \geq 4 \quad \gamma) \log_5(x + 7) \leq \log_5(3 - x) \\ \delta) \ln(x + 5) \leq \ln(9 - x) \quad \epsilon) \ln(5 - |x + 1|) \leq 0 \quad \zeta) 2 \ln x \geq \ln(x - 2) + \ln(x + 6)$$

22.59 Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) \log\left(2x + \frac{2}{5}\right) < -1 \quad \beta) (2 \log x - 2)(3 \log x + 3) \geq 0 \quad \gamma) (5^x - 25)(1 - \log x)(2x^2 - 5x + 2) \leq 0 \\ \delta) \frac{\ln x}{1 - \ln x} \leq 1 \quad \epsilon) (\log x + 1)(3 - \log x) \cdot \ln x \leq 0$$

22.60 Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) \log(x + 2) + \log(x - 2) < \log(4x + 1) \quad \beta) \ln(4 - x) + \ln(x - 1) \geq \ln 2 \\ \gamma) (x - 4) \cdot \ln x > 0 \quad \delta) \frac{\log x}{1 - \log x} < 0 \quad \epsilon) \frac{\log x}{x - 2} < 0$$

22.61 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\log^2 x - 3 \log x - 4 \geq 0$

β) $\ln^2 x \leq \ln x$

γ) $2\ln^2 x - 5 \ln x + 3 \geq 1$

22.62 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\log^2 x - 2 \log x - 3 > 0$

β) $\log^2 x - \log x^3 + 2 \leq 0$

γ) $\log^2 x \leq 4$

δ) $\frac{2\ln x - 1}{\ln x} \geq 1$

22.63 Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $3^x < 5$

β) $2^{x-2} \geq 3^{x+1}$

γ) $4^x - 2^{x+3} + 15 < 0$

δ) $\frac{2 \cdot 3^x - 4}{3^x + 1} \geq 1$

22.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2^x - 5)$. Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα x'

22.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - 6e^x + 8)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq \ln 3$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x + \ln 3$

22.66 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$

22.67 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα x'

22.68 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln \frac{e^x - 3}{e^x + 5}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι κάτω από τον x'

22.69 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f, C_g

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$

22.70 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln(2e^{1-x} - 2)$

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g
- β) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(-2x) > g(x + 1)$
- δ) Να αποδείξετε ότι $g(1 - x) = f(x) + \ln 2$

22.71 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$
- δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x + 2\ln 2$

22.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x^2 - 4x + \alpha)$, $\alpha > 0$ ώστε να ισχύει $f(6) = 2f(4)$. Να βρείτε:

- α) τον αριθμό α
- β) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$
- δ) τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = 2\log 6$

22.73 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2\ln 2$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

22.74 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{16 \cdot 2^x - 8}{4^x + 7 \cdot 2^x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \ln 4 - \ln 3$

23. Ενδοσχολικά Θέματα Εξετάσεων στις Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

23.1 α) Να αποδείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$, $\forall x, y > 0$

β) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log(\sqrt{x \cdot y}) = 1 \end{cases} \quad \forall x, y > 0$$

γ) Για τα x, y που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση $\log(x^2 + y \log \theta - 110) = 1$, $\theta > 0$
(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

23.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(4^x - 8) - x \cdot \log 2 - \log 7$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \log \frac{4^x - 8}{7 \cdot 2^x}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

23.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \log(2^x - 2) - x \cdot \log 5 - \log 3$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \log \frac{4^x - 2 \cdot 2^x}{3}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

23.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\kappa x}{x^2 + \kappa^2}$, $\kappa \neq 0$

α) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή

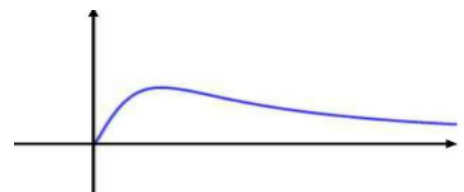
β) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της είναι 1 και να βρείτε την τιμή του x για την οποία αυτή επιτυγχάνεται

γ) Στο διπλανό σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της f για $\kappa = 1$, αλλά μόνο για $x \geq 0$.

Να συμπληρώσετε όλη την γραφική παράσταση

δ) Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση

$g(x) = \kappa(x^2 + \kappa^2)f(x) - 2013$ (ΓΕΛ ΚΑΡΔΙΤΣΑΣ 2013)



23.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x^2 - 4) - \log(6x) + \frac{1}{2} \log 4$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$ (3ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2013)

23.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2 - |x|)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για $x = 0$ να λύσετε τις εξισώσεις:

β1) $(2 - |x|)^{x+2} = (2 - |x|)^{3x}$

β2) $(2 - |x|)^{\sin^2 x + 2\eta \mu x} = (2 - |x|)^1$ (ΓΕΛ ΠΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

23.7 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x - 1}$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(g(x)) = 0$ (ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΥ 2013)

23.8 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα

γ) Αφού αποδείξετε ότι $g(\ln 2) = \frac{3}{4}$ να λύσετε την ανίσωση $g(x) \geq \frac{3}{4}$

δ) Θεωρώντας γνωστή την ανισότητα $x + \frac{1}{x} \geq 2$ που ισχύει για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x , να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sin x$ (ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2013)

23.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log 2 + \log(4^x + 9) - 1 - \log(2^x + 1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ (ΓΕΛ 2013)

23.10 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $g(x) = \ln(e^x + 2)$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους.

β) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\ln 2)$, $g(-1)$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + x = \ln 2 + g(x)$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $x^{\frac{5 + \log x}{3}} = 100^{5 + \log x}$ (ΓΕΛ ΚΑΡΔΙΤΣΑΣ 2013)

23.11 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $g(x) = 2\ln x^2 - \ln 12$.

Θεωρούμε και την παράσταση $A = f(\ln 3) - g(\sqrt{6})$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \ln(e - 1)$

γ) Να αποδείξετε ότι $A = \ln \frac{2}{3}$ και ότι $A < 0$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(2x) = \ln(e^x + 1)$ (ΓΕΛ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

23.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ και το πολυώνυμο $Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 12x - 5$

α) Να κάνετε την διαίρεση $Q(x) \div (2x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) + f(x) = \ln(2ex) - \ln 5 - 1$

δ) Να βρεθούν οι τετμημένες για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = 1$

(7ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

23.13 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1)$, $g(x) = \ln(e^x - 1)$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους .

β) Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x) + 2\ln 2$ (14ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

23.14 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (4^k - 4^{k+2})x^3 + \sin\theta(2\sin\theta - 3)x^2 - x - 1$, με $\theta \in (0, 2\pi)$. Αν το πολυώνυμο είναι 2^ο βαθμού και το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου, να βρείτε τους αριθμούς k και θ .

(3ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2013)

23.15 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} + 5e^x - 14)$, $g(x) = x + \ln(1 - 2e^{-x})$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους .

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \ln(e^x - 2)$ και $f(x) - g(x) = \ln(e^x + 7)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x) + 2\ln 3$

δ) Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g για κάθε $x \in A_f \cap A_g$ (1ο ΓΕΛ ΧΑΝΙΩΝ 2013)

23.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln^2 x + \ln x$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > f(e)$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

23.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x + \ln 2} - 2$

α) Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) Για $\alpha = -\ln 4$ να δείξετε ότι $f(x) = 2^{1-2x} - 2$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3 \cdot 2^{-x}$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

23.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(9^x - 27) - \ln 6 - x \cdot \ln 3$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln \frac{9^x - 27}{6 \cdot 3^x}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

23.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) - \ln(e^x + 5)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

23.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι η ανίσωση $f(e^x) > \ln(e^x + 1)$ μετατρέπεται ισοδύναμα στην ανίσωση $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$ την οποία και να λύσετε.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x) = \ln\left(\sin^2 x + \frac{7}{2}\right)$ (ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2013)

23.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι εξ' ολοκλήρου κάτω από τον άξονα $x'x$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x) - f(x) < x - \ln 2 + \ln\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\ln 2) + f(\ln 3) + f(\ln 4) + \dots + f(\ln v) = -\ln v$, $v \in \mathbb{N}$ (ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2014)

23.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \ln(e^x - 2)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε το α αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(\ln 3, 1)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση για $\alpha = -1$. (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.23 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \ln(e^{2x} - 1)$, $g(x) = \ln 6 + \ln(e^x - 1)$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{2013}{2014}\right)^{x^3+2} < \left(\frac{2014}{2013}\right)^{4-7x}$ (ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 2014)

23.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2\ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

δ) Να δείξετε ότι $f(x) = (x-1)\ln 2 + \ln \frac{2^x - 1}{2^x + 2}$ (ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2014)

23.25 Έστω γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει

$$\sqrt{D_\alpha^2 - 2D_\alpha \cdot e^4 + e^8} + D_\beta^2 - 2D_\beta \cdot e + e^2 = 0 \quad (1), \quad D = e^{\frac{1}{2}\log 16 + 2\log 5} \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(\alpha, \beta) = \left(e^2, \frac{1}{e}\right)$

β) Για τα α, β του προηγούμενου ερωτήματος να λύσετε την ανίσωση $\ln(\alpha \cdot \beta) - \ln(\alpha x) > \ln(\beta x) - 2\alpha$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \left(2\beta - \frac{1}{\alpha}\right)^x$

γ1) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

γ2) Αν ισχύει η σχέση $\ln\left(\frac{2e-1}{e^2}\right)^{\sin \theta} < \ln(2e-1)^{\frac{1}{2}} - 1$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να δείξετε ότι $\sin \theta > \frac{1}{2}$

(ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2014)

23.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3x - 5)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $x'x$

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

(ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\alpha} - 8$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3, -4)$

α) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x} + 5e^x + f\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.28 α) Να λύσετε την εξίσωση $4^x - 17 \cdot 2^x + 16 = 0$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(\frac{1-2^x}{2^x-16}\right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -\ln 4$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x-6) + \log(x+1) = 3\log 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.30 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$, $g(x) = \log_4(9^x - 3^x)$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \ln x = 3\ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) - g(1) < \log 2$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.31 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1)$, $g(x) = \ln(e^x - 1)$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x) + \ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x) + 2\ln 2$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.32 α) Να δείξετε ότι $8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 3$

β) Να λύσετε την εξίσωση $3^{2\log_2 x} - 2 \cdot 3^{\log_2 x} - 8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 0$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.33 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)$, $g(x) = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους .

β) Να λύσετε την εξίσωση $10^{f(x)} = g(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(-1) - f(0) - \log|g(1)| - \log 13 = -3$ (ΓΕΛ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΩΝ 2014)

23.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} + e^x - 6)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 6$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > \ln(e^x + 3)$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

23.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

23.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log 3 + \log(2 \cdot 4^x + 1) - x \cdot \log 2$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \log \frac{3 \cdot (2 \cdot 4^x + 1)}{2^x}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 9$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

23.37 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, $g(x) = \ln(e^x - 1)$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους .

β) Να δείξετε ότι $f(2) + 3f(1) - f(3) = \ln 4$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) > g(x) + \ln 3$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

23.38 α) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{9}$

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

β1) $\log x + \log(x - 1) = \log 3 + 2\log 2$

β2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{1-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

23.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1) - 2\log\sqrt{6} + x$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$ (ΓΕΛ 2015)

23.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(2^x - 4) + \log(2^x + 1) - \log 3$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \log \frac{(2^x - 4) \cdot (2^x + 1)}{3}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1 - \log 5$ (ΓΕΛ ΠΕΝΤΑΠΟΛΕΩΣ 2015)

23.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x + e^2}{x^2 + e^2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να δείξετε ότι $e^{f(e)} - e^{f(1)} > e^{f(0)}$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > \ln x$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(e^x) = 0$

(ΑΣΚΗΣΟΛΟΓΙΟ 2015)

23.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\log x)^2}{\log x^2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{f(x)} < 1$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

23.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\kappa - 2)\ln x$

α) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(e, 4)$, να βρείτε το κ

β) Για $\kappa = 6$, να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(8x) = 8$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 12$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

23.44 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες .

γ) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) - 1 = 2f\left(\frac{1}{x}\right)$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

23.45 α) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) + \log(x-1) = \log 2$

β) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{2} \log^2 x + \log \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

23.46 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(\ln 2, \frac{1}{3}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να δείξετε ότι $\lambda = 1$

γ) Να δείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 0$

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > \frac{1}{2}$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

23.47 α) Να λύσετε την εξίσωση

$$10^{\eta_{\mu x}} \cdot \log 2 + 2^{\log 10 - \log 10^{\eta_{\mu x}}} - 3(\log 30 - \log 3) = 2^{\eta_{\mu x}} + 2^{1 - \eta_{\mu x}} - 3$$

β) Να λυθεί η εξίσωση $2^{\eta_{\mu x}} + 2^{1 - \eta_{\mu x}} = 3$ όταν $x \in [0, \pi]$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

23.48 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2\lambda x^2 - \mu x - 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 4

α) Να δείξετε ότι $\lambda = \frac{3}{2}$ και $\mu = 3$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$

γ) Αν x_1 η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$ και $\log 2x_1 = \alpha$ να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{1}{2} \log 2x_1 + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2x_1}) + \frac{1}{2} \log\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2x_1}}\right) + \frac{1}{2} \log\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2x_1}}\right)$ σαν συνάρτηση του α . (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

23.49 Δίνονται οι $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $g(x) = 2\ln x^2 - \ln 12$, και η παράσταση $M = f(\ln 3) - g(\sqrt{6})$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.

β) Να δείξετε ότι $M = \ln \frac{2}{3} < 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \ln(e - 1)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) = \ln(e^x + 1)$ (ΓΕΛ ΖΑΚΥΝΘΟΥ 2016)

23.50 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους.

β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) \geq 0$, $g(x) < 0$

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$, $g\left(\frac{1}{e}\right)$ (4ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

23.51 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι $2f(\ln 9) = 3f(\ln 5)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - 1 = f(x)$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2016)

23.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x + \ln \frac{1}{x + \kappa}$ με $x > 0$

α) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 0)$, να δείξετε ότι $\kappa = 0$

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

γ) Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, $\alpha \neq \beta$ να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e$

δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2)$, $f\left(\frac{1}{e^{2016}}\right)$ (1ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2016)

23.53 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\ln(x + 1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x + 1) = f(1)$ (3ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)

23.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Αν κ η θετική ρίζα της εξίσωσης $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$, να δείξετε ότι $\kappa = 1$
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- γ) Να δείξετε ότι $3 \cdot 10^{f(1)} + 20 \cdot 10^{f(2)} + f(\log 101) + e^{\ln 7} = 2016$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) = f(x) + \log 11$
- ε) Να λυθεί η ανίσωση $10^{f(x)} < 9$ (ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ 2016)

23.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4^x + 2^x - 6) - \ln(2^{x+1} + 6)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της
- γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e^{\ln(2f(x))}$ (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)

23.56 α) Να λυθεί η εξίσωση $\ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$

- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x^3 + 2}$
- γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \leq f(1)$ (1ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

23.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{4-x}{4+x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να δείξετε ότι είναι περιττή
- β) Να δείξετε ότι $f(-2,2) + f(-1,1) + f(0) + f(1,1) + f(2,2) = 0$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)} + 3 = 4e^{f(x)}$ (ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2016)

23.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να βρείτε την μονοτονία της.
- γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 4)$, $f(\ln 5)$
- δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$ (ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2016)

23.59 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$, $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$

- α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους
- β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq \ln 2$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 2g(x)$ (ΓΕΛ ΛΙΜΝΗΣ 2016)

23.60 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - \kappa e^x + \lambda)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν είναι $f(0) = \ln 2$, $f(\ln 6) = \ln 12$, τότε :

- α) Να δείξετε ότι $\kappa = 5$, $\lambda = 6$
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 10 - \ln(e^x + 1)$
- δ) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της $g(x) = x + \ln 2$ (ΓΕΛ ΜΑΝΤΟΥΔΙΟΥ 2016)

23.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(e^x) > x + \ln 3$ (ΓΕΛ ΜΗΛΟΥ 2016)

23.62 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2\ln 2$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$

δ) Να δείξετε ότι $f(x) = (x - 1)\ln 2 + \ln(2^x - 1) - \ln(2^x + 2)$ (1ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2016)

23.63 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x \cdot e^{x-1})$, $x > 0$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει $f(x) < 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 1 = x - \ln^2 x$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(e^{x-1}) > x + 2^x - 2$

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $\sin \theta < \ln \frac{e}{\sin \theta}$ (ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΝΑΒΡΥΤΩΝ 2016)

23.64 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = e^k \cdot x^3 - x^2 + \ln \lambda \cdot x + 3$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x + 1$ και η διαίρεση $P(x) \div (x - 2)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 9

α) Να δείξετε ότι $k = 0$ και $\lambda = e$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι για $x > 0$, $x^{\ln 5} = 5^{\ln x}$ και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$P(25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} - 6) = 0$ (ΓΕΛ ΜΗΛΟΥ 2016)

23.65 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(2^x - 1)$, $g(x) = (\log 5) \cdot x + \log 6$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $g(2) = 1 + \log 3 + \log 5$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

δ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $10^{f(3)} + f(1) + g(1) - g(2) - \log 2$

(1ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2017)

23.66 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\log \theta + 3}{1 - \log \theta}\right)^x$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του θ , η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του θ , η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Να βρείτε το θ ώστε να ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$

δ) Για $\theta = 1$ να λύσετε την εξίσωση $f(2x) + f(x + 2) = 10$ (ΓΕΛ ΛΕΧΑΙΟΥ 2017)

23.67 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2-9}}, \quad g(x) = \ln \frac{e-x}{e+x}, \quad h(x) = e^{2x} - 2e^x + 1, \quad \kappa(x) = \sin x - 1$$

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g
 β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν τέμνονται
 γ) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια και η g είναι περιττή
 δ) Να δείξετε ότι $h(x) \geq 0$. Για ποια τιμή του x ισχύει η ισότητα;
 ε) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $\kappa(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $h(x) = \kappa(x)$
(1ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2017)

23.68 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 5) + x - \ln 2 - \ln 3$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$
 γ) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;
(ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2017)

23.69 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(2x-3)}{\ln(x-3)}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
 γ) Αν $3 < x < 4$, να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$
(ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

23.70 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{6-x}{4+x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x-2) + f(x) = 0$
 γ) Να λυθούν οι ανισώσεις:
 γ1) $f(e^x) < x$ γ2) $\frac{f(x)}{2} \geq \ln 3\sqrt{3} - \ln 3$
(ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2017)

23.71 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 2$
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x$
(ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)

23.72 Δίνεται η εξίσωση $1 + \log(x^2 - 6x) = \log 20 + \log(3x - 10)$

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η εξίσωση
 β) Να λύσετε την εξίσωση.
 γ) Αν $x_1 = 10$ η λύση της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το y ώστε να ισχύει η σχέση

$$2\log \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^y} + 4 = \log 2 + \log x_1 \quad \text{(ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2017)}$$

23.73 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + \beta}$ όπου $\beta = \log 300 - \frac{1}{2} \log 9 + e^{\ln 3}$

- α) Να αποδείξετε ότι $\beta = 5$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \ln 2$
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$
(ΓΕΛ ΜΥΤΙΔΟΝΙΑΣ 2017)

23.74 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$, $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο γραφικών παραστάσεων.

(ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 2017)

23.75 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2-x}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $6e^{2f(x)} - 11e^{f(x)} + 4 = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ και να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα. (ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2017)

23.76 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{e^x - 2}{1 - 2e^x}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -\ln 2$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \neq -\ln 2$ η f ορίζεται :

α1) στο $\mathbb{R}$

α2) ως εκθετική με βάση $\frac{e^x - 2}{1 - 2e^x}$ στο $\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\ln 2, 0)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Αν $x \in (-\ln 2, \ln 2)$ και ισχύει $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ τότε :

γ1) Να δείξετε ότι $x < 0$

γ2) Να λύσετε την ανίσωση $f((\ln x)^2) - f(\ln x) \leq 0$

δ) Να δείξετε ότι $f(\lambda^2) - f(3\lambda^2) \leq f(4\lambda^2) - f(2\lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα ;

(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ LISARI 2017)

23.77 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e - e^{1-\ln x})$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + \ln(x-1) - \ln x$, $x > 1$

γ) Να εξετάσετε αν η οριζόντια ευθεία $y = \frac{\ln 25 + 3\ln 2 - 2\ln 10}{2\ln 2 + \ln \frac{1}{2}}$ τέμνει την γραφική παράσταση της f

δ) Να δείξετε ότι $f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = 2016 - \ln 2017$

ε) Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(e^{3x}) - f(e^x) - x - \ln 3$, $x > 0$

ε1) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της h είναι εξ' ολοκλήρου κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x > 0$

ε2) Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της ευθείας $y = h(3)x + 1$ με την υπερβολή $y \cdot x = h(2)$

(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2017)

23.78 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{\ln\alpha}\right)^x$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Για ποιες από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

β) Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια,

αν $0 < \alpha < 1$, να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) > 1$

γ) Δίνεται ότι $\alpha = \frac{1}{2} \log_3 81 + \log_3 15 - \log_3 5 - e^{\frac{1}{2} \ln 9} + e^{-\frac{\ln 2}{\ln 4}}$

γ1) Να δείξετε ότι $\alpha = e^{-\frac{1}{2}}$

γ2) Να λύσετε την ανίσωση $\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$

γ3) Αφού αποδείξετε ότι $(2 + \sqrt{f(1)}) \cdot (2 - \sqrt{f(1)}) = 1$,

να λύσετε την εξίσωση $(2 + \sqrt{f(1)})^x + (2 - \sqrt{f(1)})^x = 4$ (**ΟΕΦΕ 2017**)

23.79 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $\ln e$ είναι ρίζα του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x) \div (x - \log 100)$ αφήνει υπόλοιπο ίσο με 16

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = -4$

β) Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(\eta\mu x) \geq 0$ (**ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 2017**)

23.80 Δίνεται το 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο $P(x) = (\ln\alpha) \cdot x^3 - (\ln\alpha) \cdot x^2 + \frac{1}{4}x + 8\beta - 2^{\beta+1}$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$. Αν το x είναι παράγοντας του πολυωνύμου, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\beta = \frac{1}{2}$

β) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του α , αν η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον μη μηδενική ρίζα

γ) Για $\alpha = e$:

γ1) Να λύσετε την ανίσωση $P\left(2^x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$

γ2) Αν για το πολυώνυμο $Q(x)$ ισχύει $(x-1)Q(x) = P(x) + \gamma$, να βρείτε το γ , τον βαθμό του $Q(x)$ και στη συνέχεια το πολυώνυμο $Q(x)$ (**1ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2017**)

23.81 Δίνεται το $P(x) = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^{2017} + (2 - \kappa)x^{1821} + (\lambda - 1)x^3 - (\kappa + 2)x^2 + (1 - \ln\alpha)x + 4$ με $\lambda, \kappa, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, που είναι 3^{ου} βαθμού, έχει ακέραιους συντελεστές και αρνητική ακέραια ρίζα μεγαλύτερη του -2 , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = \kappa = 2$, $\alpha = e^2$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^3 - P(x)} - x = x + 4$

δ) Να βρείτε το άθροισμα των συντελεστών και τον σταθερό όρο του $Q(x) = P(x) + (1 - x)^{2017}$ (**ΓΕΛ ΛΕΧΑΙΟΥ 2017**)

23.82 Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \ln(3e^x - 2)$, $g(x) = \ln x^2$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(e^x)$, $x > \ln \frac{2}{3}$

γ) Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση του πολυωνύμου : $P(x) = x^4 - 2x^3 + \alpha x + \sqrt{\alpha - 1}$ με $(x - 1)$ να δίνει υπόλοιπο $u = g(e)$ (**1^ο ΓΕΛ ΠΤΟΛΕΜΑΙΔΑΣ 2018**)

23.83 Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+1} \right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

γ) Να βρείτε τις τιμές του x που η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ (**ΓΕΛ ΗΠΕΙΡΟΥ 2018**)

23.84 α) Να λυθεί η εξίσωση: $(\log 10000)^x = 8$

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{2 \log 3 + 3 \log 2 + \log 5 - \log 10}{2 \log 2 + \log 150 - \log 100} = 2$ (**ΓΕΛ ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΥ ΠΕΛΛΑΣ 2018**)

23.85 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$ και $g(x) = \ln \left(\frac{1}{e \cdot x} \right) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f , g .

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία των f , g στα πεδία ορισμού τους.

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $(0,0)$ και είναι «κάτω» από την ευθεία $\varepsilon: y = \sqrt{2}$

δ) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f , g τέμνονται πάνω στην ευθεία $\eta: x = 1$, να δείξετε $\alpha = \frac{\sqrt{5} + 2}{2}$

ε) Να δείξετε ότι το σημείο Σ με τετμημένη $x = 1$ του δ) ερωτήματος είναι το μοναδικό κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f , g (**ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018**)

23.86 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3 + \ln x}{1 - \ln x}$ και $g(x) = -\ln x$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f , g .

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f , g

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y - 3 = 0$

δ) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{2019}{2018}\right) \cdot f\left(\frac{2018}{2017}\right) \cdot f\left(\frac{2017}{2016}\right) > 27$ (**ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2018**)

23.87 Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή. Σε περίπτωση που είναι κάτι από τα δύο, να γράψετε τη συμμετρία που σχηματίζει η γραφική της παράσταση

β) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = 3$

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

δ) Να συγκρίνετε, χωρίς να βρείτε, τους αριθμούς $f(\sqrt{3})$ και $f(3 - \sqrt{3})$ (**2^ο ΓΕΛ ΧΟΛΑΡΓΟΥ 2018**)

23.88 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x \cdot \ln x + 2^\alpha$ και $g(x) = \ln x + \beta x$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g .

β) Δίνεται ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στα σημεία με τετμημένες 1 και e^2 .

Να δείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 2$

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την από την γραφική παράσταση της g

δ) Αν η εξίσωση $f(x) - g(x) - 4 = 0$ έχει ρίζα τον θετικό αριθμό ρ , τότε να αποδείξετε ότι έχει ρίζα και τον αντίστροφό του. (1^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2018)