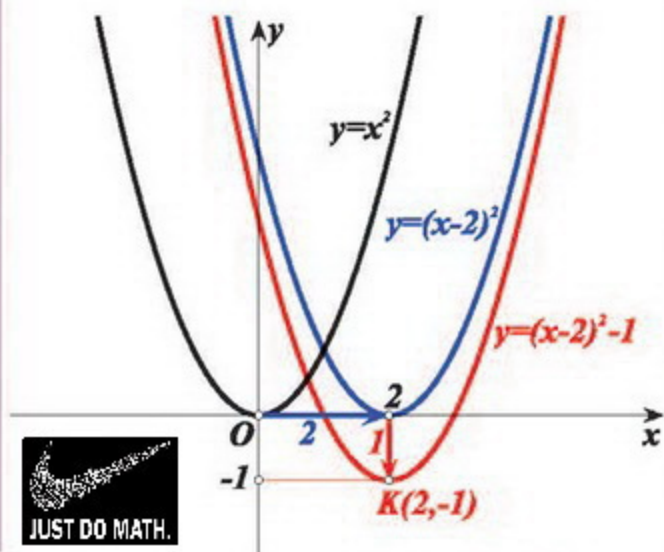


Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων *Τράπεζα Θεμάτων*

Vol. 4



Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Updated 22/3/2022

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^4 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm 2.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = 2$, $x = -2$.

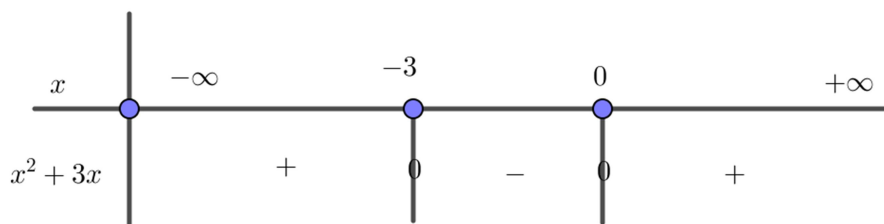
β) Για να λύσουμε την ανίσωση, θα βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 3x$ και στη συνέχεια θα κάνουμε τον πίνακα προσήμου του $x^2 + 3x$. Για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου, παραγοντοποιώντας έχουμε:

$$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -3$$

Συνεπώς ο πίνακας προσήμου είναι ο παρακάτω:



Άρα η ανίσωση (2) αληθεύει για $x \in [-3, 0]$.

γ) Από τις λύσεις της εξίσωσης (1) μόνο η $x = -2$ είναι και λύση της ανίσωσης (2), διότι ανήκει στο διάστημα $[-3, 0]$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-1 \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq 1$, γιατί $x^2 + 2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_g = [1, +\infty)$.

β) Για $x = 1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(1) = \frac{1}{1+2} + \sqrt{1-1} = \frac{1}{3}$.

Δεν ορίζεται η τιμή της συνάρτησης για $x = -2$, διότι $-2 \notin A_g$.

Για $x = 2$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(2) = \frac{2}{2^2+2} + \sqrt{2-1} = \frac{2}{6} + \sqrt{1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ισότητα, θα χρησιμοποιήσουμε ευθεία απόδειξη.

Έχουμε λοιπόν:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 = 0 \text{ και } (y+4)^2 = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$x-1=0 \text{ και } y+4=0, \text{ οπότε τελικά}$$

$$x=1 \text{ και } y=-4.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, πρέπει να βρούμε το πρόσημο του συντελεστή διεύθυνσης.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι: $\alpha = \omega^2 - 6\omega + 8$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 36 - 32 = 4$

και οι ρίζες:

$$\omega_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \omega_1 = 4 \text{ και } \omega_2 = 2.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

ω	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$\omega^2 - 6\omega + 8$	+	0	-	0	+

- Αν $\omega \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία.
- Αν $\omega \in (2, 4)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι αρνητικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία.
- Αν $\omega = 2$ ή $\omega = 4$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης μηδενίζεται και η ευθεία ε σχηματίζει μηδενική γωνία με τον άξονα $x'x$, είναι δηλαδή παράλληλη στον $x'x$.

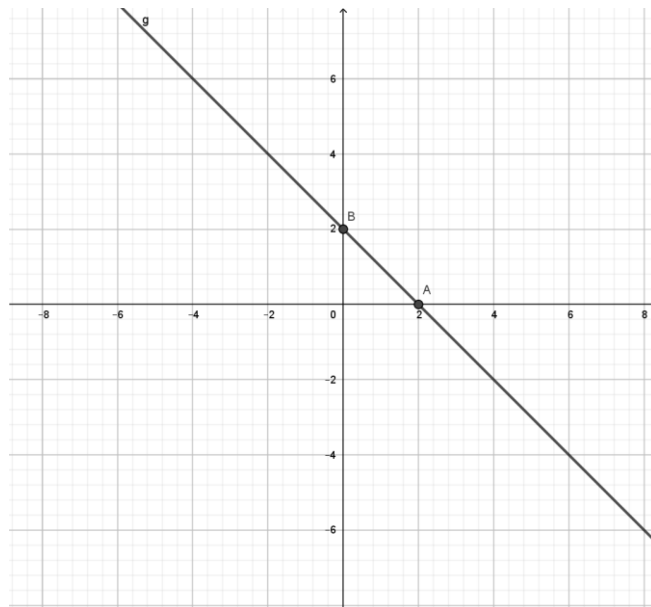
β)

- Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα για να σχηματίζει η ευθεία ε αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ πρέπει $\omega \in (2, 4)$. Επειδή όμως το ω είναι ακέραιος τότε $\omega = 3$.
- Για $\omega = 3$, $\varepsilon : y = -x + 2$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $A(2, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $B(0, 2)$.

γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε, τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία ε όπως στο παρακάτω Σχήμα.



Σχήμα

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

(Μονάδες 7)

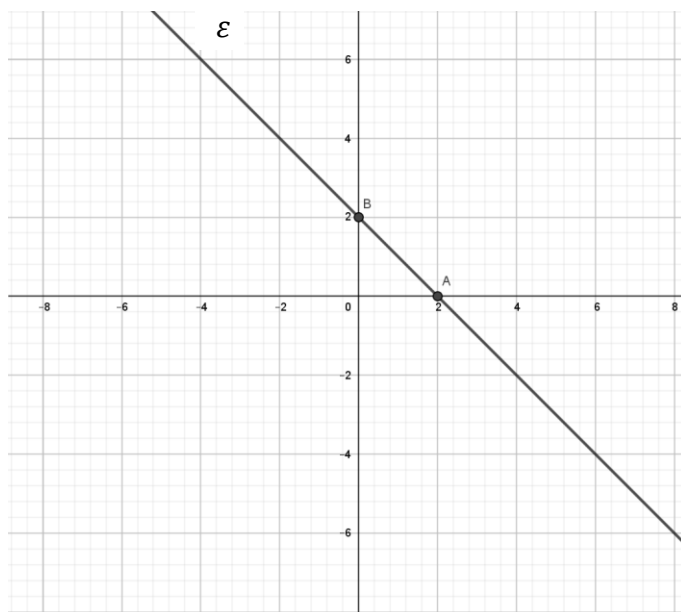
ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -1 < 0$. Άρα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $A(2,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $B(0,2)$.

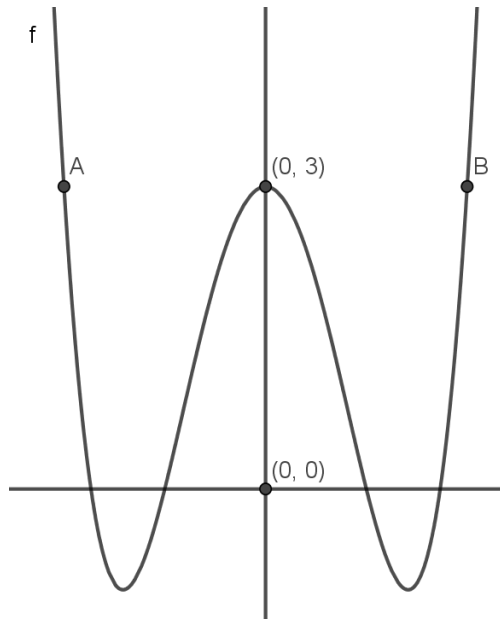
γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε στο ερώτημα β), τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία όπως στο παρακάτω Σχήμα.



Σχήμα

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της f , φαίνεται ότι $f(0) = 3$ άρα $a \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + \gamma = 3$ οπότε $\gamma = 3$.

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον $y'y$. Άρα:

$$a^2 - 3 = -(5 - 3a) \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$ και οι ρίζες της:

$$a_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}.$$

Επειδή το σημείο A ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο πρέπει:

$$a^2 - 3 < 0.$$

Για $a = 2$ είναι $2^2 - 3 = 1 > 0$ άρα η λύση $a = 2$ απορρίπτεται.

Για $a = 1$ είναι $1^2 - 3 = -2 < 0$ άρα η λύση $a = 1$ είναι δεκτή.

Οπότε, ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3.$$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ η οποία για $x^2 = w > 0$ γίνεται $w^2 - 4w + 3 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$ και οι ρίζες

$$w = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 \text{ ή } w = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1,$$

οι οποίες είναι και οι δύο δεκτές. Άρα:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = -1\}, \text{ ή } x^2 = 3 \Leftrightarrow \{x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}\}.$$

δ) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν:

$$-\sqrt{3} < x < -1 \text{ ή } 1 < x < \sqrt{3}.$$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Έτσι, έχουμε: $2\lambda - 3 = 1$, οπότε $2\lambda = 4$, άρα $\lambda = 2$.

β) Θα αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του B επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας που είναι η ε : $y = 2x - 3$.

Με $x = -1$ έχουμε: $y = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$, οπότε το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία ε .

Εξετάζουμε αν το Γ είναι πάνω στην ε .

Με $x = 27$ έχουμε: $y = 2 \cdot 27 - 3 = 54 - 3 = 51 \neq 50$, οπότε το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ευθεία ε .

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ίδια ευθεία με τα A και B.

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) i. Αν αντικαταστήσουμε τα α^2, β^2 από τις δοσμένες ισότητες, βρίσκουμε ότι

$$\alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha = \alpha - \beta.$$

ii. Η τελευταία ισότητα γράφεται $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha - \beta$. Αλλά, $\alpha - \beta \neq 0$, αφού οι αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, οπότε παίρνουμε $\alpha + \beta = 1$, που είναι το ζητούμενο.

β) Όπως προηγουμένως, έχουμε:

$$A = \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) = 3 \cdot 1 = 3$$

αφού $\alpha + \beta = 1$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(Μονάδες 6)

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι $A=2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)|=2$.

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) $A = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x-3| + |x-1|.$

β) i. Από $1 \leq x \leq 3$ έχουμε $|x-3| = -x+3$ και $|x-1| = x-1$,
τότε $A = -x+3+x-1=2$.

ii. $-x+3-x+1=2 \Leftrightarrow -2x+4=2 \Leftrightarrow x=1$.

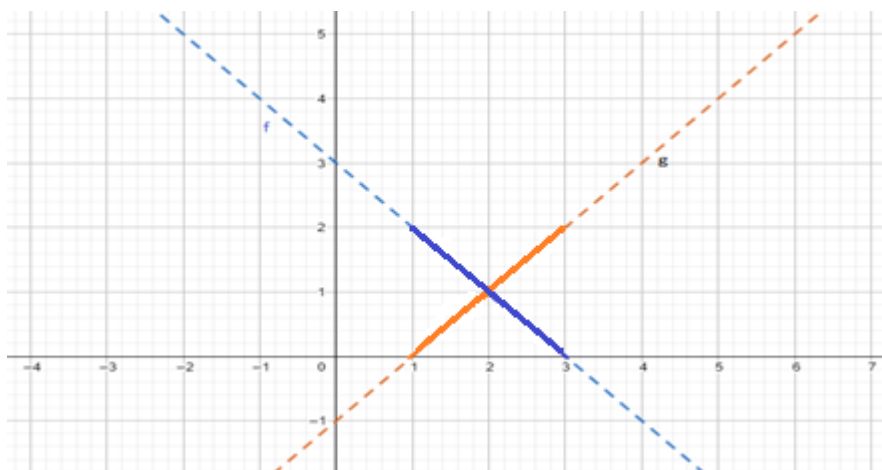
γ) i. Για την $f(x)=3-x$ για $1 \leq x \leq 3$ προκύπτει ο πίνακας τιμών:

x	y
1	2
3	0

Ομοίως για την $g(x)=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$ προκύπτει ο πίνακας τιμών:

x	y
1	0
3	2

Επομένως, στο ίδιο σύστημα αξόνων, έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



ii. Από την γραφική παράσταση του ερωτήματος γ) i παρατηρούμε πως $|f(x) - g(x)|=2$ έχουμε για $x=1$ ή $x=3$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x-1| \leq \sqrt{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad 3 - \frac{x+4}{2} < 0 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-1| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x-1 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$$

β) Η μικρότερη λύση της (1) είναι ο αριθμός $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ και η μεγαλύτερη είναι $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Για το άθροισμα s και το γινόμενο p των αριθμών αυτών ισχύει:

$$s = x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2 \text{ και } p = x_1 x_2 = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2.$$

Με τη βοήθεια του τύπου $x^2 - sx + p = 0$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1), είναι η $x^2 - 2x - 2 = 0$.

γ) Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$3 - \frac{x+4}{2} < 0 \Leftrightarrow 6 - (x+4) < 0 \Leftrightarrow 6 - x - 4 < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$$

Όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα, οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί x με: $2 < x \leq 1 + \sqrt{3}$



δ) Οι αριθμοί α, β που είναι κοινές λύσεις των (1) και (2) περιέχονται στο διάστημα $(2, 1 + \sqrt{3}]$.

Έτσι έχουμε: $2 < \alpha \leq 1 + \sqrt{3}$, οπότε $6 < 3\alpha \leq 3(1 + \sqrt{3})$, (3).

Ανάλογα, $2 < \beta \leq 1 + \sqrt{3}$, οπότε $8 < 4\beta \leq 4(1 + \sqrt{3})$, (4).

Με πρόσθεση των ανισοτήτων (3), (4) παίρνουμε $14 < 3\alpha + 4\beta \leq 7(1 + \sqrt{3})$ απ' όπου συνεπάγεται ότι:

$$2 < \frac{3\alpha + 4\beta}{7} \leq 1 + \sqrt{3}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση των (1) και (2), που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

- i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

- ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16| = \\ &= 3|x - 4| - 2|x - 4| - 3|x^2 - 16| = \\ &= |x - 4| - 3|x^2 - 16|. \end{aligned}$$

Επειδή $x \leq 4 \Leftrightarrow x - 4 \leq 0$. Άρα $|x - 4| = 4 - x$.

Επιπλέον $|x| \leq 4 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 16| = 16 - x^2$.

Άρα: $f(x) = 4 - x - 3(16 - x^2) = 4 - x - 48 + 3x^2 = 3x^2 - x - 44$.

β)

- i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, δηλαδή $3x^2 - x - 44 = 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 44 = 529$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 23}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases},$$

οι οποίες είναι δεκτές γιατί ανήκουν στο διάστημα $[-4, 4]$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι $A(4, 0)$ και $B(-\frac{11}{3}, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της f όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = f(0) = -44$.

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι $\Gamma(0, -44)$.

- ii. Αφού το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ με μ ακέραιο ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει: $\mu + 1 \in [-4, 4]$ και $f(\mu + 1) = -20$.

Είναι: $f(\mu + 1) = -20 \Leftrightarrow 3(\mu + 1)^2 - \mu - 1 - 44 = -20 \Leftrightarrow$

$$3\mu^2 + 6\mu + 3 - \mu - 45 + 20 = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 + 5\mu - 22 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-22) = 289$ και οι ρίζες:

$$\mu_{1,2} = \frac{-5 \pm 17}{6} = \begin{cases} \mu_1 = \frac{12}{6} = 2 \\ \mu_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases}.$$

Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η $\mu = 2$ καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $\mu + 1 \in [-4, 4]$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = px^2 + (6-p)x + \left(\frac{5}{2}p - 3\right)$, με παράμετρο $p \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης για $p = 0$ και $p = 2$. Για ποια από αυτές τις τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία;

(Μονάδες 4)

β)

i. Για $p = 0$ και $p = 2$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το οποίο και να βρείτε.

(Μονάδες 6)

ii. Συμβαίνει το ίδιο (δηλαδή να έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα) και για άλλες τιμές της παραμέτρου $p \in \mathbb{R}$;

(Μονάδες 6)

γ) Για $p \neq 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Για $p = 0$ η συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x) = 6x - 3,$$

της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διότι είναι συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha = 6$ και $\beta = -3$.

Για $p = 2$ η συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2.$$

β)

i. Για $p = 0$ η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Για $p = 2$ η γραφική παράσταση της f έχει επίσης ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το $(-1, 0)$.

ii. Για να έχει η γραφική παράσταση της f με τον $x'x$ άξονα ένα κοινό σημείο,

- πρέπει $p = 0$, όπως δείξαμε παραπάνω και για
- $p \neq 0$, πρέπει η εξίσωση $px^2 + (6 - p)x + \left(\frac{5}{2}p - 3\right) = 0$ να έχει μια διπλή ρίζα, που συμβαίνει όταν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(6 - p)^2 - 4p\left(\frac{5}{2}p - 3\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$36 - 12p + p^2 - 10p^2 + 12p = 0 \Leftrightarrow$$

$$36 - 9p^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$p^2 = \frac{36}{9} \Leftrightarrow p^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$p = \pm 2.$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει με τον $x'x$ άξονα ένα κοινό σημείο (εκτός από τις τιμές $p = 0$ και $p = 2$) και για $p = -2$.

γ) Για $p \neq 0$, η γραφική παράσταση της f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα, όταν

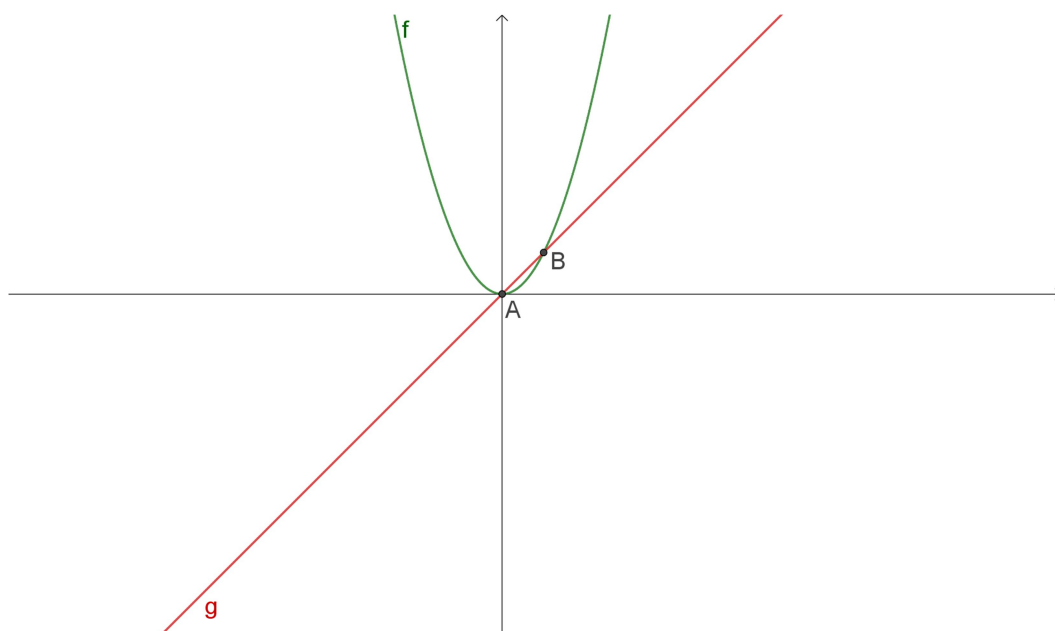
η εξίσωση $px^2 + (6 - p)x + \left(\frac{5}{2}p - 3\right) = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, που συμβαίνει όταν:

$$\begin{aligned}
 \Delta &> 0 \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow} \\
 36 - 9p^2 &> 0 \Leftrightarrow \\
 4 - p^2 &> 0 \stackrel{\text{(πίνακας προσήμου)}}{\Leftrightarrow} \\
 -2 &< p < 2.
 \end{aligned}$$

Τελικά, για $p \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ η γραφική παράσταση της f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A,B .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B .

(Μονάδες 7)

β) Αν $A(0,0), B(1,1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$,
ισοδύναμα $x^2 = x$, δηλαδή $x^2 - x = 0$, οπότε $x(x-1) = 0$ και τελικά $x = 0$ ή $x = 1$.

Επειδή το σημείο A είναι πιο αριστερά από το σημείο B , η τετμημένη του A είναι 0 και η τετμημένη του B είναι 1 .

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$, οπότε $A(0,0)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$, οπότε $B(1,1)$.

β)

i. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g , για τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της g που είναι μεταξύ των A, B , δηλαδή για $0 < x < 1$.

ii. Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x^2 < x$. Η ανίσωση $x^2 < x$ ισοδύναμα γίνεται $x^2 - x < 0$ που είναι μία ανίσωση 2ου βαθμού και η λύση της βασίζεται στο πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x$, που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	○	○	+

Συνεπώς πράγματι $x^2 < x$ για $0 < x < 1$.

Σημείωση: Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $x^2 < x$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$

αφού ισοδύναμα $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Συνεπώς το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού δεν είναι πάντα μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό.

γ) Αφού $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$. Συνεπώς

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{\alpha}{\beta} < 1$ οπότε, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ και ισοδύναμα $|\alpha| < |\beta|$.

ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + x = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

β) Ισχύει ότι $|x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $x \leq 0$. Άρα,

$$|x| + x = 0 \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0.$$

γ) Δεδομένου ότι $|x^2 - 1| \geq 0$ και $|x| \geq -x \Leftrightarrow |x| + x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ισοδύναμα:

$$|x| + |x^2 - 1| + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$|x^2 - 1| + (|x| + x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ |x^2 - 1| = 0 \text{ και } |x| + x = 0 \right\}^{(\alpha), (\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\{x = \pm 1 \text{ και } x \leq 0\}.$$

Άρα $x = -1$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $M(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$\begin{aligned}x - 2 \neq 0 &\Leftrightarrow \\x &\neq 2.\end{aligned}$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

β) Το σημείο $M(1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , γιατί

$$f(1) = \frac{1-4}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $(0,2)$ και τον $x'x$ άξονα στο σημείο $(-2,0)$, αφού

$$\text{για } x=0, \text{ έχουμε: } f(0) = \frac{0-4}{0-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ και}$$

$$\text{για } y=f(x)=0, \text{ έχουμε: } 0 = \frac{x^2-4}{x-2}, \text{ οπότε}$$

$$x^2 - 4 = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$(x+2)(x-2) = 0, \text{ οπότε}$$

$$x+2=0 \text{ ή } x-2=0 \text{ και τελικά}$$

$$x=-2 \text{ (δεκτή) ή } x=2 \text{ (απορρίπτεται).}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$1 + (x + 2)x \neq 0, \text{ δηλαδή}$$

$$x^2 + 2x + 1 \neq 0, \text{ οπότε}$$

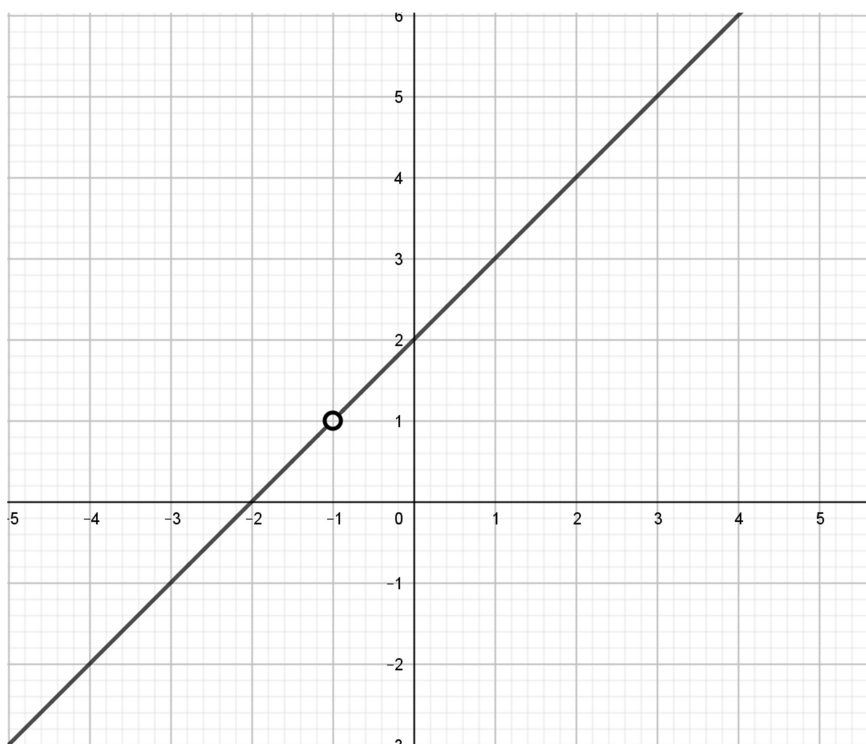
$$(x + 1)^2 \neq 0 \text{ και τελικά}$$

$$x \neq -1.$$

Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

β) Έχουμε: $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x} = \frac{(x+2)(x+1)^2}{(x+1)^2} = x+2$ και η γραφική της παράσταση

είναι ευθεία με εξίσωση $y = x + 2$ και $x \neq -1$.



γ)

ι. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι λύσεις της εξίσωσης: $x + 2 = x^2$, για $x \neq -1$.

Έχουμε λοιπόν $x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ που είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες που έχουν άθροισμα $-\frac{-1}{1} = 1$ και γινόμενο $\frac{-2}{1} = -2$. Άρα $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$ (απορρίπτεται).

Άρα οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο, το $(2, 4)$, αφού $f(2) = g(2) = 4$.

ii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για τις τιμές του x οι οποίες είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$x + 2 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0.$$

Η ανίσωση είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού με $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$, οπότε αληθεύει για $x \in (-1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x^3 - 2x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Άρα $A = \mathbb{R} - \{1, 0\}$.

β) Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x}{x(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ η εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ \text{ή} \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=0 \text{ απορ} \end{cases}.$$

Άρα έχει μοναδική λύση την $x=2$.

δ) Αναζητούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

και επειδή $x \neq 1$, έχουμε τελικά ότι $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$x^2 - 3x - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in (-1, 4)$.

β) Είναι $A = |2x + 2| + |x - 5| = 2|x + 1| + |x - 5|$.

Επειδή $x \in (-1, 4)$ τότε $x > -1$ και $x + 1 > 0$. Άρα $|x + 1| = x + 1$.

Επειδή $x \in (-1, 4)$ τότε $x < 4 < 5$ και $x - 5 < 0$. Άρα $|x - 5| = 5 - x$.

Επομένως η παράσταση $A = 2(x + 1) + 5 - x = 2x + 2 + 5 - x = x + 7$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$.

Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $[\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, αφού $f(x)$ είναι οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f . Παρατηρούμε ότι ο τύπος $f(x)$ της συνάρτησης είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, άρα το τριώνυμο θα γίνεται ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x , δηλαδή πάντα θετικό. Έστω $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(-\alpha - 1) = f(\alpha)$ για κάθε πραγματικό αριθμό

$\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Πράγματι: $f(-\alpha - 1) = (-\alpha - 1)^2 + (-\alpha - 1) + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha = \alpha^2 + \alpha + 1 = f(\alpha)$.

γ) Έστω $M(\beta, f(\beta))$ και A, Δ οι προβολές του M στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Τότε είναι $A(\beta, 0)$ και $\Delta(0, f(\beta))$. Η περίμετρος P του ορθογωνίου $OAM\Delta$ θα είναι:

$$P = 2\beta + 2f(\beta) = 2[\beta + f(\beta)] = 2(\beta + \beta^2 + \beta + 1) = 2(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta + 1)^2 = [\sqrt{2}(\beta + 1)]^2.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}.$

β)

i. Πρέπει να βρούμε την τιμή του x για την οποία

$$A = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{x+1}{x} = 0, \text{ που συμβαίνει όταν}$$

$$x+1=0, \text{ δηλαδή όταν}$$

$$x = -1.$$

ii. Για να πάρει η παράσταση A την τιμή 2 , πρέπει να ισχύουν ισοδύναμα:

$$\frac{x+1}{x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$x+1 = 2x \Leftrightarrow$$

$$x = 1, \text{ που δεν είναι αποδεκτή τιμή για το } x.$$

Άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2 .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8, x \in A$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και άρα $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει ρίζες τις 1 και 4, οπότε είναι $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ και επομένως:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-1)}{x-1} = (x-2) \cdot (x-4) = x^2 - 6x + 8, x \in A.$$

γ) Έχουμε:

$$f(x) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0.$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
x^2-6x+5	+	0	-	0	+

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 6x + 5$ φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και η ανίσωση $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ αληθεύει για $x \in [1, 5]$. Όμως $x \neq 1$, οπότε $x \in (1, 5]$.

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της g με τη γραφική παράσταση της f είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^4 - 6x - 4 = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0,$$

η οποία θέτοντας $x^2 = \omega$ γίνεται

$$\omega^2 - \omega - 12 = 0 \text{ με ρίζες } \omega = -3 \text{ (απορρίπτεται) και } \omega = 4 \text{ (δεκτή).}$$

$$\text{Άρα } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

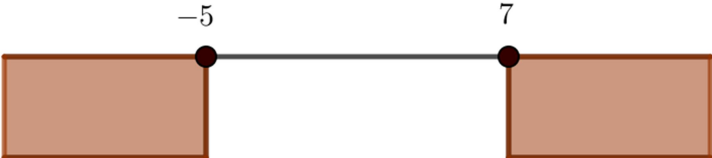
$$\text{Για } x = -2 \text{ έχουμε } f(-2) = (-2)^2 - 6(-2) + 8 = 4 + 12 + 8 = 24$$

$$\text{και για } x = 2 \text{ έχουμε } f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0.$$

Τελικά τα ζητούμενα κοινά σημεία είναι $B(-2, 24)$ και $\Gamma(2, 0)$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

1. 
2. 
3. 
4. 

(Μονάδες 12)

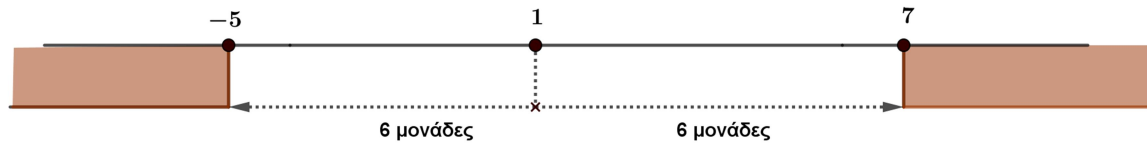
β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ διατυπώνεται γεωμετρικά ως εξής: Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το 1 απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 6.

Η σωστή αναπαράσταση είναι η 4^η, διότι



β) Θα λύσουμε την ανίσωση αλγεβρικά, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$|x-1| \geq 6, \text{ δηλαδή}$$

$$x-1 \leq -6 \quad \text{ή} \quad x-1 \geq 6, \text{ οπότε}$$

$$x \leq -5 \quad \text{ή} \quad x \geq 7$$

Δηλαδή το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $(-\infty, -5] \cup [7, +\infty)$ που είναι πράγματι η αναπαράσταση 4.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $1 - x \geq 0$, δηλαδή όταν $x \leq 1$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_f = (-\infty, 1]$.

β) Για $x = -24 < 1$ η τιμή της συνάρτησης είναι:

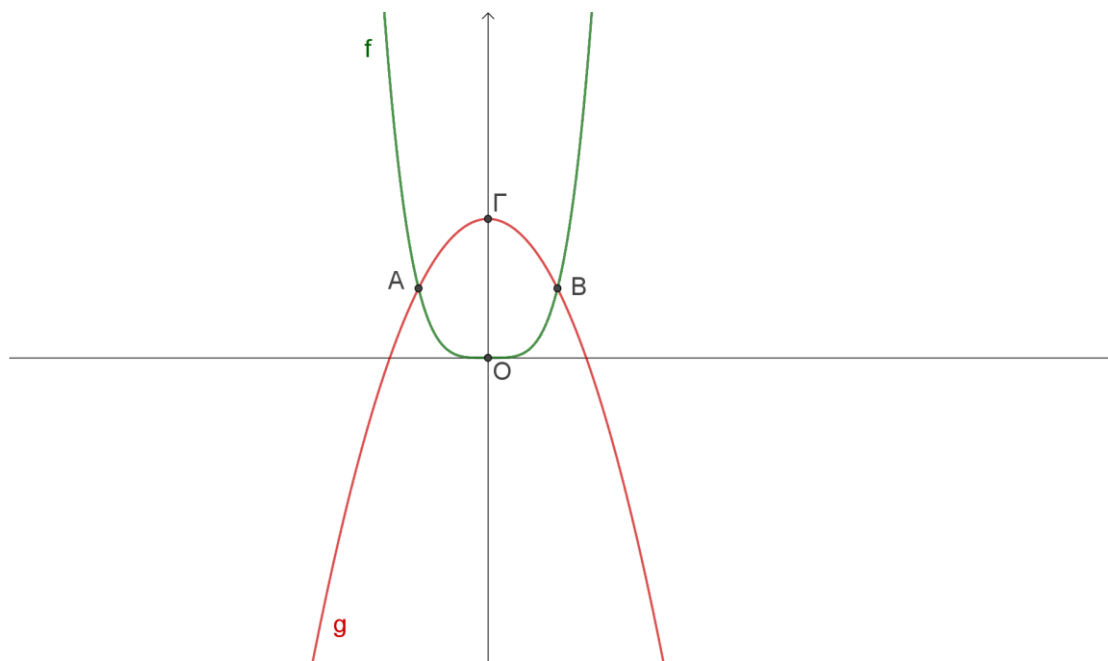
$$f(-24) = \frac{\sqrt{1-(-24)}}{5} + 3 = \frac{\sqrt{25}}{5} + 3 = 1 + 3 = 4.$$

γ) Για $x = 1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $f(1) = \frac{\sqrt{1-1}}{5} + 3 = 0 + 3 = 3$.

Άρα το σημείο $(1,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ.

(Μονάδες 9)

Αν $A(-1,1)$, $B(1,1)$, $\Gamma(0,2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

(Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^4=2-x^2 \Leftrightarrow x^4+x^2-2=0. \text{ Θέτουμε } x^2=\omega$$

και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$.

Για $\omega=-2$ έχουμε $x^2=-2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega=1$ έχουμε $x^2=1$ οπότε $x=1$ ή $x=-1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B, το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1.

Για $x=-1$ είναι $f(-1)=1$ οπότε A(-1,1).

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ οπότε B(1,1).

Αφού Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$, το σημείο Γ θα έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη $g(0)=2$, οπότε Γ(0,2).

β) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A,B δηλαδή για $x \in (-1,1)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^4 < 2-x^2 \Leftrightarrow x^4+x^2-2 < 0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η ανίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2+\omega-2$ έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$ και $\alpha=1 > 0$ οπότε γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$ και άρα $-2 < x^2 < 1$. Όμως η ανίσωση $-2 < x^2$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x , οπότε πρέπει και αρκεί $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο β) ερώτημα.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5).$$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|2x-5|<3 \Leftrightarrow -3<2x-5<3 \Leftrightarrow -3+5<2x<3+5 \Leftrightarrow 2<2x<8 \Leftrightarrow 1<x<4.$$

Άρα, λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x , με $x \in (1, 4)$.

β) Ο αριθμός α είναι λύση της ανίσωσης, οπότε $\alpha \in (1, 4)$. Έτσι έχουμε $\alpha > 1$, οπότε $\alpha - 1 > 0$

και $\alpha < 5$, οπότε $\alpha - 5 < 0$.

Επομένως οι παράγοντες του γινομένου $(\alpha - 1)(\alpha - 5)$ είναι ετερόσημοι, οπότε

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5) < 0.$$

ΘΕΜΑ 4

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in [0, 6] \\ 16, & x \in (6, 9] \\ 25 - x, & x \in (9, 12] \end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

- i. Διατηρείται σταθερή.
- ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

(Μονάδες 4+7=11)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η θερμοκρασία στις 6 το πρωί, προκύπτει για $x=0$ και είναι ίση με $f(0)=4$.

Η θερμοκρασία στις 12 το μεσημέρι, προκύπτει για $x=6$ και είναι ίση με $f(6)=2 \cdot 6 + 4 = 16$.

Η θερμοκρασία στις 5 το απόγευμα, προκύπτει για $x=11$ και είναι ίση με $f(11)=25-11=14$.

β) i. Η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή και ίση με 16 βαθμούς Κελσίου, ανάμεσα στην 6^η και την 9^η ώρα μετά τις 6 το πρωί, δηλαδή στο διάστημα από τις 12 έως τις 3 το μεσημέρι.

ii. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

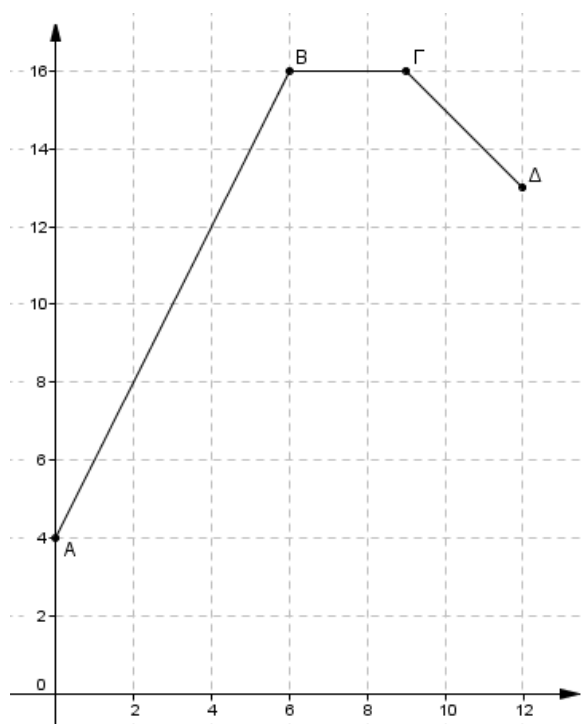
- Αν $x \in [0, 6]$ τότε: $f(x) > 14 \Leftrightarrow 2x + 4 > 14 \Leftrightarrow x > 5$
- Αν $x \in (6, 9]$ τότε: $f(x) = 16 > 14$
- Αν $x \in [9, 12]$ τότε: $f(x) > 14 \Leftrightarrow 25 - x > 14 \Leftrightarrow x < 11$

Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου, ανάμεσα στην 5^η και 11^η ώρα μετά τις 6 το πρωί, δηλαδή από τις 11 το πρωί μέχρι τις 5 το απόγευμα.

γ) Η γραφική παράσταση C_f της f αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα.

- Το πρώτο τμήμα AB έχει άκρα τα σημεία $A(0, 4)$ και $B(6, 16)$
- Το δεύτερο τμήμα ΒΓ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα το Β και το $\Gamma(9, f(9))$ δηλαδή το $\Gamma(9, 16)$
- Το τρίτο τμήμα ΓΔ έχει άκρα το σημείο Γ και το $\Delta(12, f(12))$ δηλαδή το $\Delta(12, 13)$

Η C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}, B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός $A = \frac{-\alpha}{\beta}$ ορίζεται όταν ο παρονομαστής είναι διαφορετικός του 0. Δηλαδή, αρκεί να ισχύει $\beta \neq 0$.

Ο αριθμός $B = \alpha^2$ ορίζεται για οποιαδήποτε τιμή του $\beta \in \mathbb{R}$.

Για να μην είναι μηδέν οι A,B, αρκεί και $\alpha \neq 0$.

β) Δύο αριθμοί A,B λέγονται αντίθετοι, αν και μόνο, αν ισχύει $A + B = 0$.

Ισχύουν ισοδύναμα:

$$A + B = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-\alpha}{\beta} + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 \beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\alpha\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 0 \text{ ή } \alpha\beta - 1 = 0$$

Όμως από τον ορισμό των δύο αριθμών είναι $\alpha \neq 0$, οπότε ισχύει ισοδύναμα ότι $\alpha\beta = 1$, το οποίο σημαίνει ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ .

(Μονάδες 7)

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (-\mu)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = \mu^2 + 8 > 0 \text{ για κάθε } \mu \in \mathbb{R}.$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Είναι:

$$f(-2) = 4 + 2\mu - 2 = 2\mu + 2, \quad f(1) = 1 - \mu - 1 = -\mu - 1$$

$$f(3) = 9 - 3\mu - 2 = 7 - 3\mu.$$

Οι τιμές του τριωνύμου είναι θετικές όταν το x παίρνει τιμές εκτός του διαστήματος των ριζών και αρνητικές όταν το x παίρνει τιμές εντός των ριζών. Άρα, για να βρίσκονται τα $x = -2$ και $x = 3$ εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ το $x = 1$ εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu + 2 > 0 \\ -\mu - 1 < 0 \\ 7 - 3\mu > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > -1 \\ \mu > -1 \\ \mu < \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < \mu < \frac{7}{3}.$$

γ) Για να είναι τα $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} (f(1))^2 &= f(-2) \cdot f(3) \Leftrightarrow \\ (-\mu - 1)^2 &= (2\mu + 2) \cdot (7 - 3\mu) \Leftrightarrow \\ (\mu + 1)^2 - 2(\mu + 1) \cdot (7 - 3\mu) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\mu + 1) \cdot (\mu + 1 - 14 + 6\mu) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\mu + 1) \cdot (7\mu - 13) &= 0 \Leftrightarrow \\ \mu = -1 \text{ ή } 7\mu - 13 &= 0 \Leftrightarrow \\ \mu = -1 \text{ ή } \mu &= \frac{13}{7}. \end{aligned}$$

Άρα $\mu = \frac{13}{7}$ αφού $\mu \in (-1, \frac{7}{3})$.

ι. Για $\mu = \frac{13}{7}$ είναι:

$$f(-2) = \frac{26}{7} + 2 = \frac{40}{7}, \quad f(1) = -\frac{13}{7} - 1 = -\frac{20}{7} \text{ και } f(3) = 7 - \frac{39}{7} = \frac{10}{7}.$$

Άρα ο λόγος $\lambda = \frac{-\frac{20}{7}}{\frac{40}{7}} = -\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α , β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta \cdot (\alpha^2 + 1) = \alpha \cdot (\beta^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta = \alpha \cdot \beta^2 + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta - \alpha \cdot \beta^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta) \cdot (\alpha \cdot \beta - 1) = 0 \stackrel{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 1.$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22} \cdot \beta^{24}}{\alpha^{-2} \cdot \alpha^{25} \cdot \beta^{25}} = \frac{\alpha^{22} \cdot \beta^{24}}{\alpha^{23} \cdot \beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}} \cdot \frac{\beta^{24}}{\beta^{25}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = 1.$$

γ) Γνωρίζουμε πως $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ και $\alpha \cdot \beta = 1$ με $\alpha, \beta > 0$. Σύμφωνα με τους τύπους Vieta:

$$s = \alpha + \beta \text{ και } p = \alpha \cdot \beta, \quad x^2 - sx + p = 0$$

προκύπτει ότι οι αριθμοί α, β είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (-5)^2 - 16 = 9$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ ή } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $\alpha=2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ ή αντίστροφα.

δ) Από το προηγούμενο ερώτημα θεωρούμε $\alpha=2$ και $\beta = \frac{1}{2}$. Για να είναι το σχήμα τετράγωνο πρέπει τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να γίνουν ίσα. Έστω ω ο αριθμός που θα προσθέσουμε στον μικρότερο που είναι ο β για να γίνει ίσο με το α , τότε :

$$\alpha = \beta + \omega \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2}.$$

Άρα πρέπει να προστεθεί στο β ο αριθμός $\frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha > \beta$ και ισοδύναμα $\alpha - \beta > 0$, οπότε $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$.

Επίσης $\alpha > 1$ ισοδύναμα $1 - \alpha < 0$, οπότε $|1 - \alpha| = \alpha - 1$.

$$\text{Άρα } \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha - 1}{1 - \alpha} = 1 + \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha} = 1 + 1 = 2 .$$

β) Είναι

$\alpha > 1$ και $\beta > 1$, οπότε

$\alpha + \beta > 1 + 1$, δηλαδή

$\alpha + \beta > 2$ και από το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} .$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = (\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1) = (2\sqrt{3})^2 - 2 = 10$$

β) Είναι

$$\alpha\beta = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 3 - 1 = 2 \text{ οπότε}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{10}{2} = 5$$

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y - x)^2 = 0$

(Μονάδες 8)

ii. $y = \frac{x}{2}.$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2.$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) i. Από τη δοσμένη ισότητα με πράξεις έχουμε:

$x^2 + 4xy + xy + 4y^2 - 9xy = 0$, οπότε $x^2 + 4y^2 - 4xy = 0$, δηλαδή $(2y - x)^2 = 0$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Είναι: $(2y - x)^2 = 0$, οπότε $2y - x = 0$, άρα $y = \frac{x}{2}$ που είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\frac{x}{2} = y$, (1).

Με τη βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = (2y - y)^2 + (2y + y)^2 = y^2 + (3y)^2 = y^2 + 9y^2 = 10y^2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x^2 + 1$, οπότε $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$, δηλαδή $f(x) > 0$, η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει δυο λύσεις και να τις προσδιορίσουμε.

Είναι:

$$f(x) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \alpha \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{\alpha} - 1, \quad (1)$$

και επειδή $0 < \alpha < 1$, έχουμε $\frac{1}{\alpha} > 1$ οπότε $\frac{1}{\alpha} - 1 > 0$.

Επομένως η (1) έχει δυο (αντίθετες) λύσεις τις $x_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$ και $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$ που είναι και οι τετμημένες των κοινών σημείων τους.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}, \text{ ή αρκεί, } \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}, \text{ ή αρκεί, } 2|x| \leq x^2 + 1$$

που ισχύει, αφού από την προφανή ανισότητα $(|x| - 1)^2 \geq 0$ και την ισότητα $|x|^2 = x^2$ έπεται ότι $x^2 + 1 \geq 2|x|$.

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α) Να δείξετε ότι $y = 2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\frac{4x+5y}{x-4y} = -2, \text{ δηλαδή}$$

$$4x+5y = -2(x-4y), \text{ οπότε}$$

$$4x+5y = -2x+8y, \text{ δηλαδή}$$

$$3y = 6x \text{ και τελικά}$$

$$y = 2x$$

β) Για $y = 2x$ η παράσταση A γράφεται:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy} = \frac{2x^2 + 3(2x)^2 + x(2x)}{x(2x)} = \frac{2x^2 + 3(4x^2) + 2x^2}{2x^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 12x^2 + 2x^2}{2x^2} = \frac{16x^2}{2x^2} = 8. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι: $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$, οπότε το $x_1 = 1$ είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο, θα βρούμε και την δεύτερη ρίζα του

χρησιμοποιώντας το γινόμενο των ριζών $x_1 \cdot x_2 = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$.

Οπότε:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}, \text{ δηλαδή}$$

$$1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2} \text{ και τελικά}$$

$$x_2 = -\frac{5}{2}$$

Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2x^2 + 3x - 5 = 2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

και

$$-4 \leq \beta \leq -3, \text{ οπότε}$$

$$-4 \cdot 2 \leq \beta \cdot 2 \leq -3 \cdot 2, \text{ και τελικά}$$

$$-8 \leq 2\beta \leq -6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), και έχουμε:

$$2 - 8 \leq \alpha + 2\beta \leq 4 - 6, \text{ οπότε τελικά}$$

$$-6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2.$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη, η παράσταση $\alpha - \beta$ γράφεται $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

και

$-4 \leq \beta \leq -3$, οπότε πολ/ζουμε με (-1) τα μέλη της ανισότητας και αυτή αλλάζει φορά

$$-4 \cdot (-1) \geq \beta \cdot (-1) \geq -3 \cdot (-1),$$

$$4 \geq -\beta \geq 3 \text{ και τελικά}$$

$$3 \leq -\beta \leq 4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3), και έχουμε:

$$2 + 3 \leq \alpha - \beta \leq 4 + 4, \text{ οπότε τελικά}$$

$$5 \leq \alpha - \beta \leq 8.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7,...

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α)

i. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1$ και η διαφορά της $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 1 = 2$.

ii. Ο τριακοστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_{30} = \alpha_1 + 29\omega = 1 + 29 \cdot 2 = 1 + 58 = 59$.

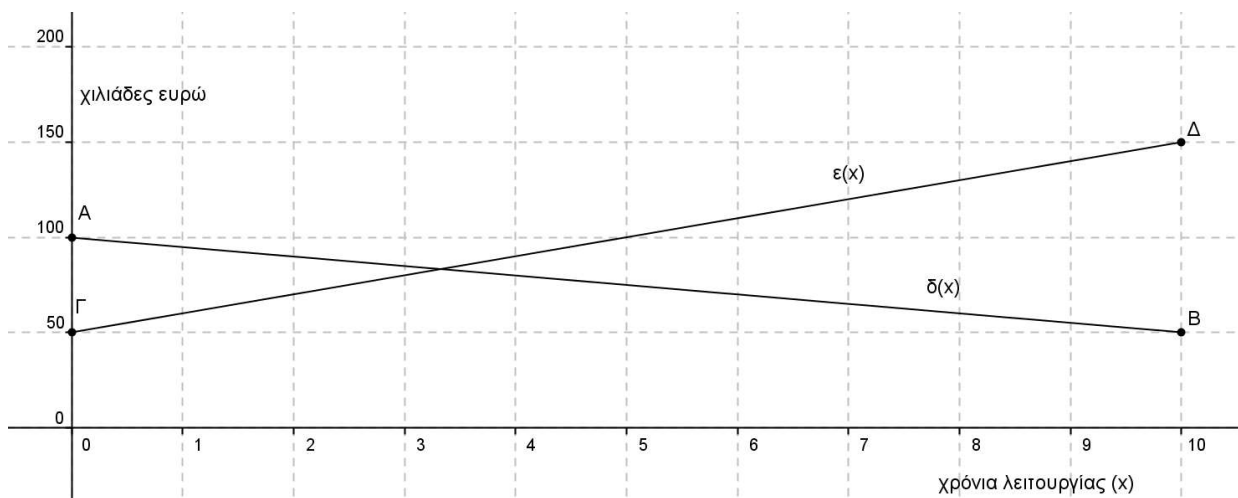
β) Έχουμε: $S_{30} = \frac{30}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{30}) = 15 \cdot (1 + 59) = 15 \cdot 60 = 900 = 30^2$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

(Μονάδες 15)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας ($x=5$), με τη βοήθεια της ευθείας $\Gamma\Delta$ των εσόδων, εκτιμούμε ότι η εταιρεία θα έχει περίπου 100 ευρώ έσοδα ($y=100$ είναι η τεταγμένη του σημείου της ευθείας $\Gamma\Delta$ με τετμημένη $x=5$).

Τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας ($x=5$), με τη βοήθεια της ευθείας AB των δαπανών, εκτιμούμε ότι οι δαπάνες της εταιρείας θα είναι περίπου 75 ευρώ ($y=75$ είναι η τεταγμένη του σημείου της ευθείας AB με τετμημένη $x=5$).

β)

i. Η ευθεία $\Gamma\Delta$, που αναπαριστά τη συνάρτηση των εσόδων $\varepsilon(x)$, διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\alpha = \frac{150-50}{10-0} = \frac{100}{10} = 10 \text{ και εξίσωση } \Gamma\Delta: y = 10x + 50.$$

Η ευθεία AB , που αναπαριστά τη συνάρτηση των δαπανών $\delta(x)$, διέρχεται από τα σημεία $A(0,100)$ και $B(10,50)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\alpha = \frac{100-50}{0-10} = \frac{50}{-10} = -5 \text{ και εξίσωση } AB: y = -5x + 100.$$

Παρατηρούμε ότι:

Το σημείο της ευθείας $\Gamma\Delta$ με τετμημένη $x=5$ έχει τεταγμένη:

$$y = 10 \cdot 5 + 50 = 50 + 50 = 100.$$

Το σημείο της ευθείας AB με τετμημένη $x=5$ έχει τεταγμένη:

$$y = -5 \cdot 5 + 100 = -25 + 100 = 75.$$

Επομένως οι εκτιμήσεις που κάναμε ήταν σωστές.

ii. Η τετμημένη του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$10x + 50 = -5x + 100, \text{ δηλαδή}$$

$$15x = 50, \text{ οπότε}$$

$$x = \frac{50}{15} = 3\frac{1}{3} \text{ και}$$

$$\text{η τεταγμένη του σημείου τομής είναι: } y = -5 \cdot \frac{50}{15} + 100 = -\frac{50}{3} + 100 = \frac{250}{3} \approx 83,3$$

Συνεπώς $3\frac{1}{3}$ έτη (3 έτη και 4 μήνες) μετά την έναρξη λειτουργίας, τα έσοδα της

εταιρείας είναι όσα και οι δαπάνες της (83,3 χιλιάδες ευρώ).

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ έχουμε:

$$(2\alpha - 1)(\beta - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta - \beta - 2\alpha + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 2\alpha + \beta.$$

β) Για να είναι οι αριθμοί x και y αντίθετοι αρκεί να δείξουμε ότι:

$$x + y = 0.$$

Συνεπώς,

$$x + y = (\alpha - \beta) + \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta = \alpha - \beta + \alpha - 2\alpha\beta + 2\beta = 2\alpha + \beta - 2\alpha\beta = 0 \text{ ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω .

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

- i. Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

- ii. Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Οι ενδείξεις ενός ζαριού είναι οι ακέραιες τιμές από το 1 ως το 6.

Άρα $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

β) i. Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$ ως δευτεροβάθμια δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta < 0$.

Επομένως,

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 2) = 4 - 4 \cdot \lambda + 8 = 12 - 4 \cdot \lambda.$$

Άρα $12 - 4 \cdot \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 3$.

Δηλαδή $\lambda \in (3, +\infty)$, επιπλέον $\lambda \in \Omega$, δηλαδή $\lambda \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Προκύπτει $\lambda=4$ ή 5 ή 6 .

Άρα το ζητούμενο σύνολο $A = \{4,5,6\}$.

ii. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Σύμφωνα με τους τύπους Vieta $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 2$.

Άρα $\lambda - 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

γ) Για $\lambda = 3$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ διπλή ρίζα.

Άρα η ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$ διπλή.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow -1 + 3 < y - 3 + 3 < 1 + 3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$$

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $E = xy$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ βρίσκουμε:

$$1 \cdot 2 < x \cdot y < 3 \cdot 4 \Leftrightarrow 2 < E < 12$$

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$. Τότε:

$$4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 \leq 2x \leq 2 \cdot 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$8 + 4 \leq 2x + 2y \leq 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20.$$

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$$P = 2(x - 1) + 2 \cdot 3y = 2x + 6y - 2. \text{ Τότε:}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 6 \cdot 2 \leq 6y \leq 6 \cdot 3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \leq 6y - 2 \leq 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \leq 6y - 2 \leq 16 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$$8 + 10 \leq 2x + 6y - 2 \leq 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \leq P \leq 30.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

(Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

(Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2 = 1$ έχει λύσεις τις $x = 1$ ή $x = -1$ ενώ η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει λύσεις τις $x = 3$ ή $x = -3$.

β) Οι λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά είναι -3, -1, 1, 3.

i. Αφού $3 - 1 = 1 - (-1) = -1 - (-3) = 2$ οι αριθμοί -3, -1, 1, 3 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_n) με διαφορά $\omega = 2$.

ii. Αφού η αριθμητική πρόοδος έχει διαφορά $\omega = 2$ και περιέχει τους περιττούς όρους 1 και 3, όλοι οι όροι της προόδου θα είναι περιττοί και επομένως ο 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) .

ΘΕΜΑ 4

Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός a γράφεται στη μορφή $a=2k+1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

(Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

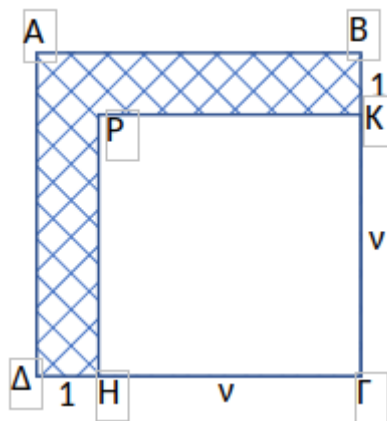
(Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $\Gamma H P K$ είναι τετράγωνα με $(\Gamma H)=(\Gamma K)=v$ και $(BK)=(\Delta H)=1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου v .

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Έχουμε διαδοχικά: $3=4-1=2^2-1^2$, $5=3^2-2^2$ και σκεπτόμενοι ότι

$7=M^2-N^2=(M-N)(M+N)$, ένα γινόμενο ακεραίων που δίνει 7 είναι οι 1, 7.

Αν $M>N$ τότε $M-N=1$, $M+N=7$ και λύνοντας το σύστημα έχουμε με αντικατάσταση:

$M=N+1$ και $N+1+N=7$, άρα $2N=6$, δηλαδή $N=3$ και $M=4$.

Οπότε $7=(4)^2-(3)^2$.

β) i) Έστω οι διαδοχικοί ακέραιοι $k, k+1, k \in \mathbb{Z}$.

Η διαφορά των τετραγώνων τους είναι $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1, k \in \mathbb{Z}$.

Ο οποίος είναι περιττός αριθμός.

ii) Έχουμε ότι $2021=2 \cdot 1010+1$.

Από την απόδειξη στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$2021=(1010+1)^2-(1010)^2=1011^2-1010^2.$$

γ) Η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν όσο η διαφορά των εμβαδών των τετραγώνων ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $v+1$, ενώ το ΓΗΡΚ έχει πλευρά v .

Ισχύει $(v+1)^2-v^2=45$, οπότε $2v+1=45 \Leftrightarrow 2v=44 \Leftrightarrow v=22$.

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ανοίγοντας τις παρενθέσεις στη δοθείσα ισότητα, έχουμε:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 5y^2 = 6 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5.$$

β) Παρατηρούμε ότι $P = [(x + y)(x - y)]^3 = (x^2 - y^2)^3 = 5^3 = 125$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x' , y' είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$

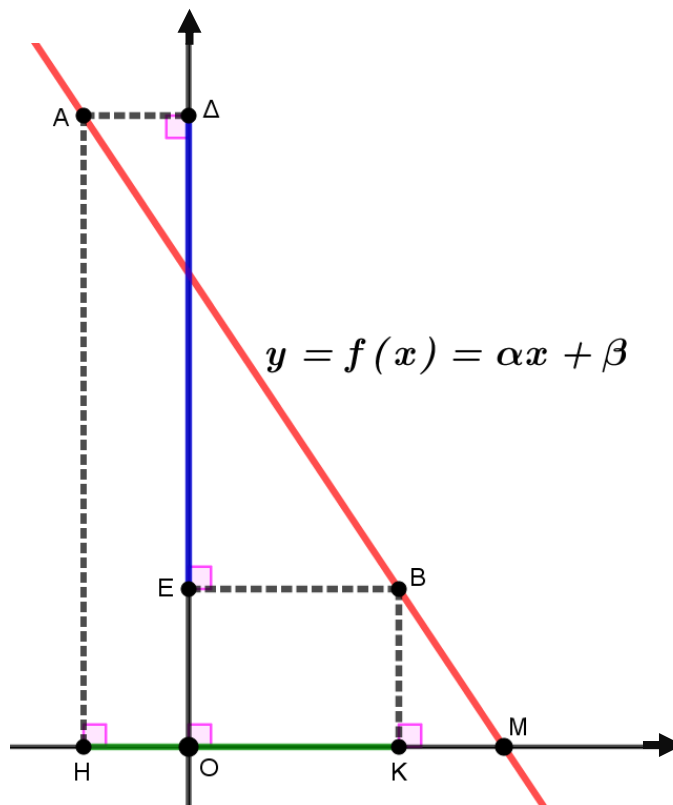
(Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$.

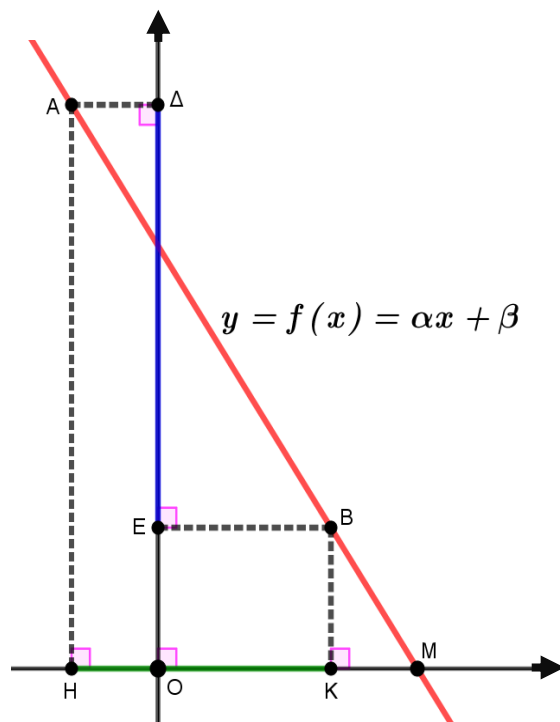
(Μονάδες 7)

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ



α) Έστω $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία του σχήματος. Αφού $(HK)=6$ θα είναι $x_2 - x_1 = 6$ και $(DE)=9$, άρα $f(x_1) - f(x_2) = 9$, οπότε $\alpha x_1 + \beta - (\alpha x_2 + \beta) = 9$, δηλαδή $\alpha(x_1 - x_2) = 9$, έτσι $\alpha(-6) = 9$. Όστε $\alpha = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$.

β) Το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(6, f(6))$. Αφού είναι σημείο του άξονα $x'x$, θα είναι $f(6) = 0$, άρα $-\frac{3}{2} \cdot 6 + \beta = 0$, άρα $\beta = 9$.

γ) Αφού είναι $(OK)=4$, τότε και η τετμημένη του σημείου B θα είναι επίσης 4. Άρα η τεταγμένη του σημείου B θα είναι $y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 9 = 3$. Οπότε έχουμε $E(0, 3)$, καθώς τα σημεία E και B έχουν την ίδια τεταγμένη. Αφού οι ευθείες είναι παράλληλες, θα έχουν την ίδια κλίση $-\frac{3}{2}$.

Έτσι, η εξίσωση της ευθείας (δ) θα είναι $y = -\frac{3}{2} \cdot x + 3$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α)

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση ορίζεται για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ (1).

Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$

Οι ρίζες του είναι $x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 1$ και $x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 2$.

Άρα η (1) ισχύει για $x \neq 1$ και $x \neq 2$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι:

$$A = \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

ii. Είναι $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων, αν αυτά υπάρχουν, θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$|f(x)| = 1, \text{ δηλαδή}$$

$$\left| \frac{x}{x-2} \right| = 1, \text{ οπότε}$$

$$\frac{x}{x-2} = 1 \text{ ή } \frac{x}{x-2} = -1, \text{ δηλαδή}$$

$$x = x - 2 \text{ ή } x = -(x - 2) \text{ και τελικά}$$

$$0x = -2, \text{ που είναι αδύνατη ή } x = 1 \text{ που δεν είναι δεκτή λύση.}$$

Συνεπώς η ευθεία $y = 1$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x+2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4| < 2$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}|x+2| < 1 &\Leftrightarrow \\ -1 < x+2 < 1 &\Leftrightarrow \\ -1-2 < x+2-2 < 1-2 &\Leftrightarrow \\ -3 < x < -1.\end{aligned}$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$-3 < x < -1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2, οπότε

$-6 < 2x < -2$, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 4 και έχουμε

$-2 < 2x+4 < 2$, οπότε τελικά

$$|2x+4| < 2.$$

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης $|x+2| < 1$ με το 2 και έχουμε

$$2 \cdot |x+2| < 2 \cdot 1, \text{ οπότε}$$

$$|2 \cdot (x+2)| < 2 \text{ και τελικά}$$

$$|2x+4| < 2.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10, \text{ δηλαδή}$$

$$(\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + \omega) = 10, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 5.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) = 33, \text{ οπότε}$$

$$3\alpha_1 + 3\omega = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + \omega = 11, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 + 5 = 11 \text{ και τελικά}$$

$$\alpha_1 = 6.$$

ΘΕΜΑ 2

Ο 1^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με 2 και ο 3^{ος} όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_3 = 8$, δηλαδή

$$\alpha_1 + 2\omega = 8, \text{ οπότε}$$

$$2 + 2\omega = 8 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 3.$$

β) Θα πρέπει να βρούμε τον φυσικό αριθμό ν , ώστε:

$$\alpha_\nu = 35, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 35, \text{ οπότε}$$

$$2 + (\nu - 1) \cdot 3 = 35, \text{ οπότε}$$

$$3 \cdot (\nu - 1) = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\nu - 1 = 11 \text{ και τελικά}$$

$$\nu = 12.$$

Επομένως ο 12^{ος} όρος της προόδου είναι 35.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

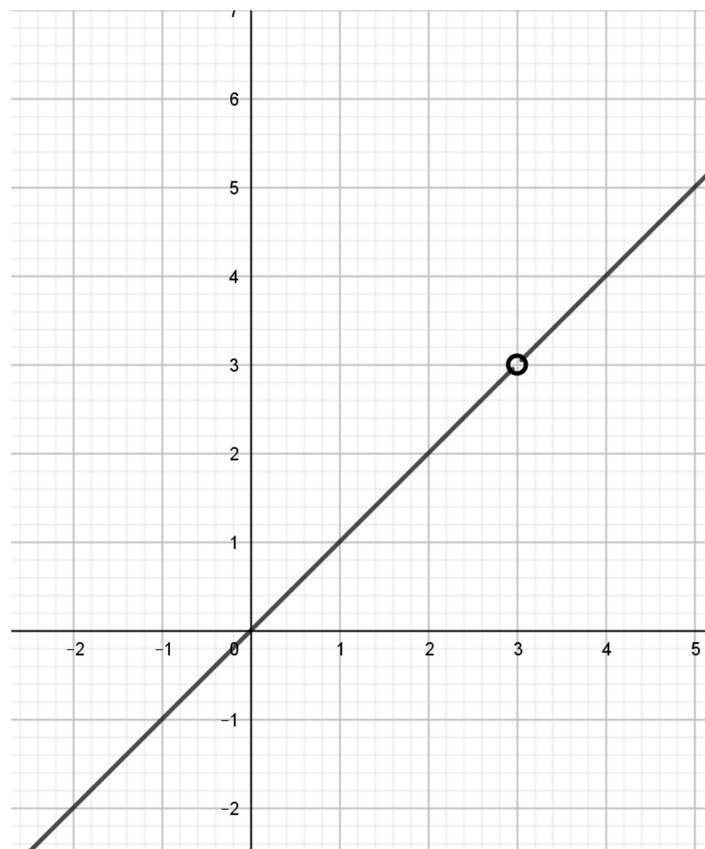
$$x \neq 3.$$

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$\beta) \text{ Έχουμε: } f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x(x - 3)}{(x - 3)} = x, \text{ για κάθε } x \in A.$$

γ) Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι διχοτόμος της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας.

Από την ευθεία θα εξαιρεθεί το σημείο $(3, 3)$, διότι $3 \notin A$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , για $x > 0$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

$$2|x| - 6 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$2|x| \neq 6 \Leftrightarrow$$

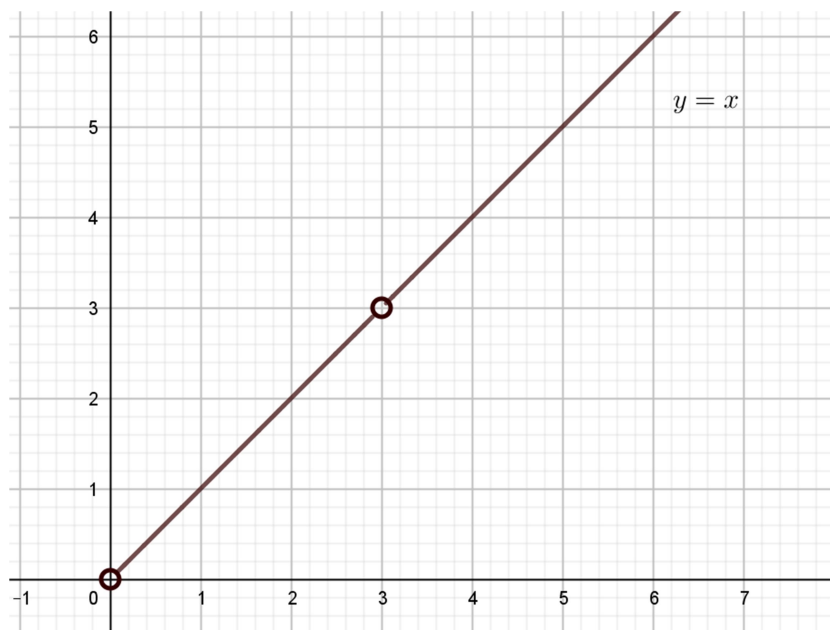
$$|x| \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$x \neq \pm 3.$$

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$\beta) \text{ Έχουμε: } f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6} = \frac{2|x|^2 - 6|x|}{2|x| - 6} = \frac{2|x|(|x| - 3)}{2(|x| - 3)} = |x|, \text{ για κάθε } x \in A.$$

γ) Η συνάρτηση f για $x > 0$ έχει τύπο $f(x) = x$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων (όμως το $(0,0)$ θα εξαιρεθεί από τη γραφική παράσταση, αφού $x > 0$). Από την ευθεία θα εξαιρεθεί επίσης το σημείο $(3,3)$, διότι $3 \notin A$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$, οπότε ο αριθμός -1 είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

β) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης ισούται με $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-2}{1} = -2$ και η μια ρίζα της είναι $x_1 = -1$. Άρα για την δεύτερη ρίζα της εξίσωσης έχουμε:

$$x_1 \cdot x_2 = -2 \Leftrightarrow$$

$$-1 \cdot x_2 = -2 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = 2.$$

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ είναι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1).$$

Η παράσταση γίνεται:

$$A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{x - 2}{x}.$$

ΘΕΜΑ 3

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0 .$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους ισχύει:

$$x^2 - x \neq 0 \text{ και } 1 - x \neq 0, \text{ δηλαδή}$$

$$x(x-1) \neq 0 \text{ και } x \neq 1, \text{ τελικά}$$

$$x \neq 0 \text{ και } x \neq 1.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2 - 1}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 1 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

Η εξίσωση $2x^2 - x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$ και ρίζες τις

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = 1, \text{ που δεν είναι δεκτή, αφού } x \neq 1.$$

Άρα η εξίσωση έχει μία λύση την $x = -\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης παραγοντοποιούμε το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 3$ είναι: $\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) = 16$

και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ και } x_2 = -1.$$

Άρα: $x^2 - 2x - 3 = (x + 1) \cdot (x - 3)$.

Επομένως έχουμε: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 3)}{x + 1} = x - 3$.

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f από το σημείο $A(1, -4)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης. Δηλαδή θα πρέπει $f(1) = -4$.

Είναι $f(1) = -2 \neq -4$. Άρα το σημείο $A(1, -4)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς προκύπτει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης σειράς προσθέτοντας πάντα σταθερά τέσσερα καθίσματα.

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 4$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_7 = \alpha_1 + (7 - 1) \cdot \omega \Leftrightarrow 36 = \alpha_1 + 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12.$$

γ) Αφού το γήπεδο έχει δέκα σειρές, τότε το πλήθος των καθισμάτων συνολικά δίνεται από τον τύπο:

$$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot 12 + (10 - 1) \cdot 4] = 5 \cdot (24 + 36) = 5 \cdot 60 = 300.$$

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|2x| < 2, \text{ οπότε}$$

$2|x| < 2$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2 και έχουμε

$$|x| < 1 \text{ και τελικά}$$

$$-1 < x < 1$$

β) Η ανίσωση

$x^2 < 1$ ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει η

$\sqrt{x^2} < 1$, που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η

$|x| < 1$, που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει

$-1 < x < 1$, δηλαδή $x \in (-1, 1)$, που ισχύει.

Άρα για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

ΘΕΜΑ 3

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $0 < x < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς $1, x, x^2$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|2x-1| < 1, \text{ οπότε}$$

$-1 < 2x-1 < 1$, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 1 και έχουμε

$0 < 2x < 2$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2 και τελικά

$$0 < x < 1$$

β) Από το α) ερώτημα, έχουμε $0 < x < 1$, οπότε και $0 < x^2 < 1$. Πρέπει να βρούμε τη σχέση του x με τον x^2 . Θα πάρουμε τη διαφορά τους $x^2 - x$ και θα βρούμε το πρόσημό της. Το τριώνυμο $x^2 - x = x(x-1)$ έχει ρίζες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. Δεδομένου ότι $0 < x < 1$, μας ενδιαφέρει το πρόσημο του τριωνύμου στο διάστημα εντός των ριζών του. Στο διάστημα αυτό το τριώνυμο είναι αρνητικό. Δηλαδή $x^2 - x < 0$ για $x \in (0,1)$. Οπότε $x^2 < x$.

Τελικά, $x^2 < x < 1$.

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της $0 < x < 1$ με $x > 0$, οπότε προκύπτει:

$$0 < x^2 < x \text{ και τελικά } x^2 < x < 1.$$

ΘΕΜΑ 3

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 &\stackrel{\cdot \alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow} \\ 0 < \alpha^3 < \alpha^2 &\quad (1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 &\stackrel{\cdot \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \\ 0 < \alpha^2 < \alpha &\quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha$.

β) Από το δεδομένο και το α) ερώτημα έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha < 1$. Επιπλέον επειδή ο α είναι θετικός αριθμός, ομόσημος του 1 δηλαδή, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \alpha < 1 &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{\alpha} &> 1. \end{aligned}$$

Τελικά $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(-1) = 2(-1) - 5 = -7,$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \text{ και}$$

$$f(5) = 5^2 = 25.$$

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0) = 0$.

Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5 \neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Για τον $y'y$ άξονα είναι $x = 0$ και $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$, οπότε το σημείο τομής με τον $y'y$ άξονα είναι το $(0, -5)$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι σε μορφή διαστήματος το εξής:

$$A = [-\infty, 10) .$$

β) Έχουμε:

$$f(-1) = 2(-1) - 5 = -7 ,$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \text{ και}$$

$$f(5) = 5^2 = 25 .$$

γ) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0) = 0$.

Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5 \neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Έχουμε δυο περιπτώσεις:

- $y = f(x) = 21 \Leftrightarrow 2x - 5 = 21 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13 \notin (-\infty, 3]$
- $y = f(x) = 21 \Leftrightarrow x^2 = 21 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{21}$. Από τις δυο αυτές τιμές του x δεκτή είναι η $\sqrt{21}$ διότι $\sqrt{21} \in (3, 10)$.

Κατά συνέπεια το ζητούμενο σημείο είναι $(\sqrt{21}, 21)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι στην μορφή $ax^2 + bx + c = 0$ με

$$a = 1, b = -2\lambda, c = \lambda^2 - 1 \text{ και}$$

$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4 > 0$, άρα η διακρίνουσα Δ είναι πάντα θετική, ανεξάρτητα από την οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ .

β) 1^{ος} τρόπος:

$$\rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\lambda) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2\lambda \pm 2}{2} = \frac{2(\lambda \pm 1)}{2} = \lambda \pm 1. \text{ Όστε } \rho_1 = \lambda - 1, \rho_2 = \lambda + 1$$

2^{ος} τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $(x - \lambda)^2 - 1^2 = 0$ και ισοδύναμα έχουμε

$$(x - \lambda - 1)(x - \lambda + 1) = 0 \text{ άρα}$$

$$x - \lambda - 1 = 0 \text{ ή } x - \lambda + 1 = 0. \text{ Όστε } x = \lambda + 1 \text{ ή } x = \lambda - 1$$

Έτσι $\rho_1 = \lambda - 1, \rho_2 = \lambda + 1$ αφού $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Πρέπει $|\rho_2 - (-\rho_1)| \geq 8 \Leftrightarrow |\rho_1 + \rho_2| \geq 8$. Αν έχουμε βρει τις ρίζες τότε $\rho_1 + \rho_2 = 2\lambda$.

$$\text{Χωρίς να βρούμε τις ρίζες, από τύπους Vieta, } \rho_1 + \rho_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2\lambda)}{1} = 2\lambda.$$

$$\text{Άρα, πρέπει } |2\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow 2|\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 2 \Leftrightarrow \lambda \leq -2 \text{ ή } \lambda \geq 2.$$

δ) Έστω το τριώνυμο $f(x) = 1 \cdot x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1$ τις ρίζες του οποίου έχουμε βρει στο β) ερώτημα.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1 = f(k) < 0$, σχέση που προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα προσήμου του $f(x)$

x	$-\infty$	ρ_1	k	ρ_2	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+	

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω για την οποία πρόοδο ισχύει η σχέση $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 40$, ενώ ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 4n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

γ) Να βρείτε τον μικρότερο δυνατό όρο της προόδου, ο οποίος είναι μεγαλύτερος του αριθμού 1589.

δ) Έστω n τυχαίος θετικός ακέραιος και $k = n(n + 1)$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός α_k είναι τετράγωνο θετικού ακέραιου.

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα σχέση γράφεται $\alpha_1 + 19\omega - (\alpha_1 + 9\omega) = 40$, οπότε $\alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 9\omega = 40$.

Έστω $10\omega = 40$, άρα $\omega = 4$.

β) Γνωρίζουμε ότι $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega = 5 + (n - 1)4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1, n \in \mathbb{N}^*$.

γ) Ζητάμε την ελάχιστη τιμή του θετικού ακέραιου αριθμού m , ώστε $\alpha_m > 1589$. Πρέπει λοιπόν $4m + 1 > 1589$, δηλαδή $4m > 1588$, άρα $m > 397$. Έστω ο ζητούμενος όρος είναι ο όρος $\alpha_{398} = 4 \cdot 398 + 1 = 1593$.

δ) Αν n τυχαίος θετικός ακέραιος, τότε $k = n(n + 1)$. Άρα $\alpha_k = 4k + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση (I) γράφεται $|x - 7| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 7 < 1 \Leftrightarrow 7 - 1 < x < 7 + 1$.

Ώστε $6 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (6, 8)$.

β) Είναι $k \in (6, 8) \Leftrightarrow 6 < k < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{k} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{24}{6} > \frac{24}{k} > \frac{24}{8} \Leftrightarrow 4 > \frac{24}{k} > 3$.

Άρα $3 < \frac{24}{k} < 4 \Leftrightarrow \frac{24}{k} \in (3, 4)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(4)=3$.

Με $x=4$ έχουμε: $f(4)=\frac{4^2-4}{4}=\frac{16-4}{4}=\frac{12}{4}=3$, οπότε η C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$

β) Ισχύει:

$$f(-4)=\frac{(-4)^2-4}{-4}=\frac{16-4}{-4}=-\frac{12}{4}=-3$$

οπότε και το σημείο $B(-4, -3)$ είναι πάνω στην C_f .

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=3$.

Με $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x)=3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-4=3x \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 4 . Επιπλέον, $f(-1)=3$ και $f(4)=3$, οπότε τα αντίστοιχα σημεία της C_f έχουν τεταγμένη $y=3$.

Επομένως, τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία είναι το $A(4, 3)$ και το $\Gamma(-1, 3)$.

ΘΕΜΑ 4

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$.

(Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50 . Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

(Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αν το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι x , τότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι $100 - x$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ο φοιτητής θα πάρει x βαθμούς για τις σωστές απαντήσεις και θα του αφαιρεθούν (αρνητική βαθμολογία) $\frac{1}{3}(100 - x)$ βαθμοί για τις λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι, η τελική βαθμολογία του θα είναι

$$E(x) = x - \frac{1}{3}(100 - x) = \frac{3x - (100 - x)}{3} = \frac{4x - 100}{3} = \frac{4}{3}(x - 25)$$

όπου x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

β) Είναι:

$$E(x) = 88 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x - 25) = 88 \Leftrightarrow \frac{x - 25}{3} = 22 \Leftrightarrow x - 25 = 66 \Leftrightarrow x = 91$$

Άρα ο φοιτητής που βαθμολογήθηκε με 88, απάντησε σωστά σε 91 ερωτήσεις και λανθασμένα σε 9 ερωτήσεις.

γ) Έστω ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή που απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις είναι ίση με 50.

Τότε έχουμε:

$$E(x) = 50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x - 25) = 50 \Leftrightarrow 4x - 100 = 150 \Leftrightarrow 4x = 250 \Leftrightarrow x = \frac{125}{2}$$

που είναι άτοπο, αφού ο αριθμός x που παριστάνει το πλήθος των σωστών απαντήσεων, είναι ακέραιος. Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50.

Ένας φοιτητής θα πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση, μόνο όταν $E(x) > 50$. Είναι:

$$E(x) > 50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x - 25) > 50 \Leftrightarrow 4x - 100 > 150 \Leftrightarrow 4x > 250 \Leftrightarrow x > \frac{125}{2} = 62,5$$

Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή είναι μεγαλύτερη του 50 μόνο όταν απαντήσει σωστά σε 63 τουλάχιστον ερωτήσεις.

δ) Έστω ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E(x_1) + E(x_2) &= 140 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x_1 - 25) + \frac{4}{3}(x_2 - 25) = 140 \Leftrightarrow 4x_1 - 100 + 4x_2 - 100 = 420 \\ &\Leftrightarrow 4(x_1 + x_2) = 620 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 155 \end{aligned}$$

Επομένως οι δυο φοιτητές απάντησαν σωστά σε 155 από τις 200 ερωτήσεις τους και λανθασμένα στις υπόλοιπες $200 - 155 = 45$ ερωτήσεις.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda^2 - 1$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία ε έχουν κοινά σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία ε έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , τότε:

- i. να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$,
- ii. να δείξετε ότι το κοινό σημείο είναι το $A(1, -1)$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda \neq 0$, να δείξετε ότι τα σημεία τομής της ευθείας ε και της γραφικής παράστασης της f είναι τα $B(1 - |\lambda|, \lambda^2 - 1)$ και $\Gamma(1 + |\lambda|, \lambda^2 - 1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων B , A και Γ είναι όροι αριθμητικής προόδου για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 - 2x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \\x^2 + 2x - \lambda^2 + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-\lambda^2 + 1) = 4 + 4\lambda^2 - 4 = 4\lambda^2 \geq 0.$$

Άρα, η εξίσωση έχει λύση για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β)

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία ε έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο αν και μόνο αν η εξίσωση $x^2 + 2x - \lambda^2 + 1 = 0$ να έχει μοναδική λύση. Άρα πρέπει: $\Delta = 0$ δηλαδή $4\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

ii. Για $\lambda = 0$ έχουμε:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Και $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$. Άρα το κοινό σημείο είναι το $A(1, -1)$.

γ) Για $\lambda \neq 0$ η διακρίνουσα Δ είναι διάφορη του μηδενός και η εξίσωση $f(x) = y$ ή ισοδύναμα $x^2 + 2x - \lambda^2 + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις, τις:

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{4\lambda^2}}{2} = \frac{2 + 2|\lambda|}{2} = 1 + |\lambda|$$

και

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{4\lambda^2}}{2} = \frac{2 - 2|\lambda|}{2} = 1 - |\lambda|$$

Επίσης, οι τεταγμένες των κοινών σημείων είναι $y_1 = y_2 = 1 - \lambda^2$ καθώς είναι σημεία της ευθείας $\varepsilon: y = 1 - \lambda^2$. Άρα, τα κοινά σημεία είναι τα $B(1 - |\lambda|, \lambda^2 - 1)$ και $\Gamma(1 + |\lambda|, \lambda^2 - 1)$.

δ) Οι τετμημένες των σημείων B, A και Γ είναι $1 - |\lambda|, 1$ και $1 + |\lambda|$ αντίστοιχα. Έχουμε ότι:

$$1 - (1 - |\lambda|) = |\lambda| \text{ και } (1 + |\lambda|) - 1 = |\lambda|.$$

Άρα, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = |\lambda|$.

ΘΕΜΑ 2

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε .

(Μονάδες 7)

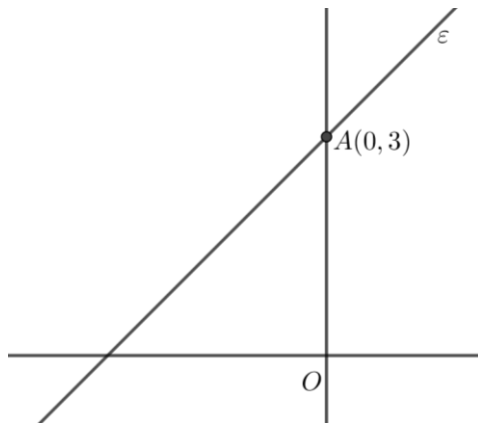
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$)

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\alpha = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Από το ερώτημα α) γνωρίζουμε ότι $\alpha = 1$. Άρα, ε : $y = x + \beta$. Επίσης, η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,3)$ οπότε, $\beta = 3$. Άρα, η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = x + 3$.

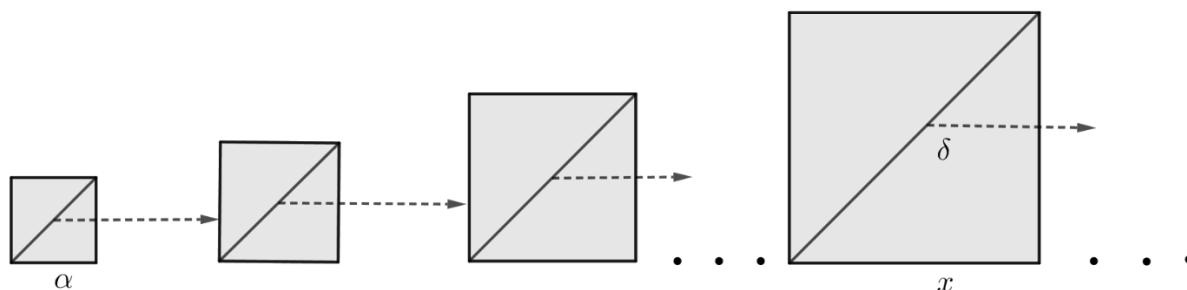
γ) Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο για το οποίο

$$y = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(-3,0)$.

ΘΕΜΑ 4

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α)

- i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

(Μονάδες 4)

- ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = \alpha^2 2^{n-1}$.

(Μονάδες 7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ. μ., να βρείτε:

- i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

(Μονάδες 8)

- ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ. μ.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α)

- i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι για τη διαγώνιο δ ενός τετραγώνου πλευράς x ισχύει:

$$\delta^2 = x^2 + x^2, \text{ δηλαδή}$$

$$\delta^2 = 2x^2, \text{ άρα}$$

$$\sqrt{\delta^2} = \sqrt{2x^2} \text{ και επειδή } \delta, x > 0 \text{ προκύπτει ότι:}$$

$$\delta = \sqrt{2}x.$$

- ii. Από το ερώτημα α)i) προκύπτει ότι αν ένα από τα τετράγωνα της ακολουθίας έχει πλευρά x το επόμενο του έχει πλευρά $\sqrt{2}x$ και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι x^2 και $(\sqrt{2}x)^2 = 2x^2$. Άρα, ο λόγος λ των εμβαδών δύο διαδοχικών τετραγώνων δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

και είναι σταθερός. Οπότε, τα εμβαδά των τετραγώνων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha^2$.

Ο γενικός όρος της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} = \alpha^2 2^{n-1}$.

β) Ισχύει ότι

$$\alpha_4 = 8, \text{ άρα}$$

$$\alpha^2 2^{4-1} = 8, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha^2 \cdot 8 = 8, \text{ οπότε}$$

$$\alpha^2 = 1$$

και επειδή $\alpha > 0$ έχουμε ότι $\alpha = 1$.

γ) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τη σχέση:

$$S_n = \alpha_1 \frac{(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Για να είναι το συνολικό εμβαδών των αρχικών τετραγώνων ίσο με 255 τ.μ πρέπει να ισχύει:

$$S_n = 255 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$2^n - 1 = 255, \text{ δηλαδή}$$

$$2^n = 256.$$

Αλλά $256 = 2^8$. Άρα, $2^v = 2^8$, οπότε $v = 8$. Άρα το πλήθος των τετραγώνων που έχουν συνολικό εμβαδόν 255τ.μ. είναι 8.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β)

- i. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$.
- ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για $x \geq -1$ είναι $x + 1 \geq 0$, οπότε $|x + 1| + 2 = x + 1 + 2 = x + 3$.

Για $x < -1$ είναι $x + 1 < 0$, οπότε $|x + 1| + 2 = -(x + 1) + 2 = -x - 1 + 2 = 1 - x$.

Άρα, τελικά $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

β)

i. Είναι $|x - 2| = 4 \Leftrightarrow \{x - 2 = 4 \text{ ή } x - 2 = -4\} \Leftrightarrow \{x = 6 \text{ ή } x = -2\}$.

ii. Για $x = 6 > -1$ είναι $K = 6 + 3 = 9$.

Για $x = -2 < -1$ είναι $K = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

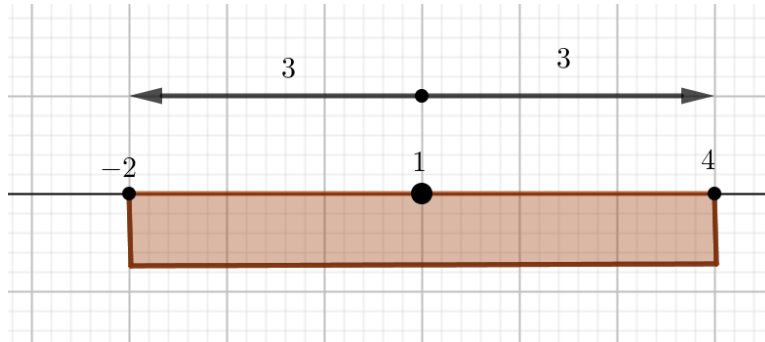
(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|x-1| &\leq 3 \Leftrightarrow \\ -3 &\leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow \\ -2 &\leq x \leq 4.\end{aligned}$$

β) Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών απεικονίζεται ως εξής:



Στον άξονα των πραγματικών αριθμών βλέπουμε τους πραγματικούς αριθμούς x , οι οποίοι απέχουν από το 1 απόσταση μικρότερη ή ίση του 3.

γ) Οι ακέραιοι που ικανοποιούν την ανίσωση (1) είναι οι: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ και 4

δ) Θέτουμε $|x| = \omega$ και η ανίσωση γίνεται $|\omega-1| \leq 3$. Από το γ) ερώτημα γνωρίζουμε ότι την επαληθεύουν οι ακέραιοι $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ και 4 . Δεδομένου ότι $\omega = |x| \geq 0$, δεκτοί είναι οι ακέραιοι: $0, 1, 2, 3$ και 4 . Συνεπώς:

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3 \text{ και}$$

$$|x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0 .$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από τους τύπους για το άθροισμα και γινόμενο των ριζών εξίσωσης 2^{ου} βαθμού έχουμε :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(\lambda + \frac{1}{\lambda})}{1} = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

Αφού $P = x_1 \cdot x_2 = 16 > 0$ και $S = x_1 + x_2 = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) > 0$ για κάθε $\lambda > 0$, οι ρίζες x_1, x_2 είναι

θετικές και άρα μπορούν να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου.

i. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) = 8(\lambda + \frac{1}{\lambda})$$

ii. Το εμβαδόν είναι: $E = x_1 \cdot x_2 = 16$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\Pi \geq 16 \Leftrightarrow$$

$$8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} \geq 0, \text{ που ισχύει για κάθε } \lambda > 0.$$

γ) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η περίμετρος είναι 16 (δηλαδή $2(x_1 + x_2) = 16$ και τελικά $x_1 + x_2 = 8$) και το εμβαδόν είναι 16 (δηλαδή $x_1 \cdot x_2 = 16$), οπότε $x_1 = x_2 = 4$. Επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}x^2 &> x \Leftrightarrow \\x^2 - x &> 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Το τριώνυμο $x^2 - x = x(x-1)$ έχει ρίζες τις: $x=0, x=1$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	○	-	+

Επομένως η (1) αληθεύει για $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

β) i. Από τα δεδομένα και το α) ερώτημα έχουμε: $0 < 1 < \overset{\alpha) \text{ ερώτ.}}{\alpha} < \alpha^2$ και

$1 < \alpha$, οπότε $\sqrt{1} < \sqrt{\alpha}$, δηλαδή

$$\sqrt{\alpha} > 1.$$

$$\text{Επίσης: } \alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha^2} \overset{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \alpha.$$

$$\text{Οπότε τελικά: } 0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2.$$

ii. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\alpha &< \alpha^2 \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha}{2} &< \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} &< \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \\ \alpha &< \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}\end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}\alpha &< \alpha^2 \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha}{2} &< \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} &< \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} &< \alpha^2\end{aligned}$$

$$\text{Οπότε τελικά: } \alpha < \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} < \alpha^2.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

(Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόστασή του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$ δηλαδή $x \in [-2, 4]$.

β) Οι ακέραιες λύσεις στο διάστημα $[-2, 4]$ είναι οι : -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με ρίζες -2 και 4 του οποίου το πρόσημο να είναι ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Το άθροισμα των ριζών είναι $S = -2 + 4 = 2$, το γινόμενο των ριζών είναι $P = -2 \cdot 4 = -8$, οπότε ένα τριώνυμο είναι το $x^2 - S \cdot x + P = x^2 - 2 \cdot x - 8$ και αφού θέλουμε το πρόσημο του να είναι ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, δηλαδή αρνητικό, έχουμε τελικά ότι η ζητούμενη ανίσωση είναι η $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

δ) Έστω λοιπόν ένας αριθμός x του οποίου το τετράγωνο ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, δηλαδή $x^2 - 8 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0$. Τότε όπως δείξαμε στο γ) ερώτημα για αυτόν τον αριθμό x θα ισχύει ισοδύναμα ότι $|x-1| \leq 3$, δηλαδή η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0 .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι .

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$ και διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 > 0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσημών συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο είναι θετικό για $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ και αρνητικό για $x \in (1, 2)$.

β)

i. Δεδομένου ότι $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: $(\alpha^2 - 3\alpha + 2) < 0$ και $(\beta^2 - 3\beta + 2) > 0$,

Από το α) ερώτημα $\alpha \in (1, 2)$ και $\beta \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, δηλαδή $\alpha > 1$ και αφού $\alpha < \beta$

θα είναι $\beta > 2$, συνεπώς $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι θετικοί, άρα ομόσημοι.

2^η περίπτωση: $(\alpha^2 - 3\alpha + 2) > 0$ και $(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$,

Από το α) ερώτημα $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ και $\beta \in (1, 2)$ δηλαδή $\beta < 2$ και αφού $\alpha < \beta$

Θα είναι $\alpha < 1$, συνεπώς $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι αρνητικοί άρα ομόσημοι.

ii. Αφού $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι, έχουμε ότι $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$, οπότε:

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2).$$

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

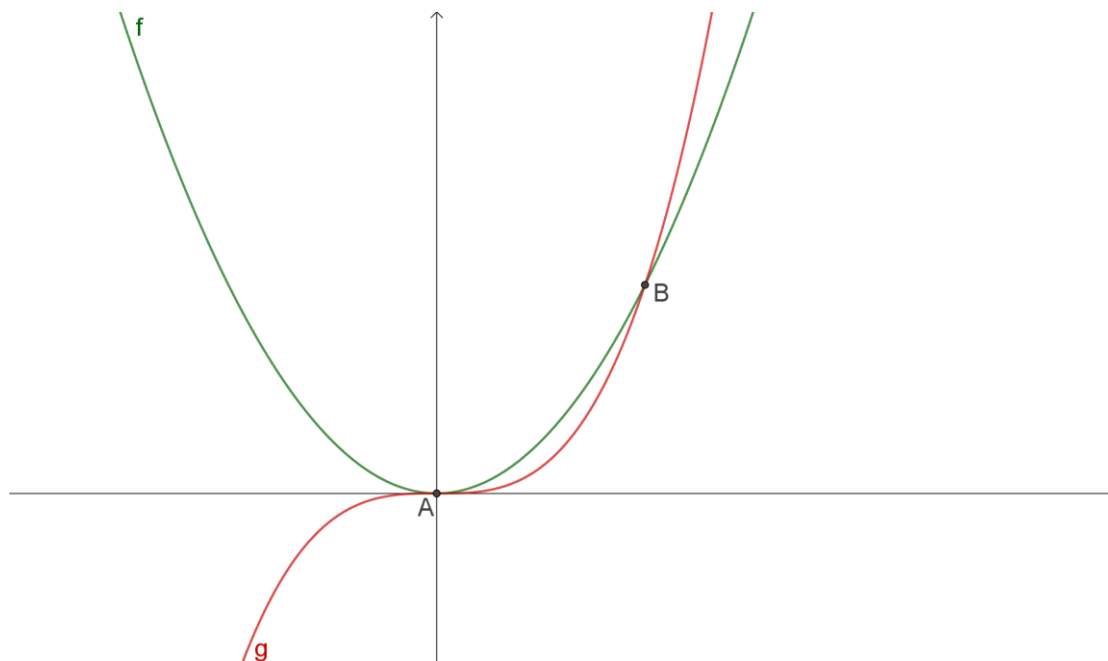
$$\begin{aligned} \alpha_6 &= 41 + (6 - 1)\omega \Leftrightarrow 41 + 5\omega = 26 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \omega = -3. \end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_v &= v \Leftrightarrow \alpha_1 + (v - 1)\omega = v \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 41 + (v - 1)(-3) = v \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 41 - 3v + 3 = v \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 44 = 4v \Leftrightarrow v = 11. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

(Μονάδες 8)

Έστω $A(0,0), B(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι

i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$.

(Μονάδες 3)

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$.

(Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ ισοδύναμα $x^2 = x^3$, δηλαδή $x^2 - x^3 = 0$, οπότε $x^2(1 - x) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 1$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$ οπότε $A(0, 0)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε $B(1, 1)$.

β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$, δηλαδή για τις τετμημένες των σημείων μεταξύ των A και B , η γραφική παράσταση της g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f , πράγμα που σημαίνει ότι $x^3 < x^2$.

Εναλλακτικά για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $x^2 > 0$ και $0 < x < 1$ οπότε $x \cdot x^2 < 1 \cdot x^2$ δηλαδή $x^3 < x^2$.

γ) Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $x^3 < x^2$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ αφού

ισοδύναμα $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$. Συνεπώς δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του.

δ)

i. Αφού $3 < \pi < 4$ είναι $3 - 3 < \pi - 3 < 4 - 3$ δηλαδή $0 < \pi - 3 < 1$ οπότε με βάση το

β) ερώτημα είναι $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$.

ii. Είναι

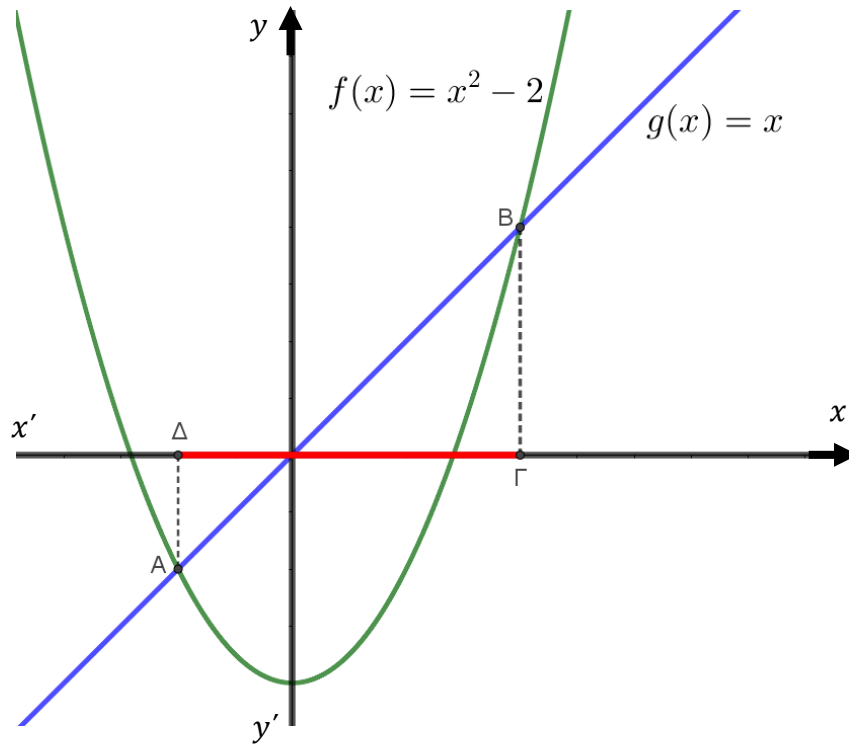
$$(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\pi^3 - 9\pi^2 + 27\pi - 27 < \pi^2 - 6\pi + 9 \Leftrightarrow$$

$$\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$$

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = x$.



α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(-1, -1)$ και $B(2, 2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία Α και Β, άρα οι τετμημένες των σημείων Α και Β θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ δηλαδή της εξίσωσης $x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, η διακρίνουσα της οποίας είναι

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9, \text{ άρα } x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}. \text{ Όστε } x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

Τότε $f(2) = g(2) = 2$ και $f(-1) = g(-1) = -1$.

β) Για το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχουμε βρει ότι οι ρίζες του είναι οι αριθμοί $x = 2$ ή $x = -1$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	-	+	

Άρα οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι $-1 < x < 2$.

Σημείωση: Η ανίσωση μπορεί να λυθεί και γεωμετρικά με βάση το α) ερώτημα.

γ) Έχουμε $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0 \Leftrightarrow |\omega|^2 - |\omega| - 2 < 0$ η οποία γράφεται στη μορφή $x^2 - x - 2 < 0$, αν θέσουμε $|\omega| = x$.

Με βάση το α) ερώτημα παίρνουμε $-1 < |\omega| < 2$.

Αλλά η σχέση $-1 < |\omega|$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Έτσι, πρέπει να ισχύει $|\omega| < 2$, η οποία γράφεται $-2 < \omega < 2$.

Όστε οι λύσεις της ανίσωσης $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$ είναι οι αριθμοί $\omega \in (-2, 2)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $3 > 0$, είναι: $f(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Αφού $-3 < 0$, είναι $f(-3) = (-3)^2 - 1 = 8$.

β) Για $x < 0$ είναι $f(x) = x^2 - 1$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Δεκτή τιμή $x = -3 < 0$.

Για $x > 0$ είναι $f(x) = 2x + 2$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x + 2 = 8 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Δεκτή τιμή αφού $x = 3 > 0$.

Επομένως η $f(x) = 8$ ισχύει για $x = -3$ και $x = 3$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = (\sqrt{3})^6 = ((\sqrt{3})^2)^3 = 3^3 = 27$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6 = ((\sqrt[3]{3})^3)^2 = 3^2 = 9$.

Άρα: $A - B = 27 - 9 = 18$.

β) Αφού οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ είναι θετικοί θα έχουν την ίδια διάταξη και όταν υψωθούν εις την έκτη. Από το ερώτημα α) $(\sqrt{3})^6 = A = 27$ και $(\sqrt[3]{3})^6 = B = 9$.

Άρα: $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 4

Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

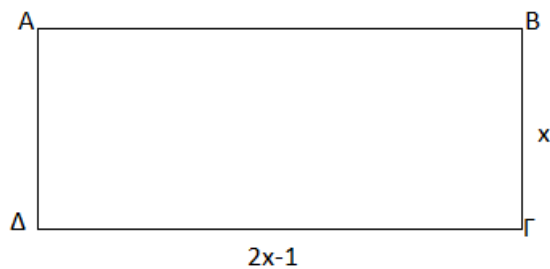
(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μακέτα του πάρκου



α) Για τη περίμετρο της μακέτας έχουμε:

$$\Pi(x) = 2x + 2(2x - 1) = 6x - 2, \text{ με } x > \frac{1}{2}$$

Και για το εμβαδόν της:

$$E(x) = x(2x - 1) = 2x^2 - x \text{ με } x > \frac{1}{2}.$$

β) Στη περιφραξη του πάρκου εμπλέκεται η περίμετρος που δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x) = 6x - 2. \text{ Αρκεί } \Pi(x) \leq 8 \text{ ή } 6x - 2 \leq 8 \Leftrightarrow 6x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}.$$

$$\text{και για το } 2x-1 \text{ προκύπτει } 2 \cdot x \leq 2 \cdot \frac{5}{3} \Leftrightarrow -1 < 2x - 1 \leq \frac{10}{3} - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq \frac{7}{3}.$$

Επειδή οι διαστάσεις παίρνουν μόνο θετικές τιμές με $x > \frac{1}{2}$, οι τιμές τους κυμαίνονται :

$$\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{3} \text{ και } 0 < 2x - 1 \leq \frac{7}{3}.$$

γ) Το εμβαδόν της μακέτας δίνεται από τον τύπο $E(x) = 2x^2 - x$.

Αρκεί $E(x) \leq 1$ ή $2x^2 - x \leq 1$ τότε $2x^2 - x - 1 \leq 0$ (1).

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης (1) μηδενίζεται για $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{1}{2}$ και επειδή το $a=2 > 0$ προκύπτει:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x^2 - x - 1$	+	0	-	0	+

Σύμφωνα με τον πίνακα πρόσημών το τριώνυμο θα είναι ετερόσημο του α, δηλαδή αρνητικό για $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

Επειδή $x > \frac{1}{2}$ τότε $x \in (\frac{1}{2}, 1]$.

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \leq x \leq 3$ και βρίσκουμε:

$$2 + 1 \leq x + y \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 3 \leq x + y \leq 5.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $2 \leq x \leq 3$ με 2 και βρίσκουμε: $4 \leq 2x \leq 6$. (1)

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \leq y \leq 2$ με -3 και βρίσκουμε:

$$-3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3 \quad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2 \leq 2x - 3y \leq 3.$$

γ) Ισχύει ότι: $2 \leq x \leq 3$ (3) και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$. (4)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$\frac{2}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $-1 < 0$, άρα: $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$.

Είναι: $1 > 0$, άρα: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

β) Αφού $x \geq 0$ τότε: $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$.

Επομένως: $x \leq -1$ ή $x \geq 1$ και $x \geq 0$.

Άρα $x \geq 1$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

(Μονάδες 7)

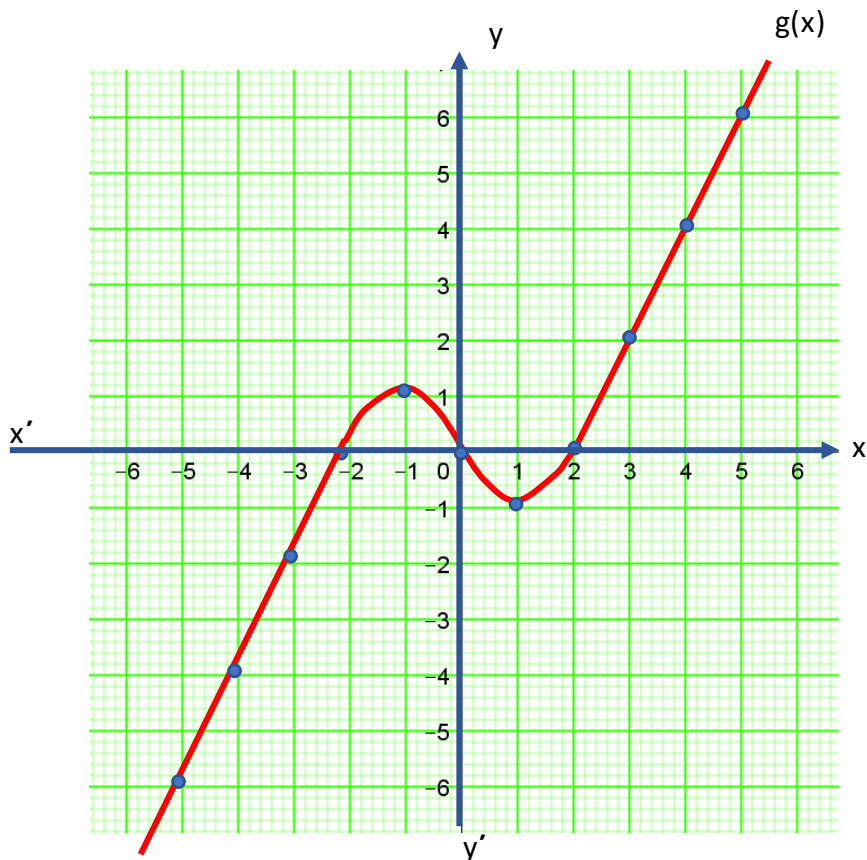
γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k .

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως μηδέν. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για

$$x \in [-3, -2] \cup [0, 2].$$

β) Καθώς $|g(x)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq g(x) \leq 2$, ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως 2 . Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3, 3]$.

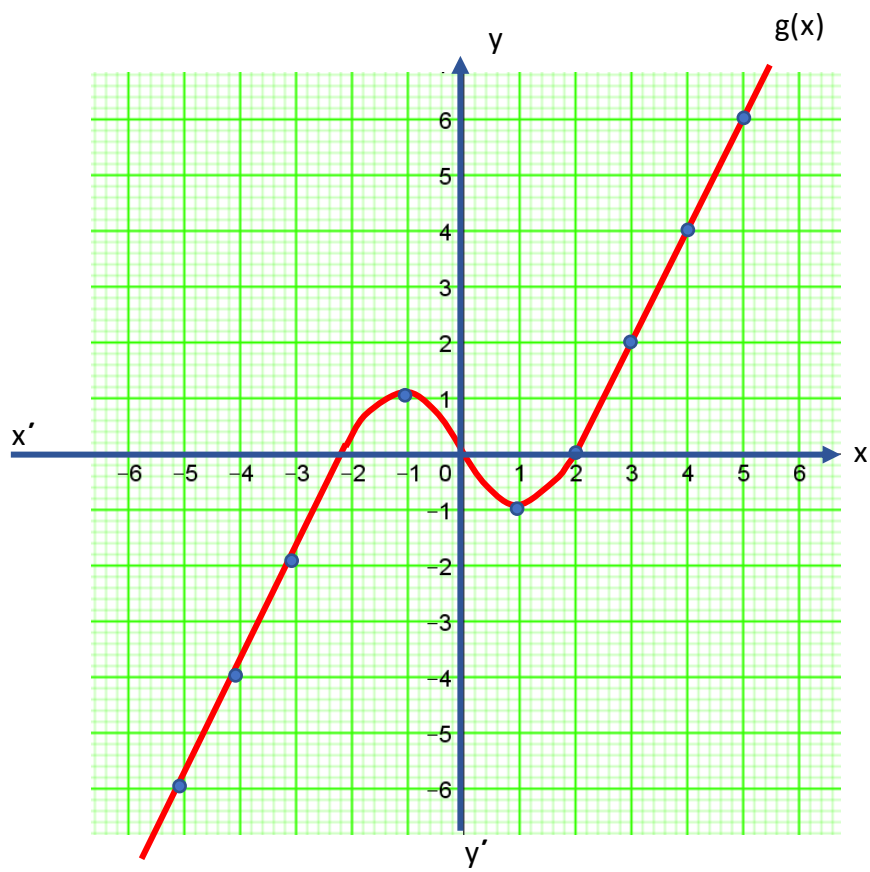
γ)

i. Ελέγχουμε πόσα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τεταγμένη $\frac{4}{5}$ και διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι 3. Βοηθητικά, σχεδιάζουμε την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{4}{5}$, της οποίας όλα τα σημεία έχουν τεταγμένη $\frac{4}{5}$ (αυτή η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) και παρατηρούμε ότι έχει 3 κοινά σημεία με την γραφική παράσταση.

Ανάλογα, η εξίσωση $g(x) = -1$ έχει 2 λύσεις.

ii. Το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k , ταυτίζεται με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y = k$ (παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) με την γραφική παράσταση. Αποτυπώνουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές του k	Πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$
$k < -1$ ή $k > 1$	1
$k = -1$ ή $k = 1$	2
$-1 < k < 1$	3



ΘΕΜΑ 3

α)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x-|x|}$.

(Μονάδες 9)

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A , να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x-|x|} = \frac{3}{2}x + 2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η παράσταση ορίζεται όταν $x - |x| \neq 0$, δηλαδή όταν $|x| \neq x$ και τελικά όταν $x < 0$.

$$\text{ii. } A = \frac{x}{x - |x|} = \frac{x}{x - (-x)} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

β) Για $x < 0$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{x^3}{x - |x|} = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{x - |x|} \cdot x^2 = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow$$

$$A \cdot x^2 = \frac{3}{2}x + 2 \stackrel{\alpha)ii}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1, x = 4.$$

Δεκτή είναι η λύση $x = -1$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' , yy' .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει : $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει ρίζες τις $x_1 = 2, x_2 = 3$ αφού $2+3=5$ και $2 \cdot 3 = 6$ και το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	○	○	+

Συνεπώς $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ ή $x \geq 3$.

Τελικά $A = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$.

β) Το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν $f(1) = -\sqrt{2}$.

Είναι

$$f(1) = \frac{\sqrt{1^2 - 5 \cdot 1 + 6}}{1 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

οπότε το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \frac{\sqrt{0^2 - 5 \cdot 0 + 6}}{0 - 2} = \frac{\sqrt{6}}{-2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον yy' στο σημείο $(0, -\frac{\sqrt{6}}{2})$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

Η λύση $x = 2$ απορρίπτεται, αφού $2 \notin A$, ενώ η $x = 3$, είναι δεκτή, αφού $3 \in A$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον xx' στο σημείο $(3, 0)$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

(Μονάδες 5)

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση A χωρίς τις απόλυτες τιμές.

$$A = |2x - 3| - |4 - 3x|$$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Από την (1) έχουμε ισοδύναμα :

$$2|x| - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2|x| \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι : $d(x, -3) \leq 4$.

Είναι: $d(x, -3) = |x+3| \leq |x| + 3 \leq 1 + 3 = 4$, δηλαδή $d(x, -3) \leq 4$.

Εναλλακτικά, αξιοποιώντας το α ερώτημα, έχουμε :

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x+3 \leq 4, \text{ οπότε}$$

$$|x+3| \leq 4 \Leftrightarrow d(x, -3) \leq 4.$$

γ) Είναι:

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq 2x-3 \leq -1 < 0, \text{ οπότε}$$

$$|2x-3| = -2x+3.$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq -3x \geq -3 \Leftrightarrow 7 \geq 4-3x \geq 1 > 0, \text{ οπότε}$$

$$|4-3x| = 4-3x.$$

$$\text{Τελικά: } A = |2x-3| - |4-3x| = -2x+3 - (4-3x) = -2x+3-4+3x = x-1.$$

ΘΕΜΑ 3

α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g , όπου $g(x) = 6x$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x+1)^2 + 3 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εναλλακτικά, το τριώνυμο $x^2 + 2x + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -12 < 0$, οπότε είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ομόσημο του $a = 1 > 0$, δηλαδή $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \neq 2$, οπότε $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

γ) Είναι: $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right| = \left| \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \right| = |x^2 + 2x + 4| = x^2 + 2x + 4$, αφού δείξαμε στο α)

ερώτημα ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$.

δ) Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f, g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ με $x \neq 2$.

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 6x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Η λύση $x = 2$ που βρήκαμε απορρίπτεται οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Στο τέλος του 1^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 5 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του 2^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 18 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του 3^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 31 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του 4^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 44 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του 5^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 57 αυτοκίνητα και στο τέλος του 6^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 70 αυτοκίνητα.

β) Τα αυτοκίνητα που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 13$ (τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αυξάνονται σταθερά κατά 13).

γ) Τα τέσσερα πρώτα χρόνια (στο τέλος του 48^{ου} μήνα δηλαδή) θα έχουν κατασκευαστεί:

$$\alpha_{48} = \alpha_1 + 47\omega = 5 + 47 \cdot 13 = 616 \text{ αυτοκίνητα.}$$

δ) Ζητάμε τον φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_\nu \geq 250, \text{ δηλαδή}$$

$$5 + (\nu - 1)13 \geq 250, \text{ οπότε}$$

$$(\nu - 1) \geq \frac{245}{13}, \text{ δηλαδή}$$

$$\nu \geq \frac{245}{13} + 1 \text{ και τελικά}$$

$$\nu \geq 19\frac{11}{13}.$$

Οπότε μετά από 20 μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}f(\alpha) + f(\beta) &\geq \alpha^2 - 36 \Leftrightarrow \\3\alpha^2 + 6\alpha^2 + 6\beta + 3\beta^2 + 6\alpha\beta + 6\beta &\geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow \\9\alpha^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta + 12\beta + 36 &\geq 0 \Leftrightarrow \\(9\alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha\beta) + (\beta^2 + 12\beta + 36) &\geq 0 \Leftrightarrow \\(3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 &\geq 0,\end{aligned}$$

που ισχύει σαν άθροισμα τετραγώνων.

β) Βάσει του ερωτήματος α), έχουμε:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow (3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν : $3\alpha + \beta = 0$ και $\beta + 6 = 0$.

Άρα $\beta = -6$ και $\alpha = 2$.

γ) Για $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned}f(x) = 6x &\Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 - 6x = 0 \Leftrightarrow \\3x^2 + 6x - 36 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 12 = 0.\end{aligned}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + 2x - 12$ είναι: $\Delta = 4 + 48 = 52 = 4 \cdot 13$

και οι ρίζες:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow \\x_1 &= -1 + \sqrt{13} \text{ και } x_2 = -1 - \sqrt{13}.\end{aligned}$$

ii. Ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6},$$

αφού $x_1 + x_2 = -2$ και $x_1 \cdot x_2 = -12$.

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{-1 + \sqrt{13}} + \frac{1}{-1 - \sqrt{13}} = \\&= \frac{-1 - \sqrt{13} - 1 + \sqrt{13}}{(-1 - \sqrt{13}) \cdot (-1 + \sqrt{13})} = \\&= \frac{-2}{1 - 13} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει και αρκεί : $x^2 - x - 12 > 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ είναι: $\Delta = 1 + 48 = 49$

και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ και } x_2 = 4.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$x^2 - x - 12$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

β) Είναι:

$$g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16) = \frac{1}{x^2 - x - 12} \cdot (x^2 - 16) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - x - 12} = \frac{(x-4) \cdot (x+4)}{(x+3) \cdot (x-4)} = \frac{x+4}{x+3} \quad \text{για}$$

κάθε x στο πεδίο ορισμού της A_g .

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και του άξονα $x'x$.

Έχουμε:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$ είναι $A(-4,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $y'y$, πρέπει να θέσουμε στον τύπο της g όπου $x = 0$. Αυτό όμως δε μπορεί να συμβεί γιατί το $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

Άρα δεν υπάρχει σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Έχουμε ότι:

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

και

$$(1 - \sqrt{5})^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} &= \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = \\ &= |2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}|. \end{aligned}$$

Αλλά $1 < 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$. Οπότε, $|1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$.

Άρα,

$$|2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 1 + 2\sqrt{5}.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

- Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.
- Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y . Η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ δεν είναι συνάρτηση, γιατί $0 \rightarrow -2$ και $0 \rightarrow 3$, δηλαδή μια τιμή του y αντιστοιχεί σε δυο τιμές του x .

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$ και το σύνολο τιμών το

$$B = \left\{-6, -4, 0, -\frac{25}{4}\right\}.$$

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι για κάθε τιμή των x, y συμμετρικά ως προς τον άξονα $x\chi'$.

ii. Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$ με $\alpha < 0$ και ν περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iii. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$.

iv. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_n) με λόγο $\lambda = 1$, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_{\nu} = \nu \cdot \alpha_1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ να δείξετε ότι $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Λάθος, είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

ii. Σωστό.

iii. Λάθος, ισχύει $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$ αν και μόνο αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

iv. Σωστό.

v. Σωστό.

β) Θεωρία της παραγράφου 3.3.

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι λάθος (Λ). Π.χ $-5 < -1$ και $-4 < -2$, όμως $(-5) \cdot (-4) > (-1) \cdot (-2)$.

ii. Είναι σωστή (Σ).

iii. Είναι λάθος (Λ). Η εξίσωση έχει μια ρίζα, την $x = \sqrt[3]{5}$.

iv. Είναι λάθος (Λ). Όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική, το τριώνυμο είναι ομόσημο του a , δηλαδή θετικό στην προκειμένη περίπτωση, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Είναι λάθος (Λ). Ο πίνακας αποτελείται και από τα ζεύγη $(1, -1)$ και $(1, 1)$ που έχουν την ίδια τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη. Δηλαδή υπάρχει ένα x που αντιστοιχεί σε διαφορετικά y .

β) Είναι ιδιότητα των απολύτων τιμών, παράγραφος 2.3 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ 4

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ».

Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το γράμμα Β υπάρχει ακριβώς μια φορά στη λέξη «ΑΛΓΕΒΡΑ». Την πρώτη φορά που το συναντάμε είναι στην 5^η θέση της διαδοχής και επειδή η λέξη έχει 7 γράμματα, η δεύτερη εμφάνιση του γράμματος Β είναι στην 12^η θέση και κάθε εμφάνισή του είναι 7 θέσεις μετά την προηγούμενη. Έτσι, η ακολουθία που σχηματίζουν οι θέσεις που συναντάμε το γράμμα Β είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 7$.

β) Αρκεί να βρούμε τον 23^ο όρο της προόδου. Είναι:

$$\alpha_{23} = \alpha_1 + 22\omega = 5 + 22 \cdot 7 = 5 + 154 = 159$$

Επομένως, η 23^η φορά που συναντάμε το γράμμα Β είναι στην 159^η θέση.

γ) Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 200 με το 7, βρίσκουμε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 4, οπότε $200 = 7 \cdot 28 + 4$. Έτσι, μέχρι την 196^η θέση έχουμε 28 φορές επανάληψη της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ» οπότε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση είναι το 4^ο γράμμα της λέξης, δηλαδή είναι το γράμμα Ε.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$

(Μονάδες 6)

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$, οπότε ισχύει: $f(0) = 10$. Άρα $\kappa = 10$.

β) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) < 0$. Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 10$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 5. Επιπλέον ο συντελεστής του όρου x^2 είναι ίσος με τη μονάδα, οπότε το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 10$	+	0	-	0	+

Η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για όλες τις τιμές του x που περιέχονται στο διάστημα $(2, 5)$.

γ) Τα σημεία A, B της C_f βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, οπότε ισχύει $2 < \alpha < \beta < 5$.

i. Για την απόδειξη της ζητούμενης ανισότητας, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$5\alpha < 2\alpha + 3\beta \text{ και } 2\alpha + 3\beta < 5\beta$$

Η πρώτη γράφεται $3\alpha < 3\beta$ και ισχύει, αφού $\alpha < \beta$ και η δεύτερη γράφεται $2\alpha < 2\beta$ και επίσης ισχύει για τον ίδιο λόγο.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $2 < \alpha < x_0 < \beta < 5$, οπότε ο αριθμός x_0 περιέχεται ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 7x + 10$. Επομένως, $f(x_0) < 0$, οπότε το σημείο της C_f με τετμημένη x_0 βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Ισοδύναμα έχουμε

$$\text{i. } x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{ii. } x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

β) Για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$, όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και

$x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}.$$

Επίσης, για $x = \frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό

κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Τέλος, για $x = -\frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό

κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Επομένως $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ)

i. Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

ii. Είναι

$$A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Όπως δείξαμε στο β) είναι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$A > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$ και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να

πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Εναλλακτικά, θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $\frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16}$ έχει λύση στο

$\mathbb{R} - \{1, -1\}$. Είναι ισοδύναμα

$$\frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$16(x^4 + x^2 + 1) = 9 \Leftrightarrow$$

$$16x^4 + 16x^2 + 16 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16x^4 + 16x^2 + 7 = 0$$

και επειδή $16x^4 + 16x^2 + 7 \geq 7 > 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η

παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3,1415\dots$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1,1)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 12$ έχει $\Delta = 1 - 4 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$ και δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x^2 - x - 12$	+	○	○	+

Δηλαδή

$$x^2 - x - 12 < 0 \text{ για κάθε } x \in (-3, 4) \text{ και}$$

$$x^2 - x - 12 > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty) .$$

β) Είναι $\pi > 3 \Leftrightarrow \pi + 9 > 12 \Leftrightarrow \frac{\pi + 9}{3} > 4$, οπότε με βάση το α) έχουμε ότι

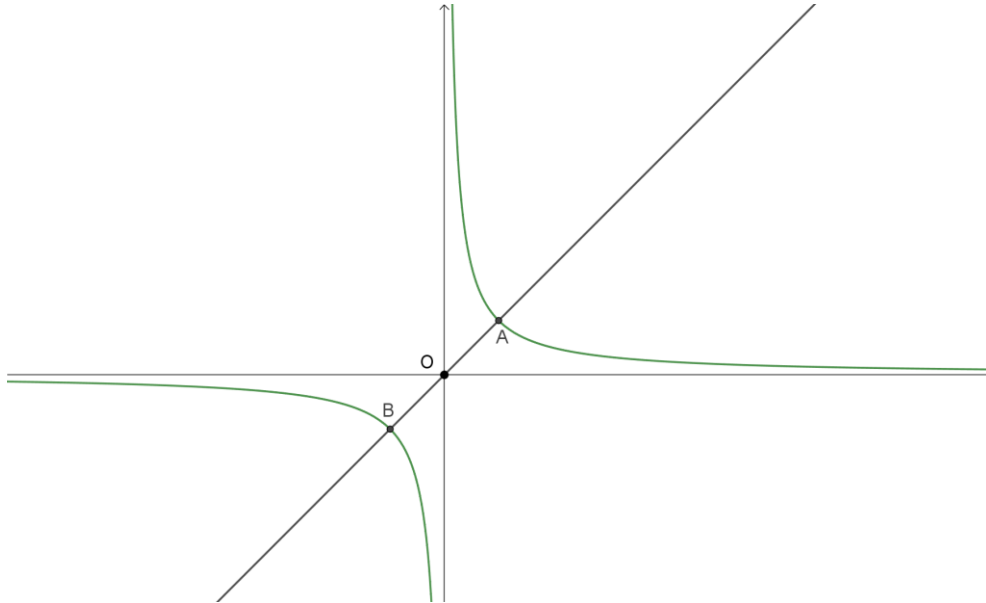
$$\left(\frac{\pi + 9}{3} \right)^2 - \left(\frac{\pi + 9}{3} \right) - 12 > 0$$

γ) Η παράσταση $(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12$ είναι η τιμή του τριωνύμου για $x = |\alpha| + 3$ και για να είναι αρνητική θα πρέπει :

$$-3 < |\alpha| + 3 < 4 \Leftrightarrow -6 < |\alpha| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha \in (-1, 1) .$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0,0)$ είναι το μέσο του AB .

(Μονάδες 9)

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f .

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε τότε $(AB) = (MM')$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής της ευθείας $y = x$ με τη γραφική παράσταση της

$f(x) = \frac{1}{x}$, οπότε οι τετμημένες των A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Όμως από το σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο B είναι στο 3ο τεταρτημόριο οπότε έχει αρνητική τετμημένη και το σημείο A στο 1ο οπότε έχει θετική τετμημένη. Συνεπώς $A(1, f(1))$ δηλαδή $A(1, 1)$ και $B(-1, f(-1))$ δηλαδή $B(-1, -1)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία A, B έχουν αντίθετες συντεταγμένες οπότε είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $O(0, 0)$, δηλαδή το $O(0, 0)$ είναι το μέσο του AB .

β) Αφού $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f , είναι $x \neq 0$ και $f(x) = y$ δηλαδή $y = \frac{1}{x}$ (1).

Το συμμετρικό του M ως προς το $O(0, 0)$ είναι το $M'(-x, -y)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f , πρέπει και αρκεί $f(-x) = -y$ ισοδύναμα $-y = -\frac{1}{x}$ ισοδύναμα $y = \frac{1}{x}$ που ισχύει από την (1).

Σημείωση : Αυτό γραφικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας το O .

γ) Ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned} (AB) &\leq (MM') \Leftrightarrow \\ \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} &\leq \sqrt{(x+x)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow \\ \sqrt{8} &\leq \sqrt{4x^2 + \frac{4}{x^2}} \Leftrightarrow \\ 8 &\leq 4x^2 + \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \\ 2 &\leq x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \\ 0 &\leq x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Leftrightarrow \\ 0 &\leq \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \neq 0$.

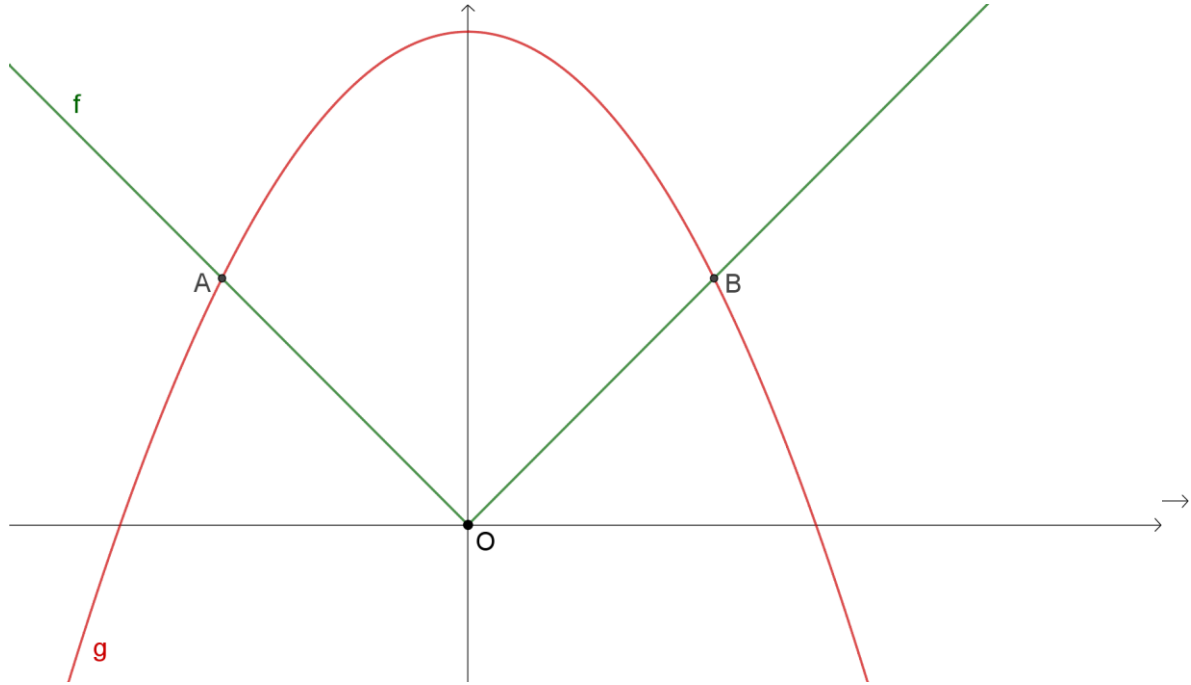
$$\text{Τέλος, } (AB) = (MM') \Leftrightarrow 0 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \stackrel{\alpha)}{\Leftrightarrow} x = \pm 1$$

που σημαίνει ότι ισχύει όταν τα σημεία M, M' ταυτίζονται με τα σημεία A, B.

Σημείωση: αυτό σημαίνει ότι η απόσταση AB είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της υπερβολής που είναι συμμετρικά ως προς το (0,0).

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$. Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

(Μονάδες 10)

β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x| = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 = 0.$$

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$.

Για $\omega = -2$ έχουμε $|x| = -2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega = 1$ έχουμε $|x| = 1$ οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B , το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1 .

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$ οπότε $A(-1, 1)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε $B(1, 1)$.

β)

i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A, B δηλαδή για $x \in (-1, 1)$.

ii. Έχουμε ισοδύναμα: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x| < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 < 0$.

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ και γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$, δηλαδή $-2 < |x| < 1$.

Όμως η ανίσωση $-2 < |x|$ ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του x , οπότε πρέπει και αρκεί $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο βi) ερώτημα.

ΘΕΜΑ 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $\alpha_n = 107n + 1210$. (1)

(Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

(Μονάδες 5)

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{50} = 6560.$$

Το κόστος για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{100} = 11910.$$

Οπότε:

$$\alpha_1 + 49\omega = 6560 \text{ και}$$

$$\alpha_1 + 99\omega = 11910.$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$50\omega = 5350 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 107.$$

Άρα

$$\alpha_1 + 49\omega = 6560 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + 49 \cdot 107 = 6560 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + 5243 = 6560 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 = 1317.$$

Συνεπώς το κόστος για ν καλεσμένους είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega = 1317 + (\nu - 1) \cdot 107 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 107\nu + 1210.$$

β)

i. Όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$ είναι το κόστος για ν καλεσμένους.

Ακόμα και αν δεν εμφανιστεί καλεσμένος στο γάμο, ο χώρος δεξίωσης θα κοστίσει στους ενδιαφερόμενους 1210 ευρώ.

ii. Έχουμε:

$$\alpha_1 = 107 \cdot 1 + 1210.$$

$$\alpha_2 = 107 \cdot 2 + 1210 = \alpha_1 + 107.$$

$$\alpha_3 = 107 \cdot 3 + 1210 = 107 \cdot (2 + 1) + 1210 = 107 \cdot 2 + 1210 + 107 = \alpha_2 + 107, \text{ κοκ.}$$

Οπότε κάθε φορά που το πλήθος των καλεσμένων αυξάνει κατά ένα άτομο το κόστος της δεξίωσης του γάμου θα αυξάνει κατά 107 ευρώ.

γ) Το κόστος για 80 καλεσμένους θα είναι $\alpha_{80} = 107 \cdot 80 + 1210 = 9770$ ευρώ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = (1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$.

β) Έχουμε $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} = |\alpha| - |\beta| = (1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 2$.

γ) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} \stackrel{\alpha, \beta}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{A} > B \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4\sqrt{2}} > 2 \Leftrightarrow$$

$$4\sqrt{2} > 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow$$

$2 > 1$, που ισχύει.

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
- ii. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.
- iii. Η εξίσωση $x^v = \alpha$, με v περιττό φυσικό και $\alpha < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[v]{|\alpha|}$.
- iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3, 5)$ ισχύει $f(5) = 3$.
- v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

(Μονάδες 10 (5×2))

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Λ

ii. Σ

iii. Λ

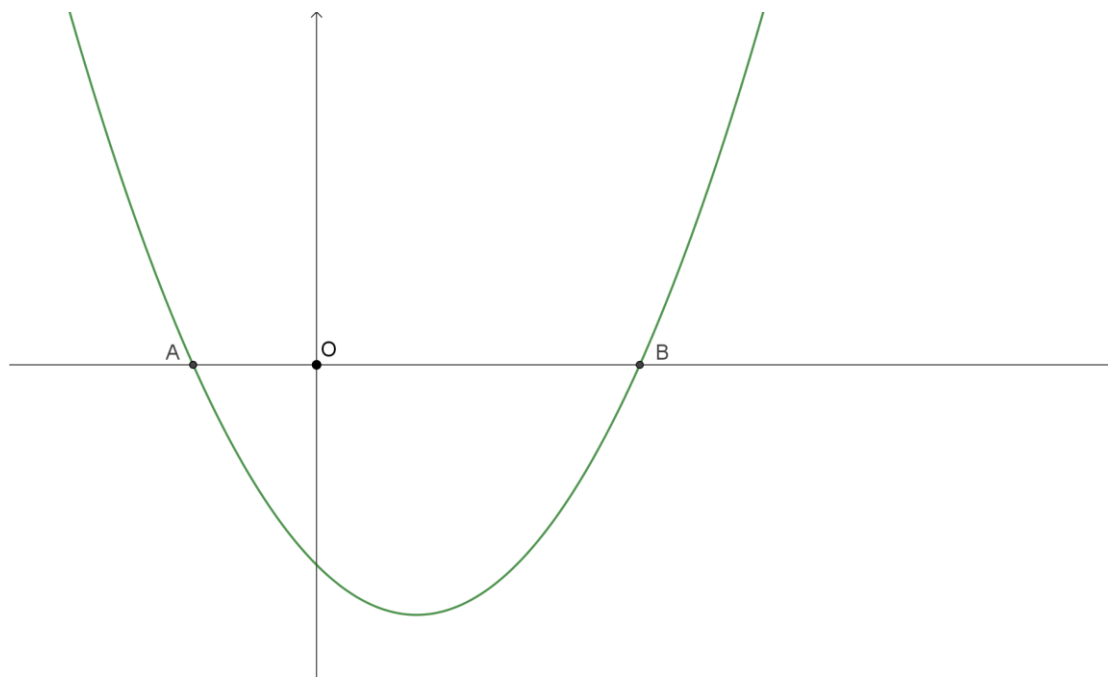
iv. Λ

v. Σ

β) Θεωρία § 5.2

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$.



Αν $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$

α) Να δείξετε ότι :

i. $\omega + \phi = 1$.

(Μονάδες 4)

ii. $\omega \cdot \phi = -1$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \phi$.

(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$, οπότε ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $\omega < 0 < \phi$ αφού το σημείο $O(0,0)$ είναι μεταξύ των A και B στον άξονα $x'x$.

Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 5$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Επειδή $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ έχουμε ότι $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

i. Αφού ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της $x^2 - x - 1 = 0$

έχουμε ότι $\omega + \phi = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1$.

ii. Αφού ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της $x^2 - x - 1 = 0$

έχουμε ότι $\omega \cdot \phi = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$.

β) Είναι $(OB) = |\phi| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $(OA) = |\omega| = \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Επειδή $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $(OB) > (OA)$.

Εναλλακτικά, είναι $(OB) = |\phi| = \phi$ αφού $\phi > 0$ και $(OA) = |\omega| = -\omega$ αφού $\omega < 0$.

Είναι $(OB) > (OA) \Leftrightarrow \phi > -\omega \Leftrightarrow \phi + \omega > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει.

γ) Αφού ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους

ξεπερνάει τη μία μονάδα, έχουμε ότι $\beta - \frac{1}{\beta} > 1$ και εφόσον $\beta > 0$ έχουμε

ισοδύναμα $\beta^2 - 1 > \beta \Leftrightarrow \beta^2 - \beta - 1 > 0$. Το τριώνυμο $x^2 - x - 1$ έχει ρίζες ω, ϕ και γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha = 1$, για $x < \omega$ ή $x > \phi$. Συνεπώς $\beta < \omega$ ή $\beta > \phi$. Όμως $\beta > 0$, οπότε $\beta > \phi$.

Εναλλακτικά, $\beta^2 - \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow f(\beta) > 0$. Από τη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν θετική τεταγμένη, δηλαδή είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, είναι αυτά που είναι δεξιά του B ή αριστερά του A . Συνεπώς $\beta < \omega$ ή $\beta > \phi$. Όμως $\beta > 0$, οπότε $\beta > \phi$.

δ) Είναι $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} - 1 = \frac{1}{9} > 0$ και επειδή $\frac{5}{3} > 0$ έχουμε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

Εναλλακτικά, $\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15} > 1$, οπότε με βάση το γ) έχουμε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.