|  |  |
| --- | --- |
| *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*  ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ  **1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ** | MAΘΗΜΑ 7Ο  **ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ** |

Το

15o ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ME ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

## ΕΥΡΕΣΗ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ – ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Τα ακρότατα μίας συνάρτησης f, ολικά ή τοπικά, τα αναζητούμε:

1. Στις ρίζες της **f  x  0** .
2. Στα σημεία που δεν ορίζεται η **f ** .

Στα ακραία σημεία του πεδίου ορισμού, **x0 x0** που ανήκουν στο **Df**

* + Ακρότατα σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου

(3: στάσιμα σημεία).

**f1 x** **, x ** **x0**

**  **

Για να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης **f x **

** ** ****

**f2 x , x x0**

, αρχικά εξετάζουμε τη συνέχεια

στη θέση **x0** .

* Αν η f είναι συνεχής στο , τότε:

βρίσκουμε τα ακρότατα της f ανά κλάδο και αν αλλάζει η μονοτονία της f στο **x0** , τότε και αυτό είναι θέση τοπικού ακρότατου.

* Αν η f δεν είναι συνεχής στο **x0** , τότε:

ενδέχεται η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατο στο , ακόμη και χωρίς

να αλλάζει η μονοτονία της εκατέρωθεν του **x0** . Αυτό το διαπιστώνουμε με τα πλευρικά όρια της f

στο **x0** και το **f x0 ** .

* Αν **f x0 ** **** **lim f x** **** **lim f x** , τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

**xx** **xx**

**0 0**

στο **x0** .

* Αν **f x0 ** **** **lim f x** **** **lim f x** , τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο **x0** .

**xx** **xx**

**0 0**

* + Εύρεση παραμέτρων μέσω ακροτάτου

Σε ασκήσεις που έχουμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση που ο τύπος της περιέχει παραμέτρους τις

οποίες ζητάμε να προσδιορίσουμε ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο για **x  x0  Df** , με τιμή **y0** , τότε:

* Υποθέτουμε, με βάση το Θ. Fermat ότι **f ** **x0 ** **** **0** .
* Επειδή η τιμή του ακροτάτου είναι **y0** , ισχύει ότι: **f x0 ** **** **y0**

Αφού βρούμε τις παραμέτρους, εξετάζουμε αν εκατέρωθεν του **x0**

γίνονται δεκτές οι τιμές των παραμέτρων.

η **f ** αλλάζει πρόσημο. Μόνο τότε,

## ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ

Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f έχει κρίσιμο σημείο το **x0**

τότε από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

**f ** **x0 ** **** **0** , δηλαδή το **x0** είναι ρίζα της **f ** .

## ΑΚΡΟΤΑΤΟ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

* + ***Ανισώσεις της μορφής* f x  0 *ή* f x  0**

Μελετάμε την f ως προς τα ακρότατα. Αν έχει ελάχιστο στο **x0** , τότε **f x** **** **f x0 ** , ενώ αν έχει μέγιστο στο **x0** , τότε **f x** **** **f x0 ** .

* + ***Δεδομένες ανισώσεις της μορφής* f x  0 *ή* f x  0**

(Από ανισοτική σχέση σε σχέση ισότητας)

Αρχικά βρίσκουμε προφανή ρίζα της f. Έστω ότι **f x0 ** **** **0** , τότε η ανίσωση γίνεται: **f x** **** **f x0 ** ή

**f x** **** **f x0 ** . Σε κάθε περίπτωση η f παρουσιάζει ακρότατο στο **x0** .

Αν το **x0** είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f και η f είναι παραγωγίσιμη, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, ισχύει **f ** **x0 ** **** **0** και από αυτή τη σχέση θα προκύπτει το ζητούμενο.

* + Ανισώσεις της μορφής

**hx  f x  gx**

Συνήθως οι ανισότητες αυτής της μορφής αποδεικνύονται με δύο τρόπους.

***1ος τρόπος****:* Αποδεικνύω ότι **hx  f x** και **f x  gx** που είναι της προηγούμενης μορφής.

***2ος τρόπος****:* Εφαρμόζω το θεώρημα μέσης τιμής για την f σε διάστημα που έχει ως άκρο του το χ (συνήθως **0, x** )

* + Ανισώσεις της μορφής

**m  f x  M**

***1ος τρόπος****:* Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f. Αν είναι το διάστημα **m, M** ,

τότε

**m  f x  M** για κάθε χ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

***2ος τρόπος****:* Αποδεικνύω ότι **m  f x** και **f x  M** που είναι της

προηγούμενης μορφής.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

* + Μέγιστο Κέρδος – Ελάχιστο Κόστος

Αν θέλουμε να βρούμε την ποσότητα χ ενός προϊόντος, που παράγεται ή πωλείται, για την οποία η επιχείρηση που το παράγει έχει μέγιστο κέρδος ή ελάχιστο κόστος, τότε:

Εκφράζουμε τις συναρτήσεις Κέρδους – Εσόδων – Κόστους, συναρτήσει των x μονάδων

προϊόντος ή της μίας μονάδας του παραγόμενου προϊόντος, ανάλογα με την εκφώνηση του προβλήματος. Είναι: ΚΕΡΔΟΣ = ΕΣΟΔΑ – ΚΟΣΤΟΣ

Στη συνέχεια βάζουμε περιορισμούς στη συνάρτηση που θέλουμε να βρούμε το ακρότατο. Τέλος μελετάμε τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει, ως προς τα ακρότατο.

* + Προβλήματα ακροτάτων σε καμπύλες
    - Βρίσκουμε τη συνάρτηση του μεγέθους στο οποίο αναφέρεται το ακρότατο. Αν η συνάρτηση περιέχει δύο μεταβλητές, βρίσκουμε μία σχέση που τις συνδέει και υπολογίζουμε τη μία, συναρτήσει της άλλης.
    - Βρίσκουμε τους περιορισμούς που διέπουν τη μεταβλητή της συνάρτησης που θέλουμε να βρούμε το ακρότατό της.

Οι προηγούμενοι περιορισμοί καθορίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

* + - Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
* Γεωμετρικά προβλήματα

Για να βρούμε ένα ακρότατο ενός μεγέθους που περιγράφεται μέσα από γεωμετρικό πρόβλημα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

* Κατασκευάζουμε σχήμα.
* Βρίσκουμε τη συνάρτηση f που εκφράζει το μέγεθος, του οποίου ζητάμε το ακρότατο. Αν η συνάρτηση περιέχει δύο αγνώστους, τότε μέσω του σχήματος βρίσκουμε μία σχέση που τις συνδέει και αντικαθιστούμε τη μία, συναρτήσει της άλλης.
* Από το σχήμα βρίσκουμε τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται η μεταβλητή. Οι περιορισμοί αυτοί, καθορίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Κάνουμε μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης f από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

**AΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ**

**ΑΚΡΟΤΑΤΑ**

**1.** Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

**α.** f(x) = x 2 ∙ lnx **β.** f(x) = 2 συνx , 0 ≤ x ≤ 2π

**γ.** f(x) = lnx / x 2 **δ.** f(x) = e x / 2x

**ε.** f(x) =  **στ.** fx) = 

**2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = x 2 (x + α) 2 (x − β) 2 , με α, β > 0 έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

**3.** Να βρεθεί για ποιες τιμές του α∈, η συνάρτηση f με:

f(x) = x 3 + (α − 1)∙x2 + 2x + 10

είναι γνησίως αύξουσα, σε όλο το .

**4.** Να βρεθεί κ∈, ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f(x) = x∙e 2κ − x να είναι το e .

**5.** Να βρεθούν οι τιμές των α, β ∈, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

**α.** Η συνάρτηση f(x) = x 3 + αx 2 + βx + 9 να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα για x1 = 1 και x2 = −3 .

**β.** Η συνάρτηση f(x) = α∙ln2x + β/x + α να έχει στη θέση x0 = 1 τοπικό ακρότατο με τιμή 2 + ln2 .

**6. α.** Να μελετήσετε, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, τη συνάρτηση f(x) = e x / x ν , ν∈\* .

**β.** Να αποδείξετε ότι , ∀ x∈(0, +∞).

**7.** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = e x + x 2 − x − 1 .

**α.** Να αποδείξετε ότι η Cf δέχεται οριζόντια εφαπτομένη, σε ένα μόνο σημείο της.

**β.** Να λύσετε την εξίσωση: e x + x 2 = x + 1 .

**γ.** Να αποδείξετε ότι: e x − 1 ≥ x∙(1 − x) , ∀ x∈.

**8.** Δίνεται η συνάρτηση f: → παραγωγίσιμη στο . Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα, αν ισχύει κάποια από τις επόμενες σχέσεις:

**α.** (f(x)) 2 + x 2 = 1 + 2x∙f(x) , ∀ x∈.

**β.** f(x) = (x 2 + 2αx + 2)∙e x , ∀ x∈, |α| < 1 .

**9.** Έστω η συνάρτηση f(x) = x ∙ ln2 x . Να βρείτε το σημείο της Cf στο οποίο η f έχει τη μικρότερη κλίση.

**10.** Να βρείτε τις τιμές του λ∈, αν η συνάρτηση:

f(x) = x 3 − (λ − 1)∙x 2 + (λ + 5)∙x − 2

δεν έχει ακρότατα.

**11**. Αν α, β > 0 και ισχύει  για κάθε x > 0, να αποδείξετε ότι α∙β = 1

**12.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο , για την οποία ισχύουν: f(0) = 1 και e 2x ∙ f(x) − 1 ≤ 0 , για κάθε x∈. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο Α (0, 1) .

**13.** Έστω η συνάρτηση f: (0, 1) → , η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με f(x) ≥ 0 , για κάθε x ∈ (0, 1). Αν υπάρχουν x1 , x2 ∈ (0, 1) με x1 ≠ x2 τέτοια, ώστε f(x1) = f(x2) = 0 , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0, 1) με f ΄΄΄(ξ) = 0 .

**14.** Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [α, β]. Αν υπάρχουν x1 , x2 ∈(α, β) τέτοιοι, ώστε f(α) , f(β) ∈ (f(x1) , f(x2)) , να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (ξ1 , ξ2) , ώστε f ΄΄(ξ) = 0 .

**15.** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x 3 + αx 2 + βx + γ , με α, β, γ ∈ και έστω ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει τρεις πραγματικές ρίζες, για τις οποίες είναι ρ1 < ρ2 < ρ3 . Να αποδείξετε ότι:

**α.** Υπάρχουν ξ1 ∈ (ρ1 , ρ2) και ξ2 ∈ (ρ2 , ρ3) , ώστε η f να παρουσιάζει στο ξ1 τοπικό μέγιστο και στο ξ2 τοπικό ελάχιστο.

**β.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση y = f ΄(x) να έχει στο ξ τοπικό ελάχιστο.

**16.** Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο [−α, α] με την f ΄ να είναι περιττή. Αν η f στο x0 ∈ (−α, α) παρουσιάζει ακρότατο, να δείξετε ότι υπάρχουν ξ1 , ξ2 ∈ (−α, α) , ώστε:

f ΄΄(ξ1) + f ΄΄(ξ2) = 

**17.** Έστω g, f παραγωγίσιμες συναρτήσεις, για κάθε x∈. Αν ισχύει:

f(x) ≤ x 2 + g(x) και f(3) − g(3) = 9

να δείξετε ότι ισχύει f ΄(3) − g ΄(3) = 6 .

**18.** Αν για κάθε x > 0 ισχύει lnx + α/x ≥ α , να βρείτε το α .

**19.** Έστω οι συναρτήσεις f, g: → οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: f(x) ≥ x + 1 και f(x) ∙ e g(x) = e x − x , για κάθε x∈. Αν η Cf διέρχεται από το σημείο Α (0, 1) , να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των Cf και Cg στο x0 = 0 , τέμνονται κάθετα.

**20.** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = α x − x α , x > 0, λ > 0, για την οποία γνωρίζουμε ότι f(x) ≥ 0 , για κάθε x > 0 .

**α.** Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή για x = α .

**β.** Να δείξετε ότι α = e .

**γ.** Να δείξετε ότι η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο [e, +∞) .

**21.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f: → , που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με f ΄(x) > f ΄΄(x) , για κάθε x∈. Αν η f παρουσιάζει, για x0 = 0 , τοπικό ακρότατο το f(0) = 0 , να αποδείξετε ότι:

**α.** Αν x < 0 τότε f(x) < f ΄(x) .

**β.** Αν x > 0 τότε f(x) > f ΄(x) .

**22. α.** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f(x) = x∙lnx + λ∙x , λ∈.

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων (x0, f(x0)), όπου xo η θέση του τοπικού ακρότατου, όταν το λ διατρέχει το .

**23.** Έστω η συνάρτηση f(x) =  , λ∈.

**α.** Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

**β.** Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ, για την οποία ισχύει f(x) ≤ 0 , για κάθε x∈.

**γ.** Αν λ ≥ 1 + 1/e να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα, η συνάρτηση g(x) = (1 − λ)∙x −  .

**24.** Αν f(x) = x λ ∙ e 2λ − x , λ > 0, x > 0 τότε:

**α.** Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο.

**β.** Να βρείτε την τιμή του λ, για την οποία το μέγιστο τη f γίνεται ελάχιστο.

**25.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης :

 , αν α∈.

**26.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: x 3 − αx 2 − 4x + α = 0 έχει τρεις πραγματικές ρίζες, για κάθε α∈.

**27.** Μία συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο . Αν υπάρχει α∈, ώστε f(α) = f ΄(α) = f ΄΄(α) = 0 και f ΄΄΄(x) > 0 , για κάθε x, τότε:

**α.** Να βρείτε τη μονοτονία των f , f΄ και f΄΄ .

**β.** Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις f ΄΄(x) = 0 , f ΄(x) = 0 και f(x) = 0 έχουν μοναδική ρίζα.

**28.** Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο [α, β] και ισχύει ότι:

α∙β > 0 ,  και f ΄(x) ≠  , ∀ x∈[α, β]

να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x0 ∈ (α, β) τέτοιο, ώστε:

αβ∙f(x0) = xo

**29.** Έστω η f(x) = 2x 3 − 3x 2 − 12x + 5α 2 .

**α.** Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

**β.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f(x) = 0 , όταν το α διατρέχει το .

**30.** Δίνεται η γραφική παράσταση

της συνάρτησης:

f(x) = x 3 + κx 2 + x + λ (κ, λ ∈)

Να αποδείξετε ότι x1∙x2 = 1/3 .

**31.** Δίνεται ο μιγαδικός z = e x + 2i, με x ≥ 0 . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης: |z − 3| .

**32.** Έστω η συνάρτηση f(x) = |z| , x∈[0, 1] , όπου:

z = (1 − x) + i∙(1 − x) , x∈[0, 1]

**α.** Να βρείτε το μιγαδικό, του οποίου το μέτρο γίνεται μέγιστο.

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f −1 .

**γ.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία y = x , τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

**33.** Αν (x 2 − 4x)∙f ΄(x) + f(x) = 0 , ∀ x∈[0, 4] να αποδείξετε ότι f(x) = 0, για κάθε x∈[0, 4] .

**34.** Να αποδείξετε ότι:

**α.** ισχύει x∙ex + 2ex + 1 > 0 , για κάθε x∈.

**β.** η συνάρτηση f(x) = ln(1 + x 2) − e −x + 1 είναι γνησίως αύξουσα στο .