**Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Γ.Ε.Λ**

|  |  |
| --- | --- |
| *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*  ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ  **1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ** | **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ**  **ΣΤΑ**  **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  **Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**  **ΣTO 1Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ** |

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

* ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
* ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

**ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ 1ο ΜΕΡΟΣ**

M7: Για την επίλυση ενός προβλήματος απαιτείται η μέγιστη ανάλυση των δεδομένων

του, δηλαδή η «καταγραφή» όλων των δυνατών πληροφοριών που εξάγονται από

την εκφώνηση.

Στις ασκήσεις με γεωμετρικό σχήμα προσπαθούμε να συμβολίζουμε τα μεγέθη με

τον ελάχιστο δυνατό αριθμό γραμμάτων.

**Παράδειγμα**

**Δίνονται τα διανύσματα ,ίσου μέτρου, τα οποία σχηματίζουν γωνία 120ο μεταξύ τους. Να προσδιοριστούν τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε το ΑΒΓΔΕΖ να αποτελεί κανονικό εξάγωνο.**

**Επίλυση**

Για τον προσδιορισμό των κορυφών Δ, Ε και Ζ του κανονικού εξαγώνου, αρκεί να εκφραστούν οι πλευρές π.χ. συναρτήσει των διανυσμάτων .

A B

Z Γ

Ο

Εστω  =  ,  =  τότε έχουμε  =  ,  = + οπότε

 = +από το παραλληλόγραμμο ΒΓΔΟ ,  = +από το παραλληλόγραμμο ΒΑΖΟ και  =  από το παραλληλόγραμμο ΓΟΕΔ.

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με  και  είναι ρόμβος .**

Μ8: Για εύρεση γωνιών ή πλευρών τριγώνου θα έχουμε υπόψη μας πάντα τους

νόμους ημιτόνων και συνημίτονων: Α  β γ

ω

γ2=α2+β2-2αβσυνω Γ α Β

Αρχικά χαράζουμε ευθείες κάθετες μεταξύ τους στα Α και Β παράλληλες των

διευθύνσεων Βορρά –Νότου και Ανατολής-Δύσης αντίστοιχα, και

προσδιορίζουμε τα σημεία Β και Γ σχηματικά σύμφωνα με την εκφώνηση.

**Παράδειγμα**

**Ένα εμπορικό πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α με μοναδικό ενδιάμεσο σταθμό το λιμάνι Β για παραλαβή εμπορεύματος και τελικό προορισμό την πόλη Γ. Η απόσταση του λιμανιού Α από το λιμάνι Β είναι 10 ναυτικά μίλια και η απόσταση του λιμανιού Β από την πόλη Γ είναι 8 ναυτικά μίλια. Αν το πλοίο κάνει κίνηση ευθύγραμμη με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 30ο βορειοδυτικά προκειμένου να ταξιδέψει για το Β και γωνία 15ο νοτιοδυτικά για να συνεχίσει από εκεί προς τη Γη, να βρεθεί:**

**α) η απόσταση που θα διένυε το πλοίο κινούμενο ευθύγραμμα, αν όλη του η**

**προμήθεια για την πόλη Γ προέρχονταν από το λιμάνι Α,**

**β) η γωνία **

**Επίλυση**

Από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία φ=30ο (εντός εναλλάξ).

α) Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων για την ΑΓ, όπου

 =15ο +φ= 15ο + 30ο =45ο.

Είναι ΑΓ2 = ΑΒ2+ΒΓ2-2 ΑΒ. ΒΓ.συν   ΑΓ2 = 102+82-2.8.10.συν45ο =100+64-2.80.=164-80=50,863. Άρα ΑΓ= 7,13 ναυτικά μίλια.

β) Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε:

ο

Άρα ημθ=0,79 και επειδή 0<θ<90ο, λόγω σχήματος, προκύπτει θ=52,484ο.

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Ένα πλοίο ξεκινά από ένα λιμάνι Ο και διανύει απόσταση 550 μιλίων με κατεύθυνση 60ο Νοτιοδυτικά .Στη συνέχεια κατευθύνεται με 10ο Βορειοδυτικά διανύοντας απόσταση 700 μιλίων . Να βρεθεί η απόσταση του πλοίου από το λιμάνι Ο και η κατεύθυνση που πρέπει να πάρει ώστε να επιστρέψει στο λιμάνι κατευθείαν.**

Μ9: Για να εκφράσουμε ένα διάνυσμα σε συνάρτηση άλλων διανυσμάτων:

* Ξεκινάμε από την αρχή του δοσμένου διανύσματος,
* Ακολουθούμε διαδρομή από διαδοχικά διανύσματα με τελικό προορισμό το πέρας του διανύσματος

**Παράδειγμα**

**Δίνεται το παρακάτω σχήμα**

με Α Β

Δ Γ

Ο

 = ,  = , =  και  = .

**α) Να γράψετε το διάνυσμα με τη βοήθεια των διανυσμάτων .**

**β) Να γράψετε το διάνυσμα με τη βοήθεια των διανυσμάτων .**

**γ) Να βρείτε διάνυσμα τέτοιο ώστε +.**

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Δίνονται τα διανύσματα , και σημείο Γ τέτοιο ώστε .**

**α) Να υπολογιστούν τα διανύσματα , και  σε συνάρτηση των  και.**

**β) Αν Μ και Ν τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα , να επαληθεύσετε την ευκλείδεια πρόταση**

**« Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την Τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της »,**

**στο τρίγωνο ΟΑΒ.**

Μ10: Για να αποδείξουμε ότι δυο διανύσματα και είναι παράλληλα

**1ος τρόπος:**

Κάνουμε πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στη μορφή R\*

**Παράδειγμα**

**Δίνονται τα μη παράλληλα διανύσματα Αν είναι και ,να αποδείξετε ότι .**

**Επίλυση**

Εξετάζουμε αν τα διανύσματα και μπορούν να πάρουν τη μορφή =x. Αν υπάρχει τέτοιο x, θα πρέπει:

=, δηλαδή 2=και –3=-2 x, δηλαδή x=. Άρα με x =ισχύει = και .

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Αν  ,  όχι παράλληλα , να βρεθεί ο λεR ώστε τα διανύσματα  + λ  και**

**2 - ( λ+1)  να είναι παράλληλα.**

**2ος τρόπος:**

Βρίσκουμε μια από τις δυο σχέσεις ή 

**Παράδειγμα**

**Αν για τα διανύσματα  και ισχύει + +=και , να αποδείξετε ότι **

**Επίλυση**

Εξισώνουμε τους λόγους της εκφώνησης με κ, δηλαδή =κ(η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε κάθε άσκηση που έχει αναλογία στα δεδομένα της εκφώνησης). Προκύπτει: =2κ, κ και =5κ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

 (1)

Από τη σχέση **+ +=** έχουμε **=- ,** οπότε το πρώτο μέλος της (1) γίνεται:

=5κ (2)

ενώ το δεύτερο: =2κ+3κ=5κ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει η ζητούμενη.

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Αν για τα διανύσματα  και ισχύει ++=και , να αποδείξετε ότι **

**3ος τρόπος:**

Εξετάζουμε αν και τότε 

**Παράδειγμα**

Δίνεται ένα εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ στο οποίο είναι .Να αποδείξετε ότι .

**Επίλυση**

Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι καθένα από τα διανύσματα είναι παράλληλο με ένα τρίτο διάνυσμα. Θέτουμε , ,και προσπαθούμε να εκφράσουμε τα άλλα διανύσματα ως συνάρτηση των Έχουμε  από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΚ. Επομένως , άρα και  από το παραλληλόγραμμο ΖΚΔΕ. Επειδή , ισχύει (1).Εκφράζουμε τώρα το ως συνάρτηση των 

Είναι 

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε και , άρα 

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Αν  και , να δείξετε ότι**

**α)  και**

**β) **

Μ11: Για να αποδείξουμε μια ισότητα με διάνυσμα χωρίς υποθέσεις τότε

**1ος τρόπος:**

Για την ισότητα της μορφής παίρνουμε τη βασική σχέση

με Ο μέσο τα Α,Β …..και αντικαθιστούμε. Κάνουμε πράξεις

και από το ένα μέλος φτάνουμε στο άλλο.

**Παράδειγμα**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου του παραλληλογράμμου ισχύει



**Επίλυση**

Από το τρίγωνο ΜΑΓ προκύπτει . Ομοίως από το τρίγωνο ΜΒΔ προκύπτει .Προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες αυτές και έχουμε:



**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε , Ζ των διαγωνίων ΑΓ , ΒΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι .**

**2ος τρόπος:**

Εκφράζουμε όλα τα διανύσματα με σημείο θέσης ένα από τα σημεία της σχέσης

και από το ένα μέλος καταλήγουμε στο άλλο.

**Παράδειγμα**

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι ****

**Επίλυση**

Εισάγουμε παντού το ίδιο γράμμα (όποιο θέλουμε), έστω το Α. Δηλαδή γράφουμε: ,,,οπότε η ισότητα γίνεται: 

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Αν Κ είναι ένα σημείο του επιπέδου του τριγώνου ΑΒΓ και Λ, Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα , να αποδειχθεί ότι**

**.**

**3ος τρόπος:**

Χρησιμοποιούμε την μεταβατική ιδιότητα δηλαδή και τότε .

**Παράδειγμα**

Δίνονται δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΕΓΖ (η διαγώνιος ΑΓ είναι κοινή). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

**Επίλυση**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι . Συγκρίνουμε καθένα από τα διανύσματα αυτά με ένα τρίτο διάνυσμα ή με έναν γραμμικό συνδυασμό άλλων διανυσμάτων. Έχουμε: (1) και (2)

Τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα διότι έχουμε = από το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ και =από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επομένως .

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα με ,. Να δείξετε ότι .**

Μ12: Για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου Μ που ορίζεται από μια ισότητα:

α) Εκφράζουμε σε όλους τους όρους της ισότητας που μας δίνεται ένα γράμμα

συνήθως το Α

β) Κάνουμε πράξεις και προκύπτει

γ) η μορφή δηλαδή το 2ο μέλος είναι σταθερό διάνυσμα

δ) Άρα το Μ είναι γνωστό

**Παράδειγμα**

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και ζητείται σημείο Μ για το οποίο:

** (1)**

**Επίλυση**

Αν G βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ θα έχουμε:

.

Τότε η **(1)** γράφεται: ****απ’ όπου συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Δ, Μ και G είναι συνευθειακά. Το G όμως ανήκει στη διαγώνιο ΒΔ, αφού στο ΑΒΓ η ΒΟ είναι διάμεσός του. Συνεπώς το Μ ανήκει στη διαγώνιο ΒΔ και είναι σημείο που κατασκευάζεται αφού η σχέση γράφεται:



**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Δίνεται πεντάπλευρο ΑΒΓΔΕ και ζητείται σημείο Μ τέτοιο ώστε**

**.**

Μ13: Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο κέντρο



**1ος τρόπος:**

Παίρνοντας για G το κέντρο του ενός τριγώνου ισχύει η σχέση G

 (1) όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) και τα δεδομένα της

εκφώνησης καταλήγουμε στη σχέση οπότε G είναι

κέντρο και του Α΄Β΄Γ΄.

**Παράδειγμα**

**Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν = , =  και**

**= .Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν κοινό κέντρο βάρους.**

**Επίλυση**

Αν G το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει  αρκεί να αποδείξουμε ότι . Για την απόδειξη αυτής της σχέσης γράφουμε αριστερά τα δεδομένα και δεξιά το ζητούμενο

|  |  |
| --- | --- |
| Δεδομένα | Ζητούμενο |
| **=** |  |
| **=** |  |
| **=** |  |
|  |  |

Εισάγουμε αριστερά παντού το G, ώστε να εμφανιστούν τα ή τα .Είναι:

**= **

**= **

**= **

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη, προσπαθώντας να κάνουμε πλήρη χρήση των δεδομένων, οπότε έχουμε:

**(+**(**+=+**)ή+()=ή=

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν = , =  και**

**= .Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν κοινό κέντρο βάρους.**

**2ος τρόπος:**

Εκφράζουμε το διάνυσμα  με τις κορυφές Α,Β,Γ, και χρησιμοποιούμε τη σχέση οπότε καταλήγουμε στη σχέση =, άρα τα G, G΄συμπίπτουν.

**Παράδειγμα**

**Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν = , =  και**

**= .Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν κοινό κέντρο βάρους.**

**Επίλυση**

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με κέντρα βάρους G και G΄αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το με τρεις διαφορετικούς τρόπους:







Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

3=+++(++) ή 3=+

διότι

= και ++=

Αλλά χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **= , = ,= **και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι 3=. Άρα τα G και G΄ συμπίπτουν.

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν = , =  και**

**= .Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν κοινό κέντρο βάρους.**

Μ14: Για να εκφράσουμε ένα διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των και 

α) Παίρνουμε τη σχέση =λ+κ(1)

β) Αντικαθιστούμε τα δεδομένα

γ) Βρίσκουμε τις τιμές των κ , λ

δ) Αντικαθιστούμε στη σχέση (1)

**Παράδειγμα**

**Να αναλυθεί το διάνυσμα  = ( 4, -3) σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων  = (1,2) και =(2,5).**

**Επίλυση**

Έστω και οι ζητούμενες συνιστώσες ώστε: // και//. Τότε =kκαι =λ, k,λIR.

Eπομένως  =+ =k+λ(4, -3)= k(1, 2)+λ(2, 5) (4, -3)=( k+2λ,

2k+5λ) οπότε:  και k=26.

Άρα = k=26(1, 2)=(26, 52) και = λ=-11(2, 5)=(-22, -55).

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Να αναλυθεί το διάνυσμα  = ( 14, -13) σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων  = (1,2) και =(3,7).**

**Καλό διάβασμα. Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!!**