**Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Γ.Ε.Λ**

|  |  |
| --- | --- |
| *ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*  ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ  **1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ** | **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ**  **ΣΤΑ**  **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  **Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**  **ΣTO 1Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ** |

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

* ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
* ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

M1: Για να δείξουμε ότι δυο διανύσματα και είναι ίσα, αρκεί να δείξουμε ότι:

**1ος τρόπος:**

Είναι απέναντι πλευρές παραλληλόγραμμου και είναι ομόρροπα διανύσματα

**Παράδειγμα**

**Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ να δειχθεί ότι: .**

**Επίλυση**

Είναι: ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε , που σημαίνει ότι και το ΑΜΓΝ είναι παραλληλόγραμμο. ΄Αρα .

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ να δειχθεί ότι: .**

**2ος τρόπος:**

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν το ίδιο μέσο

γιατί

* Αν μεν έχουν ίδιο φορέα έχουμε:

Α Β Μ Γ Δ

**=** οπότε αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:



* Αν δεν έχουν τον ίδιο φορέα τότε το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιες του διχοτομούνται συνεπώς  ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

Α Β

Γ Δ

**Παράδειγμα**

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ στη διαγώνιο ΒΔ ώστε όπου .Να δειχθεί ότι .**

**Επίλυση**

**1ος τρόπος:**

Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου. Αφού Ο είναι μέσο των διαγωνίων, τότε  Αρα  =. (1)

Ομοίως βρίσκουμε ότι  (2)

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι δηλ. το Ο είναι μέσο του ΕΖ. Το Ο όμως είναι και μέσο της διαγωνίου ΑΓ. Άρα το ΑΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Επομένως θα είναι ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

**2ος τρόπος:**

Παρατηρούμε ότι . (1)

και . (2)

Όμως (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και ). Συνεπώς

από (1) και (2) έχουμε .

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΕΓΖ έχουν κοινή την διαγώνιο ΑΓ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.**

**3ος τρόπος:**

Καθένα από τα  και είναι ίσο προς τρίτο διάνυσμα

**Παράδειγμα**

**Να δειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.**

**Επίλυση**

Αρκεί να δείξουμε ότι Έστω .

Τότε: .

Όμως 

οπότε  (1)

Ομοίως 

και 

οπότε  (2). Από (1) και (2) έχουμε: 

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Έστω το διάνυσμα  και δύο σημεία Ο1,Ο2 του χώρου. Αν Α1,Α2 και Β1,Β2 είναι αντίστοιχα τα συμμετρικά των Α, Β ως προς τα Ο1 και Ο2 , να αποδείξετε ότι α)  β) **

M2: Για να δείξουμε ότι τρία μη συγγραμμικά διανύσματα σχηματίζουν

τρίγωνο δείχνουμε ότι  ή ότι το άθροισμα τους ισούται με το

διπλάσιο ενός εξ αυτών .

**1ο Παράδειγμα**

**Να δειχθεί ότι τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις διαμέσους ενός τριγώνου, σχηματίζουν τρίγωνο.**

**Επίλυση**

Έστω ΑΚ, ΓΜ και ΒΛ οι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, με .

Αφού το Κ είναι το μέσο του ΒΓ έχουμε: και αν θεωρήσουμε το Α ως σημείο αναφοράς έχουμε:

.

Ομοίως και .

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

=και επειδή τα είναι μη συγγραμμικά, σχηματίζουν τρίγωνο.

**2ο Παράδειγμα**

**Αν τα διανύσματα  είναι  να δειχθεί ότι τα μη συγγραμμικά διανύσματα και σχηματίζουν τρίγωνο.**

**Επίλυση**

Έχουμε: =

=9. Άρα τα σχηματίζουν τρίγωνο.

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**1ο Παράδειγμα**

**Αν τα διανύσματα  είναι  να δειχθεί ότι τα μη συγγραμμικά διανύσματα και σχηματίζουν τρίγωνο.**

**2ο Παράδειγμα**

**Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο. Να δείξετε ότι τα διανύσματα .**

M3: Για να δείξουμε ότι δυο σημεία Α και Β συμπίπτουν (ταυτίζονται ( ΑΒ)) αρκεί

να δείξουμε ότι:

*  ή
*  όπου Ο σημείο αναφοράς

**Παράδειγμα**

**Να δειχθεί ότι οι διαγώνιες παραλληλογράμμου διχοτομούνται.**

**Επίλυση**

**1ος τρόπος:**

Έστω Κ μέσο της ΒΔ. Τότε (1) και αν θεωρήσουμε τυχαίο σημείο Ο ως σημείο αναφοράς η (1) γράφεται:

ή  (2)

Ομοίως αν Λ μέσο της ΑΓ θα έχουμε  (3).

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (2) έχουμε:

διότι τα διανύσματα είναι αντίθετα (έχουν ίσα μέτρα ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, και αντίθετη φορά).

Αφού λοιπόν συμπεραίνουμε ότι το Κ ταυτίζεται με το Λ που σημαίνει ότι οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

**2ος τρόπος:**

Έστω Ο μέσο της ΑΓ. Αρκεί να δείξουμε ότι το Ο είναι και μέσο της ΒΔ. Έχουμε  και αν θεωρήσουμε το Δ ως σημείο αναφοράς παίρνουμε:

. Όμως προφανώς οπότε δηλαδή το Ο είναι μέσο του ΒΔ.

**3ος τρόπος:**

Έχουμε: = (ΧΒ-ΧΑ,ΨΒ-ΨΑ)+(ΧΓ-ΧΒ,ΨΓ-ΨΒ)+(ΧΑ-ΧΓ,ΨΑ-ΨΓ)=

(ΧΒ-ΧΑ+ΧΓ-ΧΒ+ΧΑ-ΧΓ, ΨΒ-ΨΑ+ΨΓ-ΨΒ+ΨΑ-ΨΓ)=(0,0)=

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και κατά την ίδια φορά παίρνουμε ΓΒ’ = ΒΓ , ΑΓ’ = ΓΑ και ΒΑ’ = ΑΒ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.**

M4: Για να δείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ, είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι

δυο από τα διανύσματα  είναι συγγραμμικά. Επειδή ανά δύο έχουν

κοινό σημείο είναι συνευθειακά δηλ. αρκεί να δείξουμε ότι:

κ.ο.κ.

Είναι πολύ σημαντικό να ξέρουμε ότι αν έχουμε μία σχέση της μορφής

κ και κ+λ+μ=0 τότε τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

**Παράδειγμα**

**Στην πλευρά ΔΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Ε ώστε . Αν Κ σημείο στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου ώστε όπου και , να δειχθεί ότι τα σημεία Ε, Κ και Β είναι συνευθειακά.**

**Επίλυση**

Έχουμε:

=(1)

και =(2)

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι δηλαδή τα είναι συγγραμμικά και αφού έχουν κοινό σημείο Κ, τα Ε,Κ,Β είναι συνευθειακά.

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , Ε το μέσο της ΑΒ , Ο σημείο της διαγωνίου ΑΓ με . Να δείξετε ότι :**

**α) Τα σημεία Δ, Ο, Ε είναι συνευθειακά.**

**β) .**

M5: Όταν δίνονται κάποια διανύσματα και ζητείται να βρεθεί το διάνυσμα θέσης ενός

άλλου διανύσματος συναρτήσει των δοθέντων ή ισοδύναμα μπορεί να ζητείται η

θέση ενός σημείου που ικανοποιεί μία συγκεκριμένη διανυσματική σχέση, τότε

αξιοποιούμε το γεγονός ότι κάθε διάνυσμα γράφεται:

(όπου Ο ένα σημείο αναφοράς)

με σκοπό να εκφράσουμε τελικά διάνυσμα  σε σχέση με τα  ως:

,με λ, μ  IR

**Παράδειγμα**

**Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ στο οποίο  και τα σημεία Κ,Λ που τριχοτομούν την ΑΒ. Να εκφρασθούν τα διανύσματα  συναρτήσει των .**

**Επίλυση**

Έχουμε:

ή ή ή .

Αν για το διάνυσμα θεωρήσουμε σημείο αναφοράς το Α θα έχουμε:

++===

(γραμμικός συνδυασμός των  ).

Εξάλλου  =+=.

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων, ,  και . Να εκφραστούν τα διανύσματα , και σε συνάρτηση των διανυσμάτων **

M6: Στις σχέσεις μεταξύ διανυσμάτων, έχουμε ασκήσεις όπου ζητείται να δειχθεί μία

ισότητα μεταξύ διανυσμάτων. Εκτελούμε πράξεις και μετασχηματισμούς

ξεκινώντας συνήθως από το μέλος που έχει τις περισσότερες πράξεις γράφοντας

ένα διάνυσμα ως άθροισμα ή διάφορα δύο άλλων αξιοποιώντας πολλές φορές την

1η βασική πρόταση

**Παράδειγμα**

**Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:**

****

**Επίλυση**

Αφού το Κ είναι μέσο του ΑΓ έχουμε (1) και με το Β σημείο αναφοράς παίρνουμε:

2ή (2).

Ομοίως από την (1) με σημείο αναφοράς το Δ παίρνουμε:

(3).

Τέλος με Λ μέσο της ΒΔ και Κ σημείο αναφοράς παίρνουμε:

ή (4)

Προσθέτοντας τις (2) και (3) έχουμε:



**Εφαρμογή για τον μαθητή**

**Αν Δ,Ε είναι τα μέσα των ακμών ΟΑ, Γ αντίστοιχα τετραέδρου ΟΑΒΓ , να δείξετε ότι  .**

**Καλό διάβασμα. Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!!**