

5.2 Φαινόμενο Ντόπλερ(Doppler)

Στεκόμαστε ακίνητοι στην αποβάθρα ενός σταθμού. Ένα τρένο με ανοικτή τη σειρήνα του, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα μας πλησιάζει και στη συνέχεια μας προσπερνά. Όλοι μας έχουμε παρατηρήσει ότι ο ήχος που αντιλαμβανόμαστε κατά την διάρκεια της κίνησης του τρένου δεν είναι ο ίδιος.

Πιο συγκεκριμένα, καθώς το τρένο μας πλησιάζει ο ήχος της σειρήνας είναι οξύτερος από ό,τι όταν το τρένο απομακρύνεται από εμάς, αφού μας έχει προσπεράσει. Η οξύτητα ενός ήχου εκφράζεται "αντικειμενικά" με την συχνότητα. Όσο μεγαλύτερη η οξύτητα του ήχου τόσο μεγαλύτερη και η συχνότητα του. Αν βέβαια ρωτούσαμε τον μηχανοδηγό για το ύψος του ήχου που αντιλαμβάνεται κατά την κίνηση του τρένου, θα μας απαντούσε ότι ακούει σταθερό ήχο.

Από τις παραπάνω εύκολα μετρήσιμες διαπιστώσεις οδηγούμεστε στην ακόλουθη διατύπωση για το φαινόμενο *Doppler*:

Φαινόμενο Doppler λέγεται το φαινόμενο κατά το οποίο, όταν ένας παρατηρητής και μία πηγή κυμάτων βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, τότε η συχνότητα του κύματος που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται δεν είναι ίδια με την συχνότητα που η πηγή εκπέμπει.

Το φαινόμενο παρατηρείται σε όλα τα αρμονικά κύματα, τόσο στα μηχανικά, όσο και στα ηλεκτρομαγνητικά.

Για την μελέτη του φαινομένου θα συμβολίζουμε με S την πηγή, f_S την συχνότητα της πηγής, $\vec{v}_S$ την ταχύτητα της πηγής. Επίσης θα συμβολίζουμε με A τον παρατηρητή, f_A την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής και $\vec{v}_A$ την ταχύτητα του παρατηρητή. Ως θετική φορά των ταχυτήτων $\vec{v}_S$, $\vec{v}_A$ θα θεωρούμε την φορά από την πηγή προς τον παρατηρητή.

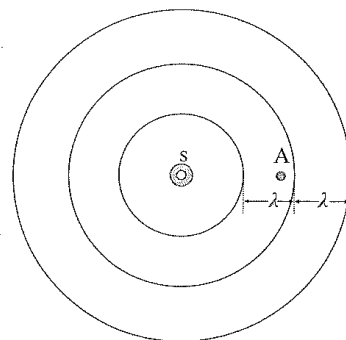
Τέλος δεχόμαστε ότι ο αέρας, που αποτελεί το μέσον διάδοσης των ηχητικών κυμάτων, είναι ακίνητος. Οι ταχύτητες $\vec{v}_S$ και $\vec{v}_A$ είναι υπολογισμένες σε σχέση με τον αέρα. Επίσης η ταχύτητα v με την οποία διαδίδεται ο ήχος στον αέρα είναι σταθερή και η φορά της θεωρείται πάντα θετική.

5.2.1 Ακίνητη πηγή - Ακίνητος παρατηρητής

Θεωρούμε μια ακίνητη ως προς το μέσο διάδοσης πηγή S που εκπέμπει προς όλες τις κατευθύνσεις ήχο συχνότητας f_S . Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα v και έχουν μήκος κύματος λ , τα οποία συνδέονται με την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής:

$$v = \lambda f_S \Rightarrow f_S = \frac{v}{\lambda}$$

Στο σχήμα βλέπουμε ένα στιγμιότυπο του κύματος. Οι ομόκεντροι κύκλοι παριστάνουν τα διαδοχικά μέγιστα του κύματος σε μια χρονική στιγμή. Είναι σαφές ότι δύο μέγιστα απέχουν μεταξύ τους απόσταση λ .



Ένας παρατηρητής A, ο οποίος είναι επίσης ακίνητος ως προς τον αέρα, υπολογίζει συχνότητα ήχου f_A , μετρώντας τα μέγιστα που φτάνουν σε αυτόν ανα μονάδα χρόνου. Όμως στην μονάδα του χρόνου, όσα μέγιστα παράγει η πηγή, τόσα μέγιστα φτάνουν στον παρατηρητή, άρα θα αντιλαμβάνεται την ίδια συχνότητα με εκείνη που η πηγή εκπέμπει.

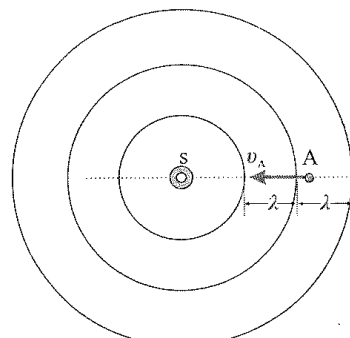
$$f_A = f_S = \frac{v}{\lambda}$$

Άρα στην περίπτωση που δεν υπάρχει σχετική κίνηση πηγής - παρατηρητή δεν παρατηρούμε αλλαγή στην συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται!

5.2.2 Ακίνητη πηγή - Κινούμενος παρατηρητής

Ο παρατηρητής πλησιάζει

Θεωρούμε ότι ένα παρατηρητής A πλησιάζει προς την ακίνητη πηγή S με ταχύτητα $\vec{v}_A$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τώρα στην μονάδα του χρόνου φτάνουν στον παρατηρητή περισσότερα μέγιστα κύματος από αυτά που η πηγή παράγει στον ίδιο χρόνο, αφού το μέτρο της ταχύτητας με την οποία διαδίδεται ο ήχος, ως προς τον παρατηρητή είναι μεγαλύτερη λόγω της σχετικής κίνησης παρατηρητή - ήχου.



Γενικά για την σχετική ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος A σε σχέση με ένα κινούμενο σώμα B μπορούμε να γράψουμε $\vec{v}_{A,B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$, όπου οι ταχύτητες $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ είναι υπολογισμένες ως προς ένα ακίνητο παρατηρητή.

Στην δική μας περίπτωση η ταχύτητα του ήχου ως προς τον κινούμενο παρατηρητή A θα υπολογίζετε με βάση το παραπάνω ως εξής:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_A \Rightarrow v' = v - (-v_A) = v + v_A$$

Το μήκος κύματος που η πηγή εκπέμπει δίνεται πάλι από την σχέση: $\lambda = \frac{v}{f_S}$.

Ο παρατηρητής μετράει ακριβώς το ίδιο μήκος κύματος λ ως εάν ήταν ακίνητος, αλλά βλέπει τα μέγιστα να τον προσπερνούν

Η τιμή του μήκους κύματος είναι η ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς, στο σύστημα αναφοράς της πηγής και του κινούμενου παρατηρητή. Έτσι η συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται θα είναι:

$$f_A = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_A}{\lambda} = \frac{v + v_A}{v/f_S} \Rightarrow f_A = \frac{v + v_A}{v} f_S$$

Επειδή $v + v_A > v$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερος) από εκείνο που η πηγή εκπέμπει ($f_A > f_S$).

Ο παρατηρητής απομακρύνεται

Θεωρούμε ότι ένας παρατηρητής Α απομακρύνεται από την ακίνητη ως προς τον αέρα πηγή S με ταχύτητα $\vec{v}_A$. Τώρα στην μονάδα του χρόνου φτάνουν στον παρατηρητή λιγότερα μέγιστα του κύματος από αυτά που η πηγή στον ίδιο χρόνο παράγει, αφού το μέτρο της ταχύτητας με την οποία διαδίδεται ο ήχος, ως προς την παρατηρητή είναι μικρότερη λόγω της σχετικής κίνησης. Με βάση τα παραπάνω:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_A \Rightarrow v' = v - v_A = v - v_A$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται θα είναι:

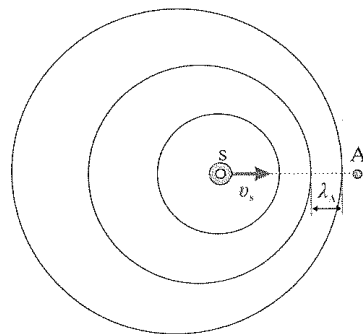
$$f_A = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v - v_A}{\lambda} = \frac{v - v_A}{v/f_S} \Rightarrow f_A = \frac{v - v_A}{v} f_S$$

Επειδή $v - v_A < v$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερης συχνότητας (βαρύτερος) από εκείνο που η πηγή εκπέμπει ($f_A < f_S$).

5.2.3 Κινούμενη πηγή - Ακίνητος παρατηρητής

Η πηγή πλησιάζει

Υποθέτουμε ότι μια πηγή ήχου S κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_S$, πλησιάζοντας έναν ακίνητο παρατηρητή Α. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου, ως προς τον αέρα θα είναι v γιατί εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης και όχι από την κίνηση της πηγής. Η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής για την πηγή θα είναι $v = \lambda f_S$. Από το σχήμα φαίνεται ότι καθώς η πηγή κατευθύνεται προς τον παρατηρητή “συμπίεζει” τα διαδοχικά μέγιστα του κύματος, με αποτέλεσμα ο παρατηρητής να τα ανιχνεύει με μικρότερο μήκος κύματος από εκείνο που η πηγή εκπέμπει.



Πιο συγκεκριμένα ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος λ_A την απόσταση δύο διαδοχικών μεγίστων που φτάνουν σε αυτόν. Η πηγή εκπέμπει κύματα και ταυτόχρονα κινείται. Ο χρόνος που μεσολαβεί κατά την εκπομπή δύο διαδοχικών κυμάτων είναι μια περίοδος T της ταλάντωσης της πηγής. Άρα μέχρι η πηγή έχει προχωρήσει κατά $x = v_S T$ μέχρι να εκπέμψει το επόμενο κύμα. Επομένως η απόσταση δύο διαδοχικών μεγίστων θα είναι $\lambda - v_S T$. Αυτή η απόσταση είναι και το μήκος κύματος λ_A που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται. Άρα η συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται θα είναι:

$$f_A = \frac{v}{\lambda_A} = \frac{v}{\lambda - v_S T} = \frac{v}{\frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S}} \Rightarrow f_A = \frac{v}{v - v_S} f_S$$

Επειδή $v - v_S < v$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερος) από εκείνο που η πηγή εκπέμπει ($f_A > f_S$).

Η πηγή απομακρύνεται

Αν υποθέσουμε ότι μία πηγή ήχου S απομακρύνεται με ταχύτητα $\vec{v}_S$ από τον παρατηρητή A , τότε με το αντίστοιχο σκεπτικό που παραπάνω αναλύσαμε είναι σαφές ότι ο παρατηρητής A θα αντιλαμβάνεται δύο διαδοχικά μέγιστα του κύματος σε μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους, αφού η πηγή σε χρόνο μίας περιόδου θα έχει απομακρυνθεί κατά $v_S T$. Το μήκος κύματος που ο παρατηρητής θα αντιλαμβάνεται θα είναι $\lambda + v_S T$. Άρα η συχνότητα που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται θα είναι:

$$f_A = \frac{v}{\lambda_A} = \frac{v}{\lambda + v_S T} = \frac{v}{\frac{v}{f_S} + \frac{v_S}{f_S}} \Rightarrow f_A = \frac{v}{v + v_S} f_S$$

Επειδή $v + v_S > v$ προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερης συχνότητας (βαρύτερος) από εκείνο που η πηγή εκπέμπει ($f_A < f_S$).

5.2.4 Γενικές παρατηρήσεις

Αν κινούνται τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής σε σχέση με τον αέρα ή γενικά το μέσο διάδοσης, τότε η σχέση που μας δίνει την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνεται από τον συνδιασμό όλων των παραπάνω περιπτώσεων.

$$f_A = \frac{v \pm v_A}{v \mp v_S} f_S \quad (156)$$

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι:

Ο παρατηρητής ακούει ήχο με μεγαλύτερη συχνότητα από εκείνο της πηγής, όταν η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται, και με συχνότητα μικρότερη από εκείνο της πηγής όταν η μεταξύ τους απόσταση αυξάνεται. Προσοχή στα πρόσημα!

- ο αριθμητής αναφέρεται στην κίνηση του παρατηρητή με το (+) να αντιστοιχεί στον παρατηρητή που πλησιάζει την πηγή και το (-) στον παρατηρητή που απομακρύνεται από την πηγή.
- ο παρονομαστής αναφέρεται στην κίνηση της πηγής με το (+) να αντιστοιχεί στην πηγή που πλησιάζει τον παρατηρητή και το (-) στην πηγή που απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

Χρονική Διάρκεια εκπομπής και χρονική διάρκεια λήψης του ήχου

Στο φαινόμενο *Doppler* δεν έχουμε μόνο αλλαγή στην συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής, αλλά και στην χρονική διάρκεια του ήχου που ακούει (Δt_A). Υποθέτουμε ότι η πηγή εκπέμπει τον ήχο για χρονική διάρκεια Δt_S . Από τον ορισμό της συχνότητας έχουμε ότι:

$$f_A = \frac{N_A}{\Delta t_A} \quad f_S = \frac{N_S}{\Delta t_S}$$

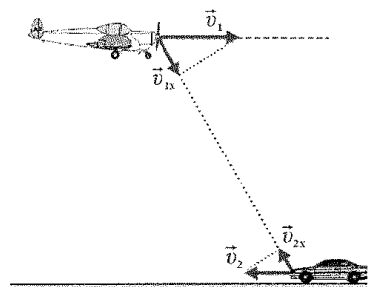
Ο αριθμός των κυμάτων που η πηγή εκπέμπει (N_S) είναι ίσος με τον αριθμό των κυμάτων που φτάνουν στον παρατηρητή (N_A). Άρα προκύπτει:

$$f_A \Delta t_A = f_S \Delta t_S \Rightarrow \Delta t_A = \frac{f_S}{f_A} \Delta t_S$$

Προφανώς, όταν ο παρατηρητής και η πηγή δεν βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, τότε $f_A = f_S$, άρα και οι χρονικές διάρκειες θα είναι ίσες.

Πηγή και παρατηρητής που δεν κινούνται πάνω σε ευθεία που ενώνει πηγή με παρατηρητή

Όταν η πηγή κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_S$ που δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία πηγής - παρατηρητή, τότε πρέπει να προσέξουμε τον τρόπο εφαρμογής των παραπάνω σχέσεων. Επιλέγουμε ως ταχύτητα του παρατηρητή ή ταχύτητα της πηγής την προβολή των ταχυτήτων τους πάνω στην ευθεία που ενώνει πηγή - παρατηρητή και εφαρμόζουμε την ανάλογη σχέση.



Πηγή ή παρατηρητής που εκτελούν μεταβαλλόμενη κίνηση

Όταν η κίνηση της πηγής ή του παρατηρητή δεν είναι ομαλή, τότε και η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα μεταβάλλεται και αυτή με τον χρόνο.

Στην περίπτωση της κινούμενης πηγής η ταχύτητα της θα είναι μια συνάρτηση του χρόνου $v_S(t)$ ανάλογα βέβαια με το είδος της κίνησης. Αν για παράδειγμα η πηγή εκτελεί μια απλή αρμονική ταλάντωση τότε $v_S = \omega A \sin(\omega t + \phi_0)$.

Στην περίπτωση του κινούμενου παρατηρητή η ταχύτητα του θα είναι μια συνάρτηση του χρόνου $v_A(t)$. Αν για παράδειγμα ο παρατηρητής επιταχύνεται ευθύγραμμα και ομαλά $v_S = \alpha_S t$